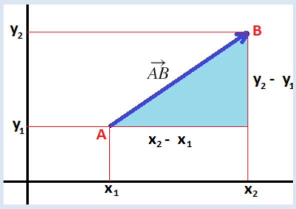
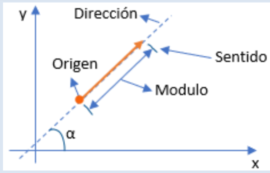
Vectores y Rectas

Un **vector** es un segmento orientado determinado por dos puntos, un **origen A**, de coordenadas (x_1,y_1), y un **extremo B** de coordenadas (x_2,y_2).



El vector que une los puntos A y B se denomina vector $\overrightarrow{AB}$ y sus coordenadas o componentes vienen determinadas por la diferencia entre las coordenadas del extremo menos las del origen.



Así pues, **todo vector viene caracterizado por un módulo, una dirección y un sentido.**

- **Módulo:** es la longitud del segmento AB, y coincide con la distancia entre los puntos A y B y se representa por $\|\overrightarrow{AB}\|$ y se calcula:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

- **Dirección:** es la recta sobre la que está situada el vector. Una recta y todas sus paralelas determinan la misma dirección.

- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir de fijar el origen y el extremo. (queda determinado por la punta de la flecha)

01.- **a)** Representa los puntos A(–1, 3) y B(2, 0). **b)** Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$. **c)** Dibuja otro vector CD, equipolente a AB, con origen en C(–2, 1); determina las coordenadas de su extremo D. Sol: b) $\overrightarrow{AB}$ = (3, –3). c) D(1, –2).

02.- Representa gráficamente los vectores $\vec{a}=(-1,-3)$, $\vec{b}=(3,1)$ y $\vec{c}=(2,1)$, y además, halla y representa gráficamente el resultado de las operaciones: $a)\ \vec{a}+\vec{b}$; $b)\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $c)\ \vec{a}-2\cdot\vec{c}$; $d)\ \vec{b}-\vec{c}$
Sol: a) (2, –2). b) (0, –3). c) (–5, –1). d) (1, 2).

03.- **a)** Halla el módulo de los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ del ejercicio anterior. **b)** Halla el módulo de $\vec{a}+\vec{b}$. ¿Hay alguna relación entre $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ y $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$? **c)** ¿Qué tendría que pasar para que $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$? **d)** ¿Puede ser $\|\vec{a}+\vec{b}\|=0$, ¿En qué casos?
Sol: $a) \|\vec{a}\|=\sqrt{10}, \|\vec{b}\|=\sqrt{10}, \|\vec{c}\|=\sqrt{5}, \|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{8}$.
No hay relación. c) Misma dirección y sentido. d) Si; cuando son opuestos.

04.- Halla la distancia entre los siguientes pares de puntos: **a)** (3, 1) y (5, 3); **b)** (–1, –2) y (–5, 3); **c)** (–1, 2) y (5, 2) y d) (3, –2) y (3, 4) Sol: a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{41}$; c) 6; d) 6

05.- Halla el punto medio de los pares de puntos dados en el ejercicio anterior. Sol: a)(4, 2); b) (–3, 1/2); c) (2, 2); d) (3, 1)

06.- Determina la distancia entre los puntos A(-4,4) y B(2,-2), el punto medio del segmento AB y el punto simétrico de A con respecto a B. Sol: a) $d_{AB}= 6\sqrt{2}$; b) M(-1,1); c) S(8,-8)

07.- Demuestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,2), B(4,6) y C(7,2) es isósceles. Sol: $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=5$

08.- Halla las coordenadas de un vector de la misma dirección que el vector $\vec{v}(3,4)$ y cuyo módulo sea 1. Sol: $\vec{r}=(3/5, 4/5)$

09.- Halla un vector director de la recta r que pasa por los puntos A(3,2) y B(3,5), así como la pendiente de dicha recta. Sol: $\vec{r}=(0,3)$; $m=\infty$

