11 Funciones exponenciales y logarítmicas

FUNCIÓN EXPONENCIAL

$y = a^{k \cdot x}$

$y = a^x + b$

APLICACIÓN: INTERÉS COMPUESTO

LOGARITMOS

PROPIEDADES

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

RELACIONES ENTRE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

El camino

El camino partía en dos el bosque de hayas; mientras, el sonido del viento susurrando entre los árboles, y los trinos de algún pájaro que no logró reconocer, se mezclaron con el suave quejido de las ruedas del carro y la acompasada respiración de su padre que, a su lado, dormitaba en el pescante.

El niño, Gaspard Monge, se acurrucó contra su padre mientras pensaba en que seguramente el Cielo sería así.

Poco tiempo después, llegaban a su destino, un pequeño grupo de casas que se agrupaban alrededor de una venta, donde su padre, Jacques, entró dejándole encargado de vigilar el carro. Desde allí Gaspard podía ver cómo su padre discutía con el ventero por el precio del vino que transportaban en los barriles.

Tras descargar el vino y cobrar, Jacques anotó las cantidades en un cuaderno que volvió a guardar en el interior de su levita.

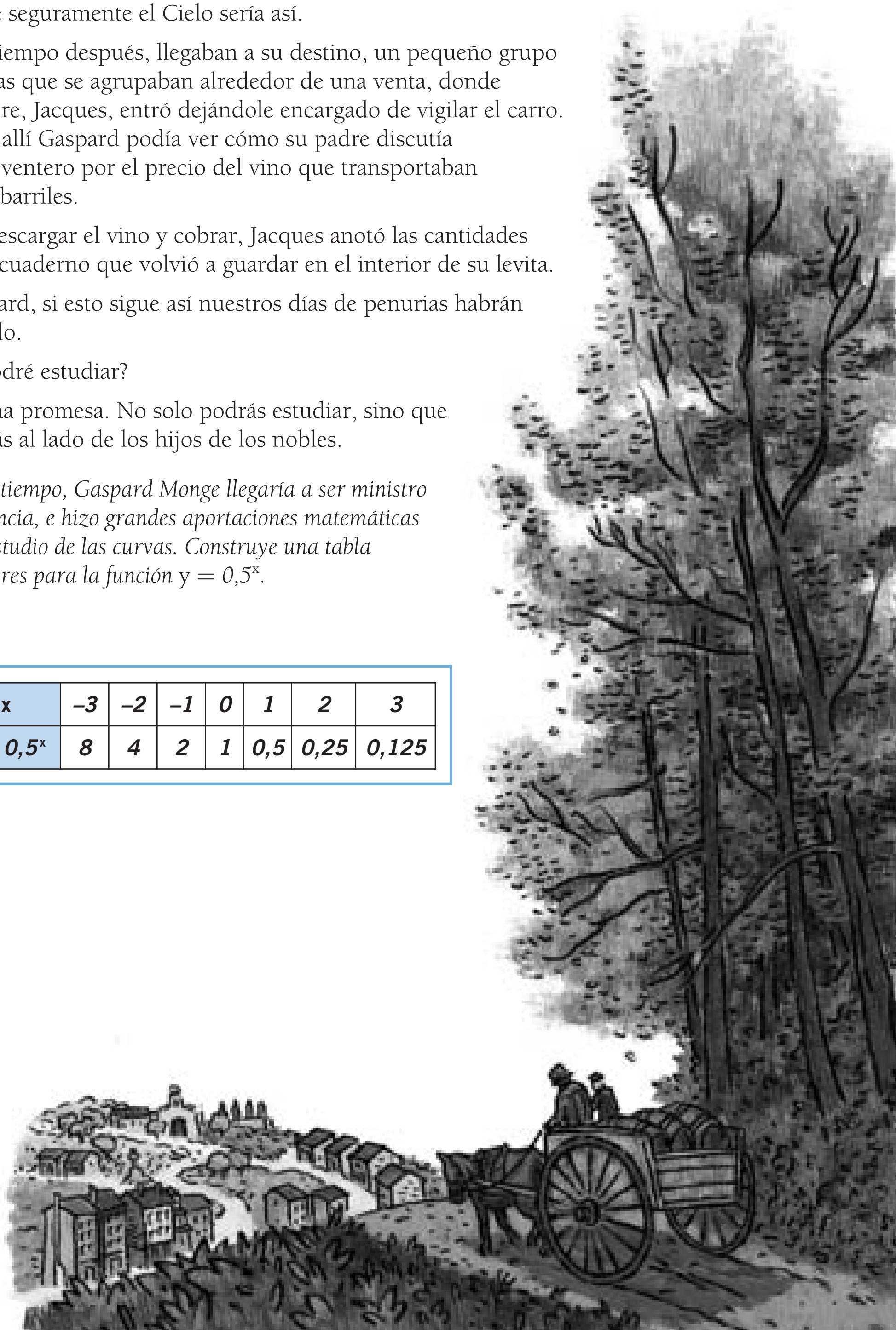
–Gaspard, si esto sigue así nuestros días de penurias habrán acabado.

–¿Y podré estudiar?

–Es una promesa. No solo podrás estudiar, sino que lo harás al lado de los hijos de los nobles.

Con el tiempo, Gaspard Monge llegaría a ser ministro de Francia, e hizo grandes aportaciones matemáticas en el estudio de las curvas. Construye una tabla de valores para la función $y = 0{,}5^x$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 0{,}5^x$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125



Funciones exponenciales y logarítmicas

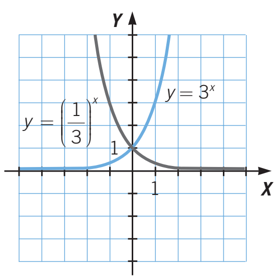
EJERCICIOS

001 **Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.**

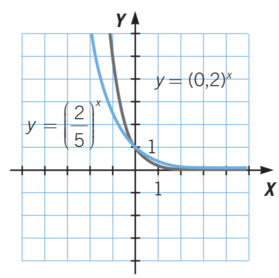
a) $y = 3^x$ **b)** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ **c)** $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$ **d)** $y = (0,2)^x$

	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
a)	$y = 3^x$	0,0123	0,037	0,111	0,333	1	3	9	27	81
b)	$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123
c)	$y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$	39,0625	15,625	6,25	2,5	1	0,4	0,16	0,064	0,0256
d)	$y = (0,2)^x$	625	125	25	5	1	0,2	0,04	0,008	0,0016

a) y b)



c) y d)

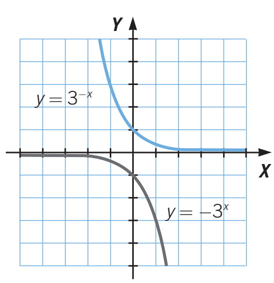


002 **Estudia y representa estas funciones.**

a) $y = -3^x$ **b)** $y = 3^{-x}$

	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
a)	$y = -3^x$	−0,0123	−0,037	−0,111	−0,333	−1	−3	−9	−27	−81
b)	$y = 3^{-x}$	81	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037	0,0123

a) y b)



003 **¿Qué ocurre si $a = 1$ en una función exponencial? ¿Y si $a < 0$?**

Si $a = 1$, la función exponencial es de la forma $y = 1^x = 1$, siendo una función constante igual a 1.

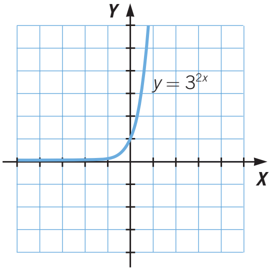
Y si $a < 0$, la función no está definida.

004 **Realiza una tabla de valores, y representa estas funciones exponenciales.**

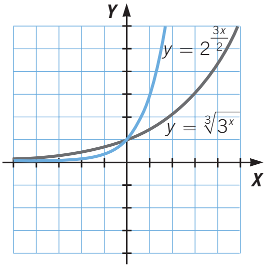
a) $y = 3^{2x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3^x}$ **c)** $y = 2^{\frac{3x}{2}}$

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = 3^{2x}$	0,0123	0,111	3	9	81
b)	$y = \sqrt[3]{3^x}$	0,48	0,693	1	1,442	2,08
c)	$y = 2^{\frac{3x}{2}}$	0,125	0,3536	1	2,828	8

a)



b) y c)

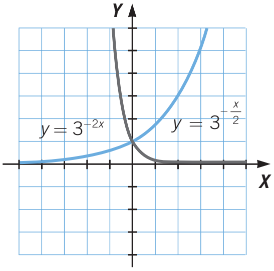


005 **Representa las funciones.**

a) $y = 3^{-2x}$ **b)** $y = 3^{-\frac{x}{2}}$

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = 3^{-2x}$	81	9	1	0,111	0,012
b)	$y = 3^{-\frac{x}{2}}$	3	1,732	1	0,577	0,333

a) y b)



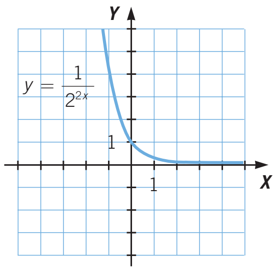
006 **Estudia y representa las funciones exponenciales.**

a) $y = \dfrac{1}{2^{2x}}$ **b)** $y = \dfrac{3^x}{2^{2x}}$

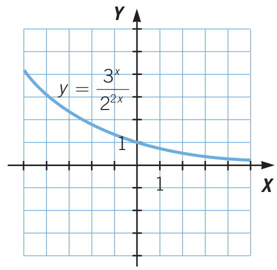
Razona si son decrecientes o no.

	x	−2	−1	0	1	2
a)	$y = \dfrac{1}{2^{2x}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625
b)	$y = \dfrac{3^x}{2^{2x}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$	1,777	1,333	1	0,75	0,5625

a)



b)

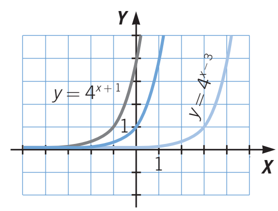


Las dos funciones son decrecientes, porque son funciones exponenciales con bases menores que 1.

