El Lenguaje Algebraico

El *lenguaje algebraico* utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritmética, de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas lo que nos permite, formular expresiones algebraicas para luego poder resolver problemas mediante ecuaciones.

Expresión algebraica

Una *expresión algebraica* es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

$A = \pi \cdot R^2$ *es la expresión algebraica para calcular el área de un círculo.*

Monomio

Un *monomio* es la expresión algebraica más sencilla y consiste en el producto de un número por una o varias letras.

$$4x^2yz^3 \rightarrow \begin{cases} 4 & \rightarrow \textit{Coeficiente} \\ x^2yz^3 & \rightarrow \textit{Parte Literal} \end{cases}$$

Dos *monomios* son *semejantes* si tienen la misma parte literal.

$5x^3$ y $3x^3$ Son semejantes *$5x$ y $3x^2$ No son semejantes*

El *grado* de un monomio es el número de letras de la parte literal (la suma de todos los exponentes de su parte literal)

El *valor numérico* de un monomio es el valor que se obtiene al sustituir la letra (o letras) por un número (o números) y realizar los cálculos.

El valor numérico de $3x^2$ para $x=2$ es $3\cdot(2)^2 = 3\cdot 4 = 12$

Operaciones con Monomios

Para *sumar* o *restar* monomios, se suman o se restan los coeficientes de los monomios que sean semejantes:

$5x^2 - 3x^2 = 2x^2$ $4x^3 + 7x^3 - 5x^3 = 6x^3$

Para *multiplicar* monomios se multiplican los coeficientes por un lado y las partes literales por otro (Propiedades de las potencias)

$5x^2 \cdot 3x^3 = 15\,x^5$ $4x^5 \cdot 7x^2 = 28\,x^7$

Para *dividir* monomios se dividen los coeficientes por un lado y las partes literales por otro.

$10x^4 : 2x^3 = 5\,x$ $24x^5 : 6x^2 = 4\,x^3$

Polinomios

Un *polinomio, P(x),* es la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamaremos *términos* del polinomio. El coeficiente del término de mayor grado es el *coeficiente principal*, y el término sin letra (o de grado 0) se llama *término independiente*. Los representaremos por letras mayúsculas P, Q, R ….y entre paréntesis expresaremos la variable de la que depende. P(x), Q(x)…

$$P(x) = \underbrace{4x^3}_{\text{Término de grado 3}} + \underbrace{3x^2}_{\text{Término de grado 2}} - \underbrace{2x}_{\text{Término de grado 1}} + \underbrace{5}_{\text{Término independiente}}$$

El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de los monomios que los componen.

Grado de P(x) = $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ = 3 (el mayor)

$$4x^3 + 2x^2 + 6x - 7 \rightarrow \begin{cases} \textit{grado} : 3 \\ \textit{Coef. principal} : 4 \\ \textit{Término independiente} : -7 \end{cases}$$

Un polinomio es *completo* si contiene todos los términos consecutivos desde el de mayor grado hasta el término independiente, en cualquier otro caso diremos que el polinomio está incompleto.

$P(x) = \underbrace{8x^4 + 3x^2 + 2x + 5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}}$ $Q(x) = \underbrace{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}_{\text{Completo}}$

Un polinomio formado por dos términos recibe el nombre de binomio.

El *valor numérico de un polinomio* P(x) para *x=a*, *P(a)*, es el número que se obtiene al cambiar *x* por el número *a*, y realizar las operaciones indicadas.

Sea el polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 5 = 3\cdot 1 - 2 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$$
$$P(2) = 3(2)^2 + 2(2) + 5 = 3\cdot 4 + 4 + 5 = 12 + 4 + 5 = 21$$

Un número cualquiera *x=a es raíz de un polinomio P(x),* cuando el valor numérico de dicho polinomio para x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si P(a)=0

$$P(x) = x^2 - 4$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad P(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

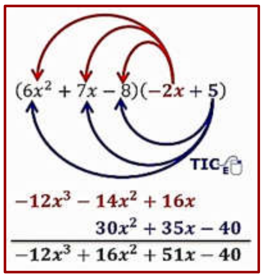
2 y -2 son raíces del polinomio x^2-4

Operaciones con polinomios

Para *sumar o restar* polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes que los componen y damos el resultado en orden decreciente en grado.