10.- Dado el triángulo de vértices A(3,3), B(0,0) y C(0,4), calcula el punto medio del lado AB, y la longitud de la mediana de ese mismo lado (la mediana es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto).
Sol: M_{AB}=(3/2,3/2); longitud mediana = $\frac{\sqrt{34}}{2}$

11.- El punto medio de A(–1, 3) y (x, y) es M(2, 1). ¿Cuáles son las coordenadas de B? Sol: B(5,–1)

12.- Calcular las coordenadas del punto S, simétrico del punto A(2, 6) con respecto B(4, 5) Sol: S (6,4)

13.- Los vértices de un triángulo son A(–7,3), B(1,1) y C(–1,5). Halla los puntos medios de sus lados. Comprueba que el triángulo que determinan tiene los lados paralelos al primero y que la medida de sus lados es la mitad. Sol: P(–3,2), Q(0,3) y R(–4,4)

14.- Si dos vectores tienen la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

15.- **a)** ¿Cuántos sentidos pueden existir en una dirección dada? **b)** ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos? Razona la respuesta. Pon ejemplos.

16.- **a)** Si las direcciones de dos vectores convergen ¿podrán ser iguales los vectores?, **b)** Dos vectores son paralelos y tienen la misma intensidad, ¿Han de ser iguales? Razona las respuestas y ayúdate de ejemplos.

17.- Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (3,5). Si B =(0,1) hallar las coordenadas de A. Sol: A=(6,9)

18.- Determina si los vectores son o no Ortogonales:
$a)\ \vec{u}=(3,-2)$ y $\vec{v}=(6,4)$ $\quad b)\ \vec{x}=(5,1)$ e $\vec{y}=(3,-15)$
Sol: a) No, b) Si

19.- Hallar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos A(–5,3) y B(8,6) en tres partes iguales. Sol: P=(–2/3,4);Q=(11/3,5)

20.- Calcula el valor de a para que el punto P(a, 7) esté a 10 unidades de distancia del punto Q(5, 1). Sol: a=13 y a=–3

21.- Divide el segmento de extremos A(–2,3) y B(0,–1)en tres partes iguales. Sol: P_1(–4/3, 5/3) y P_2(–2/3, 1/3)

22.- Calcula m para que los vectores $\vec{v}=(7,-2)$ y $\vec{u}$=(m,6) **a)** Sean paralelos. **b)** Tengan el mismo módulo. **c)** Sean perpendiculares. Sol: a) m=–21; b) $m=\pm\sqrt{17}$; c) m= 12/7

23.- Si A(3,1), B(5,7) y C(6,4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice? Sol: D(4,–2)

24.- Determina si el triángulo de vértices A(12,10), B(20,16) y C(8,32) es rectángulo. Sol: Si, porque verifica Pitágoras.

25.- Dados los puntos A(3,0) y B(–3,0), obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que determinan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan.
Sol: $C_1(0,3\sqrt{3})$ y $C_2(0,-3\sqrt{3})$ $\quad A=9\sqrt{3}\ u^2$

26.- Determina el valor de a, sabiendo que la distancia entre Q(–6,2) y P(a,7) es 13. Escribe también las coordenadas y el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$. Sol: a_1=6 y a_2=–18 $\|\overrightarrow{PQ}\|=13$

27.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3,–2), $\vec{b}$ (–1,2) y $\vec{c}$ (0,–5), calcula m y n de modo que $\vec{c}=m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}$. Sol: m=–5/4; n= –15/4

28.- Si M(7,4) y N(–2,1), hallar un punto P en el segmento MN tal que la distancia de M a P sea la mitad de la distancia de P a N. Sol: P (4,3)

29.- Dadas las rectas **r: ax+y–2=0** y **s: x+2y+b=0**, halla los valores que deben tomar a y b para que: **a)** Sean paralelas. **b)** Sean coincidentes. **c)** Sean perpendiculares
Sol: a) a=1/2; b) a=1/2 y b=–4; c) a=– 2

Vectores y Rectas

30.- Una recta que pasa por el punto A(1,1) tiene por pendiente m=−2. Halla sus ecuaciones implícita y explícita.