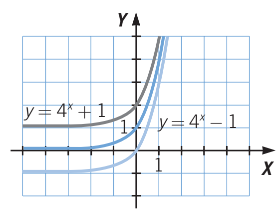
007 **Dibuja la gráfica de la función $y = 4^x$, y a partir de ella, representa estas funciones exponenciales sin realizar las tablas de valores.**

a) $y = 4^{x-3}$ **b)** $y = 4^{x+1}$ **c)** $y = 4^x + 1$ **d)** $y = 4^x - 1$

a) y b) La gráfica de la función $y = 4^{x-3}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 4^x$ tres unidades hacia la derecha, y la gráfica de la función $y = 4^{x+1}$, una unidad hacia la izquierda.



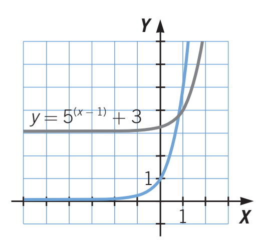
c) y d) La gráfica de la función $y = 4^x + 1$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 4^x$ una unidad hacia arriba, y la gráfica de la función $y = 4^x - 1$, una unidad hacia abajo.



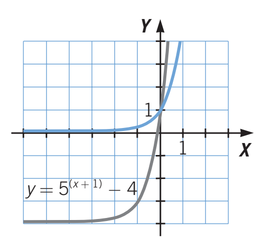
008 **Representa estas funciones ayudándote de la gráfica de la función $y = 5^x$.**

a) $y = 5^{(x-1)} + 3$ **b)** $y = 5^{(x+1)} - 4$

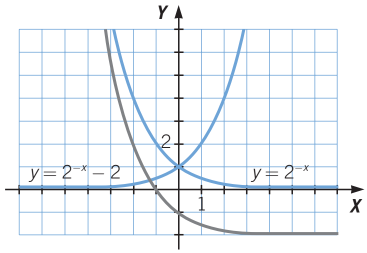
a) La gráfica de la función $y = 5^{(x-1)} + 3$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 5^x$ una unidad hacia la derecha y tres unidades hacia arriba.



b) La gráfica de la función $y = 5^{(x+1)} - 4$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 5^x$ una unidad hacia la izquierda y cuatro unidades hacia abajo.



009 **Representa $y = 2^{-x} - 2$ a partir de $y = 2^{x}$.**



010 **Halla el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 300 € a un rédito del 3,5 %.**

$$C_f = 300 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right)^5 = 300 \cdot (1{,}035)^5 = 356{,}30 \text{ €}$$

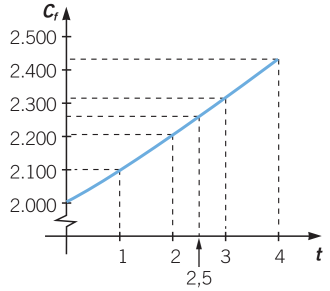
011 **Calcula, gráficamente, el capital que obtendremos al cabo de 2 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 2.000 € a un rédito del 5 %.**

$$C_f = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 2.000 \cdot (1{,}05)^t$$

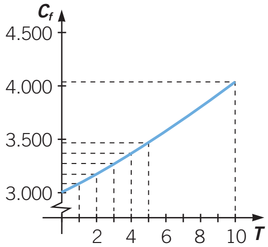
El capital, en cada instante, es una función exponencial.

t	0	1	2	3	4
$C_f = 2.000 \cdot (1{,}05)^t$	2.000	2.100	2.205	2.315,25	2.431,01

Para conocer cuál es el capital al cabo de 2 años y 6 meses hay que ver en la gráfica el valor correspondiente a $x = 2{,}5$; que es 2.260 €.



012 **La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido a interés compuesto. Calcula cuál es el capital que hemos invertido y explica cómo lo haces.**



En la gráfica se observa que se han invertido 3.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$.

013 **Calcula, mediante la definición, los logaritmos.**

a) $\log_2 8$ **b)** $\log_3 81$ **c)** $\log 1.000$

a) $\log_2 8 = x \rightarrow 2^x = 8$ y $8 = 2^3 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow \log_2 8 = 3$

b) $\log_3 81 = x \rightarrow 3^x = 81$ y $81 = 3^4 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow \log_3 81 = 4$

c) $\log 1.000 = x \rightarrow 10^x = 1.000 \rightarrow 10^x = 10^3 \rightarrow \log 1.000 = 3$

014 **Halla, mediante la definición, estos logaritmos.**

a) $\ln e^{-4}$ **b)** $\log 0{,}0001$ **c)** $\log_4 0{,}25$

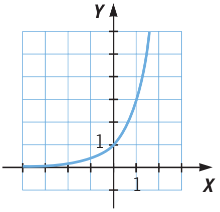
a) $\ln e^{-4} = x \rightarrow e^x = e^{-4} \rightarrow x = -4$

b) $\log 0{,}0001 = x \rightarrow 10^x = 0{,}0001 = \dfrac{1}{10.000} = 10^{-4} \rightarrow 10^x = 10^{-4} \rightarrow x = -4$

c) $\log_4 0{,}25 = x \rightarrow 4^x = 4^{-1} \rightarrow x = -1$

015 **Calcula, utilizando la gráfica de la función $y = 3^x$, el valor aproximado de $\log_3 2$.**

Como $\log_3 2$ es, en la gráfica de la función $y = 3^x$, el valor de la abscisa que le corresponde al valor 2 de la ordenada, entonces $\log_3 2 = 0{,}6$.



016 **Halla los logaritmos, aplicando sus propiedades y dejando indicado el resultado final.**

a) $\log_8 32$ **c)** $\log_3 100$ **e)** $\log_{32} 4$ **g)** $\log_6 1$

b) $\log_2 32$ **d)** $\log_5 32$ **f)** $\log_2 304$ **h)** $\log_7 7$

a) $\log_8 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 8} = \dfrac{5}{3}$

b) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

c) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} = \dfrac{2}{0{,}477} = 4{,}19$

d) $\log_5 32 = \log_5 2^5 = 5 \log_5 2 = 5 \cdot \dfrac{\log 2}{\log 5} = 2{,}15$

e) $\log_{32} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \log_2 16 \cdot 19 = \log_2 16 + \log_2 19 = 4 + \dfrac{\log 19}{\log 2} = 4 + 4{,}25 = 8{,}25$

g) $\log_6 1 = 0$

h) $\log_7 7 = 1$

017 **Sabiendo que log 2 = 0,3010, log 3 = 0,4771 y log 7 = 0,8451, calcula los logaritmos decimales de los primeros 10 números naturales. ¿Sabrías calcular log 3,5? ¿Y el logaritmo de 1,5?**

$\log 1 = 0 \qquad \log 2 = 0{,}3010 \qquad \log 3 = 0{,}4771$

$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}602$

$\log 5 = \log \dfrac{7}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}699$

$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$

$\log 7 = 0{,}8451 \qquad \log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0{,}903$

$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 0{,}9542 \qquad \log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log \dfrac{7}{2} = \log 7 - \log 2 = 0{,}8451 - 0{,}3010 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log \dfrac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$

018 **Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.**

$$\left.\begin{array}{l} \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = 2{,}322 \\[2ex] \log_5 2 = \dfrac{\log 2}{\log 5} = 0{,}4306 \end{array}\right\} \rightarrow \log_2 5 \cdot \log_5 2 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \cdot \dfrac{\log 2}{\log 5} = 1$$