$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 5x - 2) =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 + x^3 - x^2 + 5x - 2 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$
$$(x^4 - 3x^2 + x + 1) - \underbrace{(x^3 - x^2 + 5x - 2)}_{\text{para restar dos polinomios}} =$$
$$= x^4 - 3x^2 + x + 1 \underbrace{- x^3 + x^2 - 5x + 2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}} = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

Para *multiplicar* dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios del primero por todos los monomios del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.



Para *dividir* un polinomio *P(x)* entre otro *Q(x),* dividimos cada término del dividendo entre todos los términos del divisor usando la regla de la división "cociente por divisor más resto igual a Dividendo"

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \hline -4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2 + 2x + 7 \\ \hline & 4x^2 & +8x & -11 & \\ & -4x^2 & +6x & & \\ \hline & & 14x & -11 & \\ & & -14x & +21 & \\ \hline & & & 10 & \end{array}$$

Cálculo de los términos

$4x^3 : 2x = 2x^2$

$4x^2 : 2x = 2x$

$14x : 2x = 7$

Cociente = $2x^2 + 2x + 7$
Resto = 10

Para sacar *factor común* en un polinomio se buscan todos los factores comunes (los que se repiten) a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$60x^4 + 18x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot (10x^2 + 3x - 4)$$

Potencia de polinomios

Para algunos productos particulares, conocemos fórmulas que permiten simplificar los cálculos; se trata de las identidades notables.

El cuadrado de la suma $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

El cuadrado de la diferencia $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$

Suma por diferencia. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Las dos primeras son potencias de polinomios, bueno, más bien potencias de un binomio. La potencia de un polinomio, al igual que la de un número, es la forma abreviada de escribir el producto de un polinomio por sí mismo varias veces.

$$[P(x)]^n = \underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot P(x)\cdot P(x)\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot P(x)}_{\text{n veces}}$$

Si interesantes son las potencias de un polinomio, más lo son las potencias de binomios de la forma a+b. Vamos a calcularlas:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

.....

Como puedes ver, al desarrollar cualquier binomio los exponentes del primer término (a) van disminuyendo mientras que los exponentes del segundo término (b) van aumentando. Todos los términos tienen el mismo grado, el exponente de la potencia, y los exponentes de las variables varían de uno en uno desde $a^n b^0$ hasta $a^0 b^n$.

Vemos que se forma un triángulo infinito, al que llamamos Triángulo de Pascal en honor al filósofo y matemático francés Blaise Pascal.

Se trata de un triángulo de números enteros, infinito y simétrico que empieza con un 1 en la primera fila, y cuyos bordes todos son todos 1. Cada número del interior es la suma de los dos números que tiene justo encima.

Pues con todo esto ya podemos calcular cualquier potencia del binomio (a+b), y a esto lo llamamos **Binomio de Newton.**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
:

En el caso de que el binomio fuera de la forma (a-b)n, os signos irían alternándose, empezando por el positivo:

(+−+−+−+−+−+−+−+−+....)

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez. Un polinomio se puede factorizar de tres formas:

- *Sacando factor común.*

$$10x^3 + 2x^2 - 8x = 2x\cdot(5x^2 + x - 4) \qquad x^5 - 5x^3 = x^3(x^2 - 5)$$

- *Identificando identidades notables.*

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)^2 \qquad 4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$$

- *Buscando sus raíces mediante Ruffini.*

El proceso de factorización comienza *buscando divisores* de la forma *x-a*, tales que, *a*, sea divisor del término independiente de nuestro polinomio.