Sol: y=−2x+3; 2x+y−3=0

31.- Hallar las ecuaciones paramétricas, continua, general, punto-pendiente, explícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto A(−2,3) y cuyo vector de director es $\vec{u}$ =(3,4). Hallar, si existe, un punto de la recta que su abscisa sea 6. Hallar también, si existe, un punto de la recta con ordenada -4.

32.- Hallar la ecuación general de la recta r que pasa:

a) Por los puntos A(3,−1) y B(5,2). 3x−2y−19=0
b) Por A(−2,4) y tiene de pendiente −2. 2x+y=0
c) Por el punto A(1,−3) y es paralela a la recta s: x+3=0.
d) Por el punto A(−1,2) y es paralela al eje de abscisas.
e) Por el punto A(4,2) y es perpendicular a 2x−3y+2=0

Sol: c) x−1=0; d) y=2; e) 3x+2y−16=0

33.- Hallar el valor de k para que:

a) El punto (1,2) pertenezca a la recta x – 3ky + 3 = 0.
b) El punto (k,1) pertenezca a la recta x + 2y – 4 = 0.
c) Los puntos (1,2), (5,−6) y (7,k) estén alineados.
d) La recta 2x+ky=1 tenga de vector director $\vec{u}$ =(−5,3).
e) La recta kx – 3y + 2 = 0tenga dependiente m= −3/2.
f) Las rectas r: y=9kx+2 y s:4x−ky+1=0 sean paralelas.
g) Las rectas $r: 2x+3ky+2=0$ y $s: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{k}$ se corten en un punto.

Sol: a) 2/3; b) 2; c) −10; d) 10/3; e) −9/2; f) ±2/3; g) $k \neq \pm\sqrt{4/3}$

34.- Un paralelogramo tiene un vértice en el punto A(2,3) y dos de sus lados están sobre las rectas $r: x+y=20$ y $s: 2x-3y=10$. Calcular las ecuaciones de los otros dos lados y las coordenadas de sus vértices.

Sol: B(11,9); C(14,6); D(5,0); AB: 2x− 3y=−5; AD: x+y=5

35.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(−5,0), y por el punto de corte de las rectas r y s.

$$r: x-2y+2=0 \qquad s: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \end{cases}$$

Sol: x – 5y + 25 = 0

36.- Hallar la ecuación continua de la recta paralela a la recta s: $y=\frac{-1}{2}x+3$ y que corta al eje de ordenadas en y =−3.

Sol: $\frac{y+3}{1}=\frac{x}{-2}$

37.- Encontrar la ecuación de la recta r, que es paralela a la recta **r': 2x−3y+15=0** que pasa por el punto de intersección de las rectas **s: y =3x−1** y **t: x+2y+3=0**.

Sol: 2x−3y−4=0

38.- Halla el vector director y un punto de cada una de las siguientes rectas:

$$a)\ 3x+y-1=0 \quad b)\ -2x+2y-4=0 \quad c)\ x-3y+3=0$$

Sol: a) $\vec{a}(-1,3); A(0,1)$. b) $\vec{b}=(-2,2); B(-2,0)$. c) $\vec{c}=(-3,1); C(0,1)$

39.- Representa gráficamente las siguientes rectas:

$$r: (x,y)=(1,0)+\lambda(1,1)$$

$$s: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases} \qquad t: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}$$

40.- Halla la ecuación en forma explícita de cada una de las rectas dadas en el ejercicio 38. Determina la pendiente de cada una de ellas.

Sol: a) y=x−1; m= 1. b) y=−2x+4; m= −2. c) y=−2x=; m= −2.

41.- Halla la posición relativa de las siguientes rectas:

$$a) \begin{cases} r: x+2y-5=0 \\ s: 2x-y=0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} r: 3x-y-2=0 \\ y=3x+1 \end{cases}$$

Represéntalas gráficamente para confirmar el resultado

Sol: a) Secantes en (1, 2). b) Paralelas.