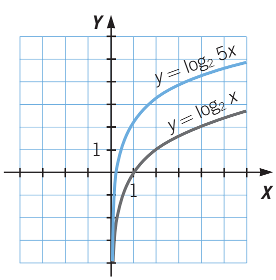
019 **Representa las siguientes funciones logarítmicas, ayudándote de la calculadora para encontrar los valores de puntos por los que pasan.**

a) $f(x) = \log_2 x$ **c)** $h(x) = \log \sqrt{x}$

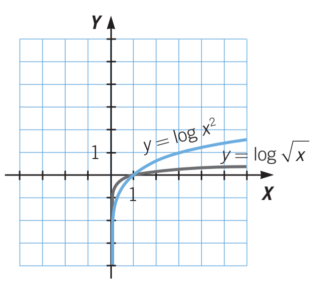
b) $g(x) = \log_2 5x$ **d)** $i(x) = \log x^2$

	x	1	2	4	6	8	10
a)	$f(x) = \log_2 x$	0	1	2	2,585	3	3,3219
b)	$g(x) = \log_2 5x$	2,3219	3,3219	4,3219	4,9069	5,3219	5,6439
c)	$h(x) = \log \sqrt{x}$	0	0,1505	0,3010	0,3890	0,4515	0,5
d)	$i(x) = \log x^2$	0	0,6020	1,2041	1,5563	1,8062	2

a) y b)



c) y d)

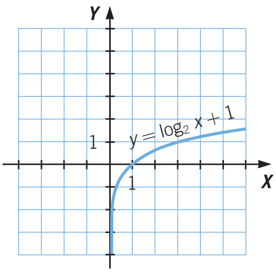


020 **Estudia y representa la siguiente función.**

$$y = \log_2 x + 1$$

El dominio es $\mathbb{R}^+$. La imagen es $\mathbb{R}$.

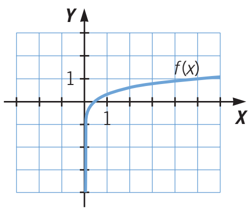
x	1	2	4	6	8	10
$f(x) = \log_2 x + 1$	1	2	3	3,585	4	4,3219



021 **Sin construir una tabla de valores, representa la función logarítmica $f(x) = \log 2x$.**

$\log 2x = \log 2 + \log x = 0{,}3010 + \log x$

Por tanto, para construir la gráfica de la función $f(x) = \log 2x$ hay que trasladar la gráfica de la función $\log x$ hacia arriba 0,3010 unidades.



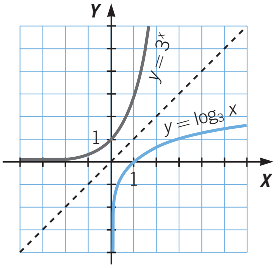
022 **Comprueba si los siguientes pares de funciones exponenciales y logarítmicas son o no funciones inversas.**

a) $y = 3^x$ $\quad y = \log_3 x$ **b)** $y = -x$ $\quad y = -\dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \log_2 x$ $\quad y = 2^x$

a)

x	-1	0	1	3
$y = 3^x$	0,3333	1	3	27
$y = \log_3 x$			0	1

Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.



b)

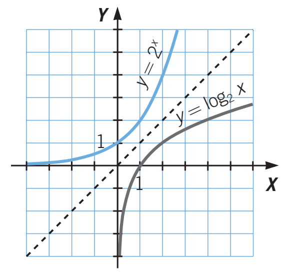
x	-2	-1	0	1	2
$y = -x$	2	1	0	-1	-2
$y = -\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{2}$	1		-1	$-\dfrac{1}{2}$

Estas funciones no son inversas, porque, por ejemplo, el punto $(-2, 2)$ pertenece a la función $y = -x$, y, sin embargo, el punto $(2, -2)$ no pertenece a la función $y = -\dfrac{1}{x}$.

c)

x	0	1	2	4
$y = \log_2 x$		0	1	2
$y = 2^x$	1	2	4	16

Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.



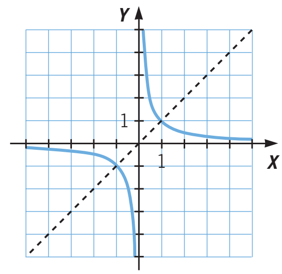
023 **Comprueba, sin representarlas, que la función $y = \log x$ es la inversa de $y = 10^x$.**

Sea un punto (a, b) que pertenezca a la función $y = \log x$.

$b = \log a \rightarrow 10^b = a \rightarrow (b, a)$ es un punto de la función $y = 10^x$.

024 **Según la definición de función inversa que hemos visto, ¿tiene inversa la función de proporcionalidad inversa $y = \dfrac{1}{x}$?**

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



La inversa de $y = \dfrac{1}{x}$ es la misma función.

ACTIVIDADES

025 ● **Con ayuda de la calculadora, halla los valores que toma la función $y = 2{,}5^x$ para estos valores de x.**

a) $x = -3$
b) $x = -2$
c) $x = -1$
d) $x = 0$
e) $x = 1$
f) $x = 2$
g) $x = 3$
h) $x = 4$
i) $x = -4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2{,}5^x$	0,0256	0,064	0,16	0,4	1	2,5	6,25	15,625	39,0625

026 ● **Copia y completa la tabla de valores para la función $y = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$.**

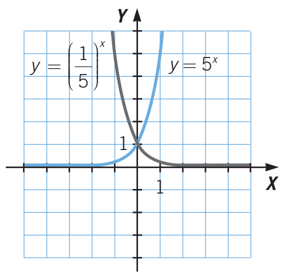
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$	0,1296	0,216	0,36	0,6	1	1,6667	2,7778	4,6296	7,7160

027 ●● **Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.**

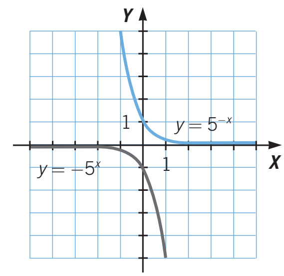
a) $y = 5^x$ b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $y = -5^x$ d) $y = 5^{-x}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 5^x$	0,04	0,2	1	5	25
b)	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	25	5	1	0,2	0,04
c)	$y = -5^x$	$-0{,}04$	$-0{,}2$	-1	-5	-25
d)	$y = 5^{-x}$	25	5	1	0,2	0,4

a) y b)



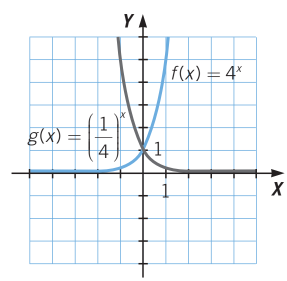
c) y d)



028 ●● **Analiza las semejanzas y diferencias de estas funciones exponenciales.**

$$f(x) = 4^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16
$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	0,25	0,0625

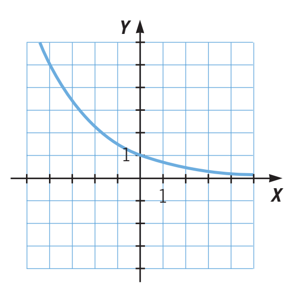


Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas. El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$. Las gráficas de ambas funciones son continuas. La función $f(x)$ es creciente y la función $g(x)$ es decreciente.

029 ● **Estudia y representa la función exponencial.**

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	2,25	1,5	1	0,67	0,4



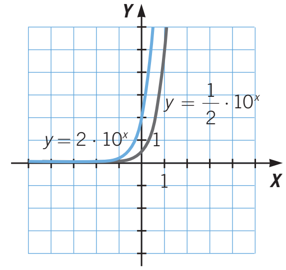
La función es continua en $\mathbb{R}$, su recorrido es $(0, +\infty)$, y es monótona decreciente.

030 ● **Haz una tabla de valores de las funciones.**

a) $y = 2 \cdot 10^x$ **b)** $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$

Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y enumera sus propiedades.

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 2 \cdot 10^x$	0,02	0,2	2	20	200
b)	$y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$	0,005	0,05	0,5	5	50



El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.

Las gráficas de ambas funciones son continuas y crecientes.

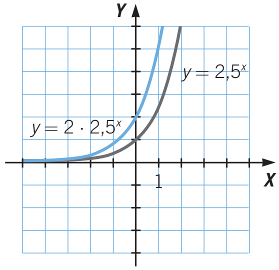
La gráfica de la función $y = 2 \cdot 10^x$ corta al eje de ordenadas en el punto (0, 2), y la gráfica de $y = \frac{1}{2} \cdot 10^x$ lo corta en (0; 0,5).