Como cada raíz origina un factor de la forma *x – a*, cuando en la división por Ruffini el resto para un ***x* = *a*** sale 0, estamos diciendo que el polinomio de partida es divisible por el binomio ***x* – *a***, y por tanto, este binomio junto con el cociente obtenido nos dará una factorización del polinomio [recuerda que si *R(x) = 0, entonces, D(x) =d(x)·C(x)*]. Habrá que ir comprobando si los cocientes que vamos obteniendo se pueden descomponer, puesto que se trata de conseguir factores irreducibles.

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	0
2	0	2	-6	
	1	-3	0	<--

Los divisores de 6 son ±*1*, ±*2*, ±*3 y* ±*6*, probamos con -1 y obtenemos resto 0. Probamos con 1, y nada, probamos con 2 y obtenemos resto 0. Por tanto la factorización es *P(x)=(x+1)·(x-2)·(x-3)*

Teoremas del Resto y del Factor

Teorema del Resto: El valor numérico de un polinomio, P(x), para x=a, coincide con el resto de la división del polinomio P(x) por el binomio (x–a), es decir:

Resto = P(a)

Teorema del Factor: Si x = a es una raíz del polinomio P(x), dicho polinomio es divisible por x – a, es decir, x – a es un factor de P(x).

P (x) = (x - a) · C (x)

Fracciones algebraicas

Llamamos fracción algebraica a la división no exacta de dos polinomios P(x) y Q(x) expresada en forma de fracción y donde el denominador Q(x) es un polinomio no nulo de grado mayor que 0.

$$\frac{x+3}{x-5} \qquad \frac{x+2}{x^2-4} \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$$

Al igual que en las fracciones de números enteros, *en las fracciones algebraicas se suele trabajar con la fracción irreducible*, es decir, con aquella fracción equivalente a la original, pero que no se puede simplificar más.

Decimos que dos fracciones algebraicas son equivalentes, si se cumple que los productos cruzados son iguales, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \quad \text{Si se cumple que:} \quad P(x)\cdot S(x) = Q(x)\cdot R(x)$$

El máximo común divisor (M.C.D.) de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

Operaciones con fracciones algebraicas

Al operar con fracciones algebraicas, al igual que con las fracciones numéricas, siempre es conveniente simplificar el resultado.

Para simplificar una fracción algebraica, factorizaremos los polinomios del numerador y del denominador y dividiremos ambos por los factores que tengan en común, es decir, por el M.C.D. de ambos.

Para sumar o restar fracciones algebraicas, se suman los numeradores siempre y cuando los denominadores sean iguales. Si no es así, se reducen todas ellas a común denominador con la ayuda del m.c.m. para calcular después las fracciones equivalentes correspondientes y por último sumar los numeradores. Recuerda que el resultado siempre tiene que darse mediante la fracción irreducible.

$$\frac{x+10}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2+4x+4} = \frac{x^2+12x+20}{(x-2)\cdot(x+2)^2} - \frac{x^2+2x-8}{(x-2)\cdot(x+2)^2} = \frac{10x+28}{(x-2)\cdot(x+2)^2}$$

El producto de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{x+1}{x^2-9}\cdot\frac{2x+6}{x-2} = \frac{(x+1)\cdot(2x+6)}{(x^2-9)\cdot(x-2)} = \frac{(x+1)\cdot 2\cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)\cdot(x-2)} = \frac{(x+1)\cdot 2}{(x-3)\cdot(x-2)} = \frac{2x+2}{x^2-5x+6}$$

Para dividir dos fracciones algebraicas, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda. En la práctica, el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y por denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{x}{x^2-1} : \frac{x^2-2x}{x^2-x-2} = \frac{x\cdot(x^2-x-2)}{(x^2-1)\cdot(x^2-2x)} = \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

Resolución de Problemas Algebraicos

A la hora de *resolver problemas algebraicos* seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Análisis de los datos del enunciado. *(Ayudarse con un dibujo)*
c) Traducción del problema al lenguaje algebraico
d) Planteamiento de las operaciones a realizar y realización.
e) Resolución del problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para ello.
f) Dar la solución del problema (responder a las preguntas).
g) Evaluar e interpretar los resultados obtenidos con los datos del problema. ¿Son lógicos? ¿Se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿Puedo comprobar si la solución es correcta?