42.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 2) y cuyo vector director es $\vec{r}=(2,1)$.

Sol: Ec. Vectorial: $(x,y)=(1,2)+\lambda(2,1)$; Ecs. Paramétricas: $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}$; General: $x-2y+3=0$; Explícita: $y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$

43.- Averigua si la recta s de ecuaciones paramétricas $s: \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \end{cases}$ pasa por los puntos: a) M(5,1) b) N(−1,3)

Sol: Por M sí, pero por N no.

44.- Halla la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los vértices del triángulo de vértices A(0, 0) y B(5, 1) y C(1, 4).

Sol: $A-B: x-5y=0$; $A-C: 4x-y=0$; $B-C: 3x+4y-19=0$

45.- Calcula las ecuaciones vectorial, paramétricas y explícita de las rectas bisectrices de los cuatro cuadrantes.

Sol: a) x−y=0; b) x+y=0

46.- Calcula la recta que pasa por el punto A (2,7) y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°.

Sol: $y=\sqrt{3}x+\left(7-2\sqrt{3}\right)$

47.- La recta que pasa por el punto A (2,3) y es paralela a la recta **r: 3x+2y−12=0,** forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.

Sol: A=12 u²

48.- Calcula el valor del parámetro k para que las tres rectas **r: 2x+5y−1=0, s: -x+2y+k=0** y **t: 4x+7y−5=0** se corten en el mismo punto. Determina dicho punto.

Sol: K=5, P(3,−1)

49.- El segmento AB está sobre la recta x−4y+10=0. Su mediatriz es la recta 4xy−11 = 0. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son (−2, 2)?

Sol: B(6,4)

50.- Halla el circuncentro del triángulo de vértices A(−1, 1), B(3, 4), y C(3, 0).

Sol: C (11/8, 2)

51.- Comprueba que el triángulo de vértices A(4,4), B(−2,3) y C(3,−2) es isósceles y calcula su área.

Sol: A=35/2

52.- Por el punto A (1,6) trazamos la perpendicular a la recta **r: 2x+y−2=0.** Halla un punto de esta recta perpendicular que equidiste de A y de la recta *r*.

Sol: (-1/5, 27/5)

53.- Halla el simétrico del punto P(3,4) respecto de la recta *r:* 2x−y+3=0

Sol: P' (−1,6)

54.- Encuentra el simétrico del punto P(2,6) respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Sol: P' (6,2)

55.- Calcula el área del triángulo de vértices A=(2,1), B=(6,2) y C=(3,5)

Sol: 15/2 u. de área

56.- Escribir el vector $\vec{\omega}=\left(3,\frac{8}{3}\right)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=\left(0,\frac{7}{3}\right)$ y $\vec{v}=(1,4)$

Sol: $\vec{\omega}=-4\vec{u}+3\vec{v}$

57.- Calcula la recta que pasa por el punto P(5,6) y corta a los ejes coordenados según segmentos iguales.

Sol: x+ y −11 = 0

58.- Representa las rectas 3x + 6 = 0 y 2y − 6 = 0 y halla su punto de intersección.

Sol: P (2,3)

59.- Halla el punto simétrico de A (1, 1) respecto de la recta s: x − 2y − 4 = 0.

Sol: A' (3, −3)

60.- Comprueba, sin usar el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices A(−2, −1), B(3, 1) y C(1, 6) es rectángulo.

61.- Los puntos A(4, 5) y B(7, 0) son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla: a) Las ecuaciones de sus lados. b) Su perímetro. c) Su área.

Sol: a) OC: x=0 OB: y=0 AC: y=5; AB: 5x + 3y − 35 = 0; b) 21,83; c) 55/2

62.- Halla el valor de k para que los puntos A (1, −5), B (3, 0) y C (6, k) estén alineados.

Sol: k=15/2