031 ● **Representa gráficamente y enumera las propiedades de las funciones.**

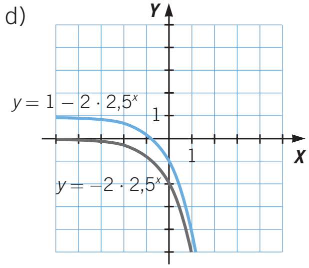
a) $y = 2{,}5^x$ **b)** $y = 2 \cdot 2{,}5^x$ **c)** $y = -2 \cdot 2{,}5^x$ **d)** $y = 1 - 2 \cdot 2{,}5^x$

	x	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1
a)	$y = 2{,}5^x$	0,4	0,63	0,8	1	1,3	1,58	2,5
b)	$y = 2 \cdot 2{,}5^x$	0,8	1,26	1,6	2	2,6	3,16	5
c)	$y = -2 \cdot 2{,}5^x$	−0,8	−1,26	−1,6	−2	−2,6	−3,16	−5
d)	$y = 1 - 2 \cdot 2{,}5^x$	0,2	−0,26	−0,6	−1	−1,6	−2,16	−4

a) y b)

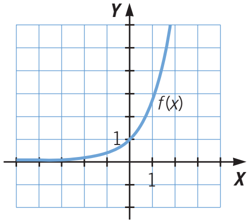


c) y d)



032 ●● **Representa la función $y = e^x$. Recuerda que el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es $e = 2{,}718281...$**

La gráfica $f(x) = e^x$ es:



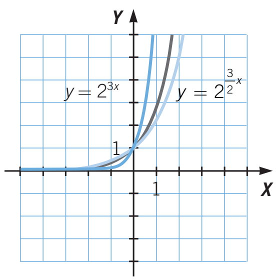
033 ●●

Representa las siguientes funciones de tipo exponencial.

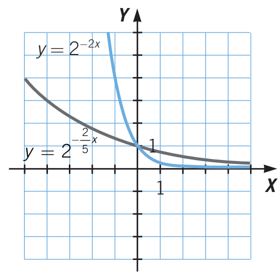
a) $y = 2^{3x}$ **b)** $y = 2^{\frac{3}{2}x}$ **c)** $y = 2^{-2x}$ **d)** $y = 2^{-\frac{2}{5}x}$

	x	-2	-1	0	1	2
a)	$y = 2^{3x}$	0,015625	0,125	1	8	64
b)	$y = 2^{\frac{3}{2}x}$	0,125	0,3536	1	2,8284	8
c)	$y = 2^{-2x}$	16	4	1	0,25	0,0625
d)	$y = 2^{-\frac{2}{5}x}$	1,7411	1,3195	1	0,7579	0,5744

a) y b)



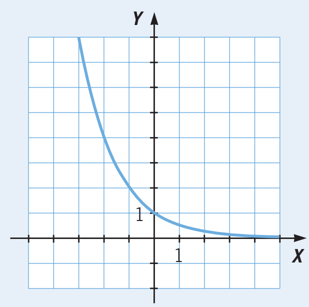
c) y d)



034 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL A PARTIR DE SU GRÁFICA?

Determina la expresión algebraica de esta función exponencial.



PRIMERO. Se determina uno de los puntos, distinto del punto (0, 1), por el que pasa la gráfica.

En este caso, la gráfica pasa por el punto (−2, 4).

SEGUNDO. Se sustituyen estas coordenadas en la expresión algebraica de la función exponencial.

$$y = a^x \xrightarrow{x = -2,\ y = 4} 4 = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

TERCERO. Se calcula el valor de a.

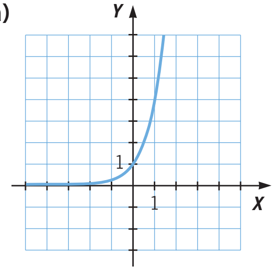
$$4 = \frac{1}{a^2} \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

CUARTO. No se considera la solución negativa, pues en una función exponencial sucede que $a > 0$.

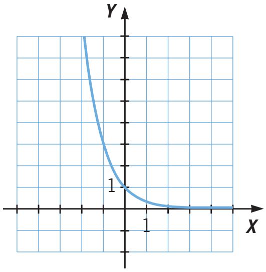
La expresión algebraica de la función es $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

035 Determina la expresión algebraica de estas funciones exponenciales.

a)



b)

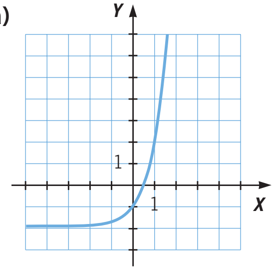


a) $y = 4^x$

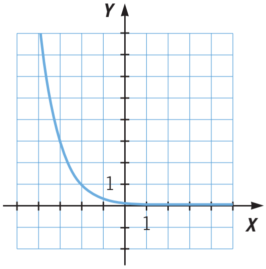
b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

036 Halla la expresión algebraica de las funciones.

a)



b)



a) $y = 4^x - 2$

b) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

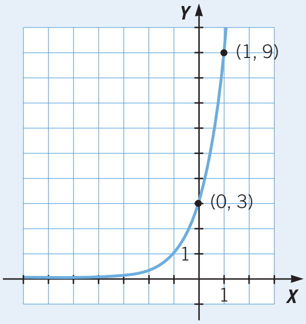
037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL, CONOCIENDO ALGUNAS DE SUS CARACTERÍSTICAS?

Dibuja la gráfica de una función exponencial del tipo $y = a^{(x+b)}$ que es creciente, no corta el eje X y pasa por los puntos (0, 3) y (1, 9).

PRIMERO. Se representan los puntos por los que pasa la función.

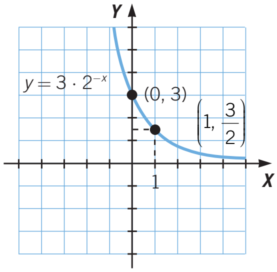
SEGUNDO. Si la función es creciente, la parte situada junto al eje X será la parte izquierda de la gráfica. Y si es decreciente, será su parte derecha.



038 Dibuja la gráfica de una función exponencial que verifique estas condiciones.

- Ser decreciente.
- Cortar al eje *Y* en el punto (0, 3).
- No cortar al eje *X* en ningún punto.
- Pasar por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

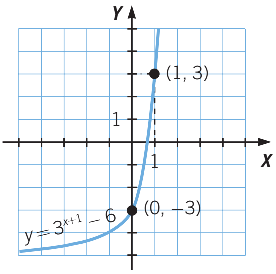
Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



039 Realiza la gráfica de una función exponencial que tenga las siguientes propiedades.

- Es creciente.
- Corta al eje *Y* en el punto (0, −3).
- Pasa por el punto (1, 3).

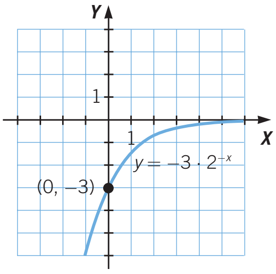
Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



040 Construye la gráfica de la función exponencial que tiene estas propiedades.

- Es creciente.
- Corta al eje *Y* en el punto (0, −3).
- No corta al eje *X*.

Conociendo la forma que tiene la gráfica de la función exponencial, y teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, una posible gráfica sería:



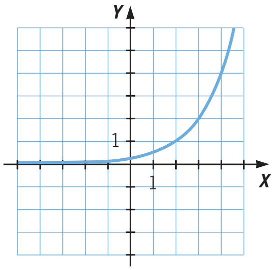
041 Representa estas funciones.

a) $y = 2^{x-2}$ b) $y = 2^x - 2$ c) $y = -2^x + 5$ d) $y = -2^{-x+1}$

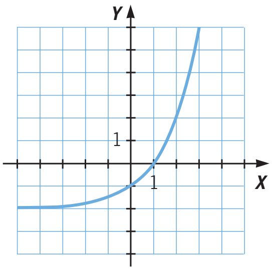
Estas funciones se pueden representar trasladando las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = -2^x$.

x	−2	−1	0	1	2
$y = 2^x$	0,25	0,5	1	2	4
$y = -2^x$	−0,25	−0,5	−1	−2	−4

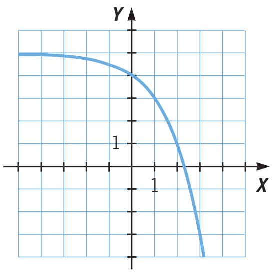
a) La gráfica de la función $y = 2^{x-2}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 2^x$ dos unidades a la derecha.



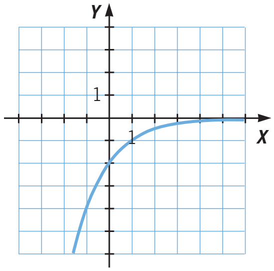
b) La gráfica de la función $y = 2^x - 2$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 2^x$ dos unidades hacia abajo.



c) La gráfica de la función $y = -2^x + 5$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -2^x$ cinco unidades hacia arriba.



d) La gráfica de la función $y = -2^{-x+1}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -2^{-x}$ una unidad a la derecha.



042 Estudia y representa las funciones.

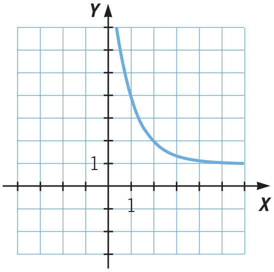
a) $y = 3^{-x+2} + 1$ c) $y = 3^{x-1} - 5$ e) $y = 2 - 3^x + \frac{2}{3}$

b) $y = 3 - 3^{x+\frac{2}{3}}$ d) $y = \frac{2}{3} - 3^{x+3}$ f) $y = 1 - \frac{1}{3} + 4^x$

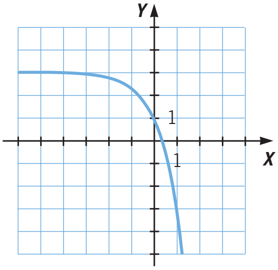
Estas funciones se pueden representar trasladando las gráficas de las funciones $y = 3^x$, $y = -3^x$, $y = 3^{-x}$ e $y = 4^x$.

x	−2	−1	0	1	2
$y = 3^x$	0,111	0,333	1	3	9
$y = -3^x$	−0,111	−0,333	−1	−3	−9
$y = 3^{-x}$	9	3	1	0,333	0,111
$y = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16

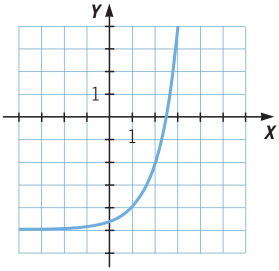
a) La gráfica de la función $y = 3^{-x+2} + 1$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 3^{-x}$ dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.



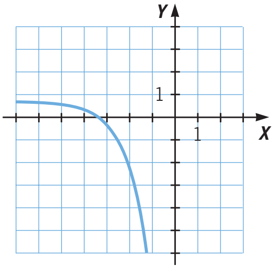
b) La gráfica de la función $y = 3 - 3^{x+\frac{2}{3}}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -3^x$ en $\frac{2}{3}$ hacia la izquierda y tres unidades hacia arriba.



c) La gráfica de la función $y = 3^{x-1} - 5$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = 3^x$ una unidad hacia la derecha y cinco unidades hacia abajo.



d) La gráfica de la función $y = \frac{2}{3} - 3^{x+3}$ se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = -3^x$ tres unidades hacia la izquierda y $\frac{2}{3}$ hacia arriba.

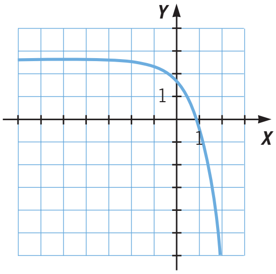


e) La gráfica de la función

$y = 2 - 3^x + \frac{2}{3} = -3^x + \frac{8}{3}$

se obtiene trasladando la gráfica de la función

$y = -3^x$ en $\frac{8}{3}$ hacia arriba.

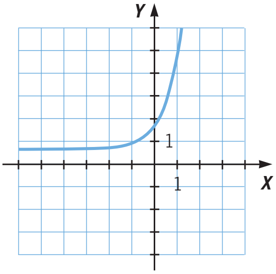


f) La gráfica de la función

$y = 1 - \frac{1}{3} + 4^x = \frac{2}{3} + 4^x$

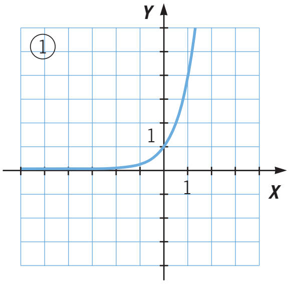
se obtiene trasladando la gráfica de la función

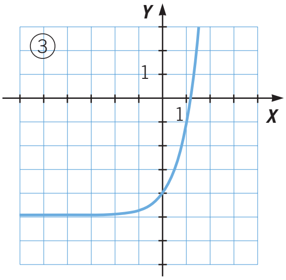
$y = 4^x$ en $\frac{2}{3}$ hacia arriba.

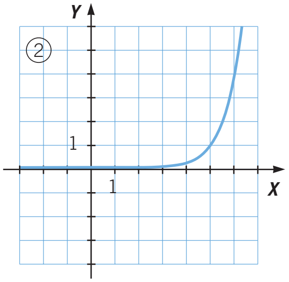


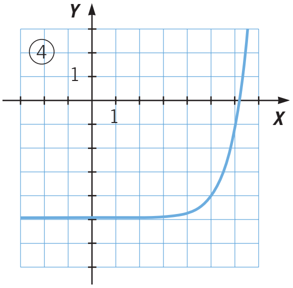
043 Relaciona cada función con su gráfica.

a) $f(x) = 4^x$ b) $g(x) = 4^x - 5$ c) $h(x) = 4^{x-5}$ d) $i(x) = 4^{x-5} - 5$









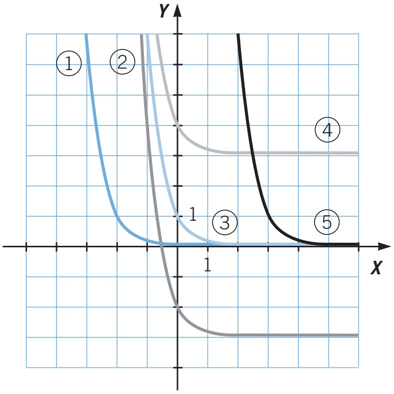
La gráfica de la función $f(x) = 4^x$ se corresponde con la gráfica ①.

La gráfica de la función $g(x) = 4^x - 5$ se corresponde con la gráfica ②.

La gráfica de la función $h(x) = 4^{x-5}$ se corresponde con la gráfica ③.

La gráfica de la función $i(x) = 4^{x-5} - 5$ se corresponde con la gráfica ④.

044 Las gráficas de estas funciones son traslaciones de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.



Identifícala y escribe la expresión algebraica que corresponde a cada una de las gráficas.

La gráfica ① es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+2}$

La gráfica ② es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x} - 3$

La gráfica ③ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x}$

La gráfica ④ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}$

La gráfica ⑤ es: $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{x} + 3$

045 **Decide cuáles de las siguientes funciones son crecientes y cuáles son decrecientes sin representarlas. Explica cómo lo haces.**

a) $y = \dfrac{2^{2x}}{3^x}$

b) $y = -2^{x+5}$

c) $y = \dfrac{2^{-2x}}{3^x}$

d) $y = 2^{-x+5}$

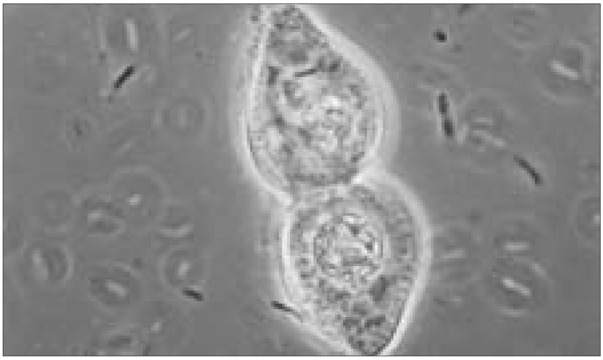
a) $y = \dfrac{2^{2x}}{3^x} = \dfrac{4^x}{3^x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x \rightarrow$ La función es creciente, pues la base es $\dfrac{4}{3} > 1$.

b) $y = -2^{x+5} = -2^5 \cdot 2^x \rightarrow$ La función es decreciente.

c) $y = \dfrac{2^{-2x}}{3^x} = \dfrac{1}{2^{2x} \cdot 3^x} = \dfrac{1}{12^x} = \left(\dfrac{1}{12}\right)^x \rightarrow$ La función es decreciente.

d) $y = 2^{-x+5} = 2^5 \cdot 2^{-x} = 2^5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \rightarrow$ La función es decreciente.

046 **Una especie de paramecio se reproduce por bipartición, completando su ciclo reproductivo cada hora.**



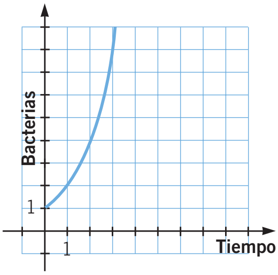
a) Calcula la expresión de la función que relaciona los paramecios, *y*, que hay en función del tiempo, *t*, en horas, que ha transcurrido desde que el primero comienza a dividirse.

b) Representa la función.

a) La función que relaciona el número de bacterias, y, con el tiempo que ha transcurrido desde que empezó a dividirse, t, es $y = 2^t$.

b)

t	0	1	2
$y = 2^t$	1	2	4



Aunque dibujamos la gráfica continua, esta gráfica tiene sentido solo para valores naturales de la variable y.

047 **Calcula el capital que obtendríamos en los 5 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 30.000 € a un rédito del 3,65 %.**

$$C_f = 30.000 \cdot \left(1 + \frac{3,65}{100}\right)^t = 30.000 \cdot (1,0365)^t$$

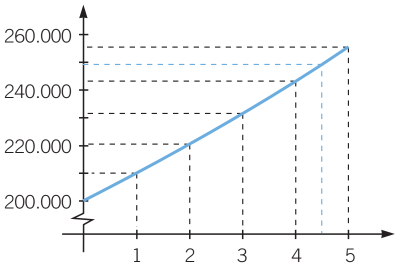
t	0	1	2	3	4	5
$C_f = 30.000 \cdot (1,0365)^t$	30.000	31.095	32.230	33.406	34.626	35.890

048 **Halla gráficamente el capital que tendremos al cabo de 4 años y 6 meses al invertir, a interés compuesto, 200.000 € a un rédito del 5 %.**

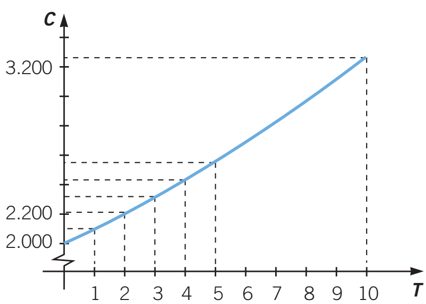
$$C_f = 200.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t = 200.000 \cdot (1{,}05)^t$$

t	0	1	2	3	4	5
$C_f = 200.000 \cdot (1{,}05)^t$	200.000	210.000	220.500	231.525	243.101	255.256

Si queremos saber cuál será el capital al cabo de 4 años y 6 meses tendremos que hallar, en la gráfica, el valor de la ordenada correspondiente al valor 4,5 de la abscisa. Observando la gráfica se ve que el capital es 249.178 €.



049 **La siguiente gráfica muestra la evolución de un capital invertido, en €, a interés compuesto. Calcula cuál es el capital invertido y explica cómo lo haces.**



¿Cuánto tiempo, en años, es necesario mantener la inversión para duplicar el capital?

Observando la gráfica se ve que se han invertido 2.000 €, porque es el valor que le corresponde a $t = 0$. Además, para $t = 1$ el capital es 2.100 €, luego el rédito es del 5 %, y para duplicar el capital, como la gráfica es exponencial, y crece cada vez más deprisa, podemos calcular que se obtendrán 4.000 € en 14 años aproximadamente.

Si queremos calcularlo de forma exacta usamos logaritmos:

$$4.000 = 2.000 \cdot (1{,}05)^t \rightarrow 2 = (1{,}05)^t \rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}20 \text{ años}$$

050 **Calcula, mediante su definición, los siguientes logaritmos.**

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1.000.000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$
b) $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$
c) $\log 1.000.000 = \log 10^6 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = \log 10^{-5} = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = \log_4 4^{-2} = -2$

051 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN ALGUNOS LOGARITMOS UTILIZANDO SUS PROPIEDADES?

Calcula $\log_2 24$ si $\log_2 3 = 1{,}5850$.

PRIMERO. Se descompone el número en factores primos.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

SEGUNDO. Se aplican las propiedades del logaritmo de un producto.

$$\log_2 24 = \log_2 (2^3 \cdot 3) = \log_2 2^3 + \log_2 3 = 3 + \log_2 3 = 4{,}5850$$

052 **Halla $\log_3 24$ utilizando las propiedades de los logaritmos.**

$$\log_3 24 = \log_3 (2^3 \cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3 \log_3 2 + 1 =$$
$$= 3 \cdot 0{,}6309 + 1 = 2{,}8927$$

053 **Calcula $\log_4 256$, mediante las propiedades de los logaritmos, y da un resultado exacto.**

$$\log_4 256 = \log_4 2^8 = \log_4 (2^2)^4 = \log_4 4^4 = 4$$

054 **Halla el resultado de estas expresiones, utilizando las propiedades de los logaritmos.**

a) $2 \log_4 16 + \log_2 32 - 3 \log_7 49$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2 \log_4 4^2 + \log_2 2^5 - 3 \log_7 7^2 = 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 3$
b) $\log_2 2^3 + \log_3 3^3 + \log_5 5^3 = 3 + 3 + 3 = 9$
c) $\log_5 5^4 - \log_9 9^2 + \log_8 8^2 = 4 - 2 + 2 = 4$

055 **Desarrolla las siguientes expresiones.**

a) $\log_3 \dfrac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$ **b)** $\log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$ **c)** $\log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{y^2 \cdot z^3}}$

a) $\log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 = 2\log_3 a + 5\log_3 b + \log_3 c - 2\log_3 d$

b) $\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt[5]{b^6} - \log_2 \sqrt[3]{c^7} = 3\log_2 a + \dfrac{6}{5}\log_2 b - \dfrac{7}{3}\log_2 c$

c) $\log_{10} x + \log_{10} \sqrt{x} - \log_{10} \sqrt{y^2} - \log_{10} \sqrt{z^3} =$

$= \log_{10} x + \dfrac{1}{2}\log_{10} x - \log_{10} y - \dfrac{3}{2}\log_{10} z =$

$= \dfrac{3}{2}\log_{10} x - \log_{10} y - \dfrac{3}{2}\log_{10} z$

056 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN LOGARITMO MEDIANTE UN CAMBIO DE BASE?

Calcula $\log_3 4$, sabiendo que $\log_2 3 = 1{,}5850$.

PRIMERO. Se realiza un cambio de base.

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$

SEGUNDO. Se sustituyen el numerador y el denominador por sus valores.

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = \frac{2}{1{,}5850} = 1{,}2618$$

057 **Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale $\ln 10$?**

$$\log e \cdot \ln 10 = 1 \rightarrow \ln 10 = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3026$$

058 **Expresa en función de logaritmos neperianos, y obtén el resultado con la calculadora.**

a) $\log_5 36^2$ **b)** $\log_2 \sqrt{31}$ **c)** $\log_6 100$ **d)** $\log_4 31^5$

a) $\log_5 36^2 = \log_5 6^4 = 4 \cdot \dfrac{\ln 6}{\ln 5} = 4{,}4531$

b) $\log_2 \sqrt{31} = \log_2 31^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 31 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\ln 31}{\ln 2} = 2{,}4771$

c) $\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2\log_6 10 = 2 \cdot \dfrac{\ln 10}{\ln 6} = 2{,}5702$

d) $\log_4 31^5 = 5\log_4 31 = 5 \cdot \dfrac{\ln 31}{\ln 4} = 12{,}3855$

059 ●●● **Si el valor del logaritmo decimal de 2 es 0,3010; calcula el valor de los siguientes logaritmos decimales.**

a) log 20 **c) log 1.250** **e) log 0,2**

b) log 0,125 **d) log 1,6** **f) log 0,04**

a) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0{,}3010 + 1 = 1{,}3010$

b) $\log 0{,}125 = \log 2^{-3} = -3 \log 2 = (-3) \cdot 0{,}3010 = -0{,}903$

c) $\log 1.250 = \log (10 \cdot 5^3) = \log 10 + \log 5^3 = 1 + 3 \log 5 =$
$= 1 + 3 \cdot 0{,}699 = 3{,}097$

d) $\log 1{,}6 = \log \dfrac{16}{10} = \log 16 - \log 10 = \log 2^4 - 1 = 4 \log 2 - 1 =$
$= 4 \cdot 0{,}3010 - 1 = 0{,}204$

e) $\log 0{,}2 = \log \dfrac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1 = -0{,}699$

f) $\log 0{,}04 = \log \dfrac{4}{100} = \log 4 - \log 100 = \log 2^2 - \log 10^2 =$
$= 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0{,}3010 - 2 = -1{,}398$

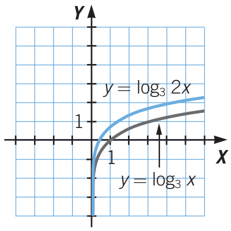
060 ● **Representa las siguientes funciones logarítmicas, ayudándote de la calculadora.**

a) $f(x) = \log_3 x$ **c)** $h(x) = \log \sqrt[5]{x}$

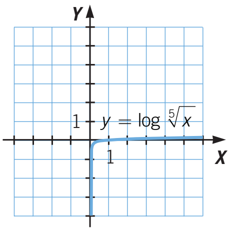
b) $g(x) = \log_3 2x$ **d)** $i(x) = \log_2 x^2$

	x	1	2	4	6	8	10
a)	$f(x) = \log_3 x$	0	0,6309	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959
b)	$g(x) = \log_3 2x$	0,6309	1,2619	1,8928	2,2619	2,5237	2,7268
c)	$h(x) = \log \sqrt[5]{x} = \dfrac{1}{5} \log x$	0	0,0602	0,1204	0,1556	0,1806	0,2
d)	$i(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 x$	0	2	4	5,1699	6	6,6439

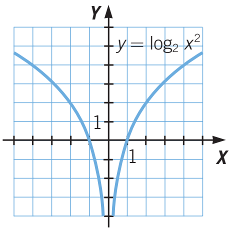
a) y b)



c)



d)



Observamos que $i(x)$ es una función simétrica respecto del eje de ordenadas por ser una función par; y como $\log_2 x^2 = \log_2 (-x)^2$, existe para valores negativos.

061 Haz una tabla de valores correspondiente a la función $y = \log_4 x$. Representa la función y estudia sus propiedades.

x	1	2	4	6	8	10
$y = \log_4 x$	0	0,5	1	1,2	1,5	1,6

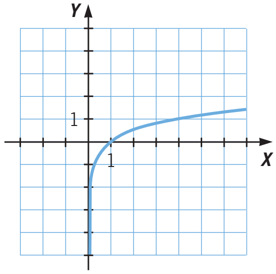
La función $y = \log_4 x$ verifica que:

– Dom $f = (0, +\infty)$

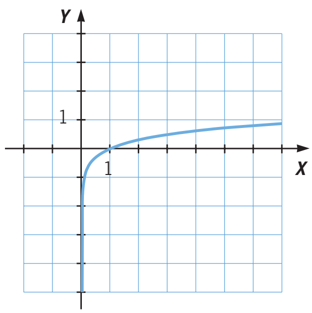
– La imagen de 1 es 0: $\log_4 1 = 0$

– La imagen de 4 es 1: $\log_4 4 = 1$

– La función es creciente porque $4 > 1$.



062 Esta gráfica pertenece a $y = \log x$.



Dibuja las gráficas de estas funciones a partir de ella.

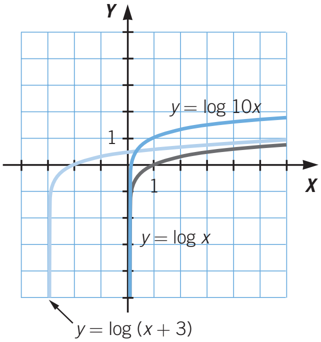
a) $y = \log 10x$

b) $y = \log (x + 3)$

a) $y = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + \log x$

La gráfica de la función $y = \log 10x$ se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \log x$ una unidad hacia arriba.

b) La gráfica de la función $y = \log (x + 3)$ se obtiene desplazando la gráfica de la función $y = \log x$ tres unidades a la izquierda.



063 Representa estas funciones logarítmicas sobre los mismos ejes de coordenadas.

a) $y = \log_3 x$

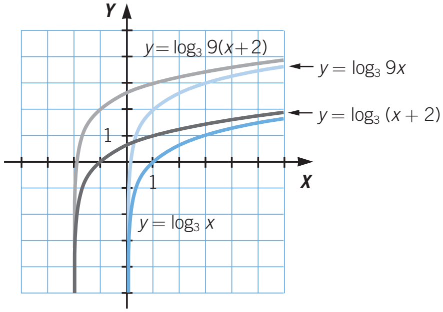
b) $y = \log_3 9x$

c) $y = \log_3 (x + 2)$

d) $y = \log_3 9(x + 2)$

Halla la relación existente entre sus gráficas.

	x	1	2	4	6	8	10
a)	$y = \log_3 x$	0	0,6309	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959
b)	$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x$	2	2,6309	3,2619	3,6309	3,8928	4,0959
c)	$y = \log_3 (x + 2)$	1	1,2619	1,6309	1,8928	2,0959	2,2619
d)	$y = \log_3 9(x + 2) = 2 + \log_3 (x + 2)$	3	3,2619	3,6309	3,8928	4,0959	4,2619

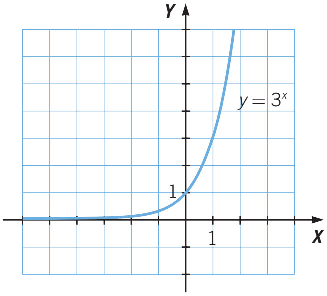


La función $y = \log_3 9x$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 x$ dos unidades hacia arriba.

La función $y = \log_3 (x + 2)$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 x$ tres unidades hacia la izquierda.

La función $y = \log_3 9(x + 2)$ se obtiene trasladando la función $y = \log_3 (x + 2)$ dos unidades hacia arriba.

064 Calcula el valor aproximado de $\log_3 \frac{3}{2}$, utilizando la gráfica de la función $y = 3^x$.



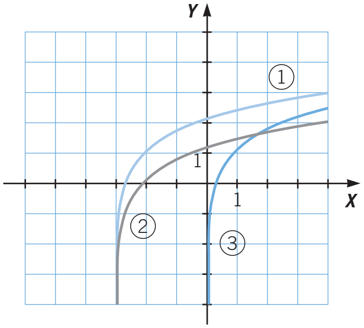
$$\log_3 \frac{3}{2} = \log_3 1{,}5 \simeq 0{,}4$$

065 ●●● **Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.**

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln(x + 3)$

c) $y = \ln 3(x + 3)$



a) Gráfica 3

b) Gráfica 2

c) Gráfica 1

066 ●●● **Comprueba, gráfica y analíticamente, si los siguientes pares de funciones son inversos entre sí. Justifica tu respuesta.**

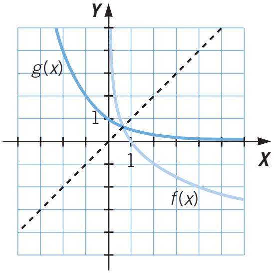
a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

b) $h(x) = 3x - 2$ y $t(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

a)

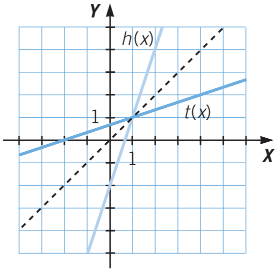
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$				0	-1	$-1{,}5850$	-2
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y, por tanto, son inversas.



b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x) = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4	7	10
$t(x) = \frac{x+2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2



Estas funciones son inversas, porque las gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

067 ¿Para cuáles de los siguientes valores de p y q se verifica la igualdad $\log (p + q) = \log p + \log q$?

a) $p = q = 0$ o $p = q = 1$

b) $p = \dfrac{q^2}{1 - q}$

c) $p = \dfrac{q}{1 - q}$

d) $p = \dfrac{q}{q + 1}$

$\log p + \log q = \log (p \cdot q)$

$\log (p + q) = \log p + \log q \xrightarrow{\log p + \log q = \log (p \cdot q)} \log (p + q) = \log (p \cdot q)$

$\rightarrow p + q = p \cdot q \rightarrow p - p \cdot q = -q \rightarrow p \cdot (1 - q) = -q \rightarrow p = \dfrac{-q}{1 - q}$

a) $p = q = 0$ es imposible, porque el logaritmo de 0 no existe.

$p = q = 1 \rightarrow \log (p + q) = \log p + \log q$

$\rightarrow \log (1 + 1) \neq \log 1 + \log 1 \rightarrow \log 2 \neq 0$

b) $p = \dfrac{q^2}{1 - q} \rightarrow \dfrac{q^2}{1 - q} = \dfrac{-q}{1 - q} \rightarrow q^2 = -q \rightarrow q^2 + q = 0$

$\rightarrow \begin{cases} q = 0 \longrightarrow \text{Solución no válida} \\ q = -1 \rightarrow \text{Solución no válida} \end{cases}$

c) $p = \dfrac{q}{1 - q} \rightarrow \dfrac{q}{1 - q} = \dfrac{-q}{1 - q} \rightarrow q = -q \rightarrow q + q = 0 \rightarrow q = 0$

$\rightarrow$ Solución no válida

d) $p = \dfrac{q}{q + 1} \rightarrow \dfrac{q}{q + 1} = \dfrac{-q}{1 - q} \rightarrow q(1 - q) = -q(1 + q)$

$\rightarrow q = 0 \rightarrow$ Solución no válida

Aunque operando en cada caso aparecen soluciones, estas soluciones no son válidas al sustituir en la ecuación logarítmica.

068 Averigua cuál de estas afirmaciones es verdadera si $x > 0$.

a) $\log (1 + x) < \dfrac{x}{1 + x}$

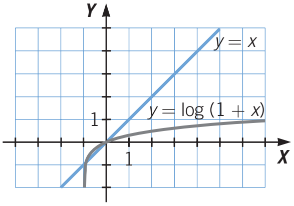
b) $\log (1 + x) < x$

c) $\log (1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$

a) Es falso, pues para $x = 99$: $\log (1 + 99) = 2 > \dfrac{99}{100}$

b) Para comprobarlo representamos las funciones $y = \log (1 + x)$, $y = x$.

Así, comprobamos que, para $x > 0$, la recta $y = x$ siempre está por encima de la función logarítmica $y = \log (1 + x)$.



c) Es falso, porque para $x = 1$:

$\log (1 + 1) = 0{,}3010 < \dfrac{1}{1 + 1} = 0{,}5$

069 **Escribe cuántas cifras tiene el número $4^{16} \cdot 5^{25}$ escrito en el sistema decimal.**

El número de cifras es igual a la parte entera del logaritmo decimal más uno.

$\log 4^{16} = 16 \log 4 = 16 \cdot 0{,}60206 = 9{,}63$; por lo que 4^{16} tiene 10 cifras.

$\log 5^{25} = 25 \log 5 = 25 \cdot 0{,}69897 = 17{,}47$; por lo que 5^{25} tiene 18 cifras.

070 **Calcula el valor de *a*, sabiendo que *a* y *b* son números positivos que verifican que $a^b = b^a$ y $b = 9a$.**

$$\left.\begin{array}{l} a^b = b^a \\ b = 9a \end{array}\right\} \xrightarrow{b = 9a} a^{9a} = (9a)^a \rightarrow a^{9a} = 9^a \cdot a^a \rightarrow a^{8a} = 9^a \rightarrow a^8 = 9 \rightarrow a = \sqrt[4]{3}$$

$$b = 9a \xrightarrow{a = \sqrt[4]{3}} b = 9 \cdot \sqrt[4]{3}$$

071 **La suma de las cifras del número $(10^{2.009n} + 1)^2$, siendo $n > 0$, no es un número extraordinariamente grande. ¿Crees que la suma de las cifras de ese número depende de *n*? ¿Cuánto vale exactamente?**

$(10^{2.009n} + 1)^2 = 10^{4.018n} + 2 \cdot 10^{2.009n} + 1$

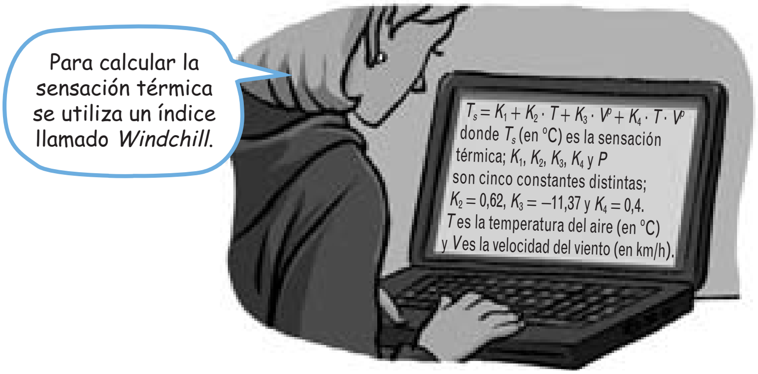
Considerando que *n* es un número entero positivo, la suma de las cifras no depende del valor de *n*.

La suma de las cifras de cada sumando es: $1 + 2 + 1 = 4$

EN LA VIDA COTIDIANA

072 **Como habrás observado, a la misma temperatura no todos sentimos igualmente el frío o el calor. Por ejemplo, a una temperatura de 2 °C sentirás más frío si sopla un viento fuerte que si no hay viento. Este fenómeno se llama sensación térmica y depende de cada persona.**

Belén tiene una beca para estudiar en Moscú y está preocupada por la intensidad del frío en esa ciudad. Para calcular la sensación térmica en zonas frías, los parámetros que se tienen en cuenta son la temperatura y la velocidad del viento, siempre que la temperatura sea menor que 5 °C y la velocidad de viento sea mayor que 5 km/h.



En Internet, Belén no ha encontrado los valores de K_1 y P, pero sí ha localizado en los periódicos estos datos para determinarlos.

Día	T (°C)	V (km/h)	T_S
Lunes	−13	40	−24,8
Miércoles	−15	35	−26,9
Viernes	−7	55	−18,1

Si esta mañana ha escuchado por la radio que la sensación térmica en Moscú es de −7 °C, ¿cuál es la temperatura?

Tomando el sistema de ecuaciones obtenido con los datos del lunes, del miércoles y del viernes tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}-24,8 = k_1 + 0,62 \cdot (-13) + (-11,37) \cdot 40^p + 0,4 \cdot (-13) \cdot 40^p\\ -26,9 = k_1 + 0,62 \cdot (-15) + (-11,37) \cdot 35^p + 0,4 \cdot (-15) \cdot 35^p\\ -18,1 = k_1 + 0,62 \cdot (-7) + (-11,37) \cdot 55^p + 0,4 \cdot (-7) \cdot 55^p\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}-24,8 = k_1 - 8,06 - 16,57 \cdot 40^p\\ -26,9 = k_1 - 9,3 - 17,37 \cdot 35^p\\ -18,1 = k_1 - 4,34 - 14,17 \cdot 55^p\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}-16,74 = k_1 - 16,57 \cdot 40^p\\ -17,6 = k_1 - 17,37 \cdot 35^p\\ -13,76 = k_1 - 14,17 \cdot 55^p\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}-16,74 = k_1 - 16,57 \cdot 40^p\\ -17,6 = k_1 - 17,37 \cdot 35^p\end{array}\right\}$$
$$0,86 = -16,57 \cdot 40^p + 17,37 \cdot 35^p$$

$$\left.\begin{array}{l}-16,74 = k_1 - 16,57 \cdot 40^p\\ -13,76 = k_1 - 14,17 \cdot 55^p\end{array}\right\}$$
$$-2,98 = -16,57 \cdot 40^p + 14,17 \cdot 55^p$$

Calculamos p a partir de cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la segunda:

$$-2,98 = -16,57 \cdot 40^p + 14,17 \cdot 55^p \to -2,98 + 16,57 \cdot 40^p = 14,17 \cdot 55^p$$

Consideramos las funciones $f(p) = -2{,}98 + 16{,}57 \cdot 40^p$ y $g(p) = 14{,}17 \cdot 55^p$, y obtenemos mediante tanteo el valor de p donde coinciden:

p	$f(p)$	$g(p)$
0	13,59	14,17
0,1	20,982	21,155
0,2	31,672	31,582
0,3	47,132	47,15

p	$f(p)$	$g(p)$
0,1	20,982	21,155
0,11	21,883	22,02
0,12	22,817	22,92
0,13	23,786	23,857
0,14	24,792	24,833
0,15	25,836	25,848
0,16	26,919	26,905
0,17	28,042	28,005

Es decir, las funciones se hacen iguales para un valor de p comprendido entre 0,16 y 0,17.

Si tomamos como solución un valor aproximado $p = 0{,}16$; calculamos el valor de k_1.

$$-16{,}74 = k_1 - 16{,}57 \cdot 40^{0{,}16} \rightarrow k_1 = -16{,}74 + 16{,}57 \cdot 40^{0{,}16} = 13{,}16$$

La fórmula del índice Windchill es:

$$T_S = 13{,}16 + 0{,}62 \cdot T - 11{,}37 \cdot V^{0{,}16} + 0{,}4 \cdot T \cdot V^{0{,}16}$$

Para $T = -7$ °C y $V = 32$ km/h:

$$T_S = 13{,}16 + 0{,}62 \cdot (-7) + 11{,}37 \cdot 32^{0{,}16} + 0{,}4 \cdot (-7) \cdot 32^{0{,}16} = -15{,}85$$

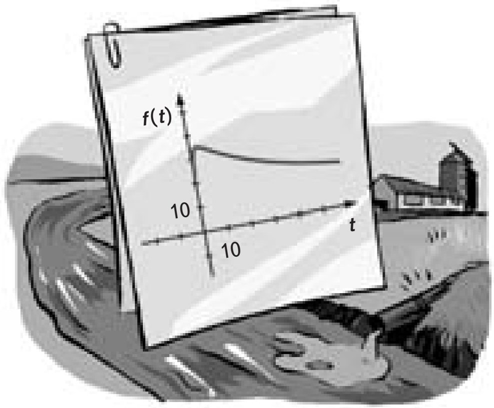
073 ●●● **Una granja avícola está contaminando el agua de un río cercano con ácido úrico. Las autoridades le han comunicado que si los niveles de ácido úrico no bajan, en el próximo control, dentro de 6 meses cerrarán la granja.**

Lucía, la responsable de seguridad de la granja, ha hecho un seguimiento del nivel de ácido úrico del río durante varios meses.

En el informe que presenta detalla cómo el nivel de ácido úrico se puede describir mediante esta función.

$$\boldsymbol{f(t) = 40 \ln (t + 1) - 50 \ln (t + 2) + 60}$$

La función *f*(*t*) da el nivel de ácido úrico, siendo *t* el tiempo, en meses.



El nivel baja a partir del tercer mes desde el vertido. ¿Bajará lo suficiente como para que la granja pase los controles programados? ¿Qué sucederá al cabo de un año?

La concentración de ácido úrico dentro de seis meses será:

$$f(6) = 40 \cdot \ln 7 - 50 \cdot \ln 8 + 60 = 33{,}86$$

Como la concentración es menor de 33,9, la fábrica seguirá funcionando.

La concentración dentro de un año será:

$$f(12) = 40 \cdot \ln 13 - 50 \cdot \ln 14 + 60 = 30{,}64$$