Funciones polinómicas y racionales

10

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 200

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$ $\rightarrow$ No tiene solución.

c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2}$

2. Página 200

Las magnitudes son inversamente proporcionales ya que si duplicamos la cantidad de ordenadores, la velocidad de la conexión de cada uno se reduciría a la mitad.

N.º de ordenadores		Velocidad
2	$\rightarrow$	256
6	$\rightarrow$	x

$\dfrac{2}{6} = \dfrac{x}{256} \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 256}{6} = 85{,}33$ kbps

Cada ordenador tendría una velocidad de 85,33 kbps.

VIDA COTIDIANA

LA CINTA DE CORRER. Página 201

Sea x el número de vueltas e y los kilómetros recorridos. En cada vuelta se recorren $\dfrac{1}{250}$ km $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{250}x$

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 202

a) Es una recta horizontal, paralela al eje X y que está por encima del eje. Una función constante.

b) Es una función de proporcionalidad directa, cuya gráfica es una recta que pasa por (0, 0) y tiene pendiente negativa.

c) Es una función lineal, que no pasa por el origen.

ACTIVIDADES

1. Página 202

La función $f(x)$ (representada por la recta r) es una función de proporcionalidad directa por ser una recta que pasa por el origen de coordenadas.

La función $g(x)$ (representada por la recta t) es una función lineal por ser una recta con ordenada en el origen distinta de cero.

La función $h(x)$ (representadga por la recta s) es una función constante por ser una recta paralela al eje X.

2. Página 202

La recta *r* se corta con los ejes en (0, 1) y (2, 0). Si la función asociada es *f*(*x*), tenemos:

$f(0) = a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow b = 1$ $\qquad f(2) = a \cdot 2 + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

De modo que $r \equiv y = -\frac{1}{2}x + 1$

La recta *s* se corta con los ejes en (0, 2) y (–3, 0). Si la función asociada es *g*(*x*), tenemos:

$g(0) = a \cdot 0 + b = 2 \rightarrow b = 2$ $\qquad g(-3) = a \cdot (-3) + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{2}{3}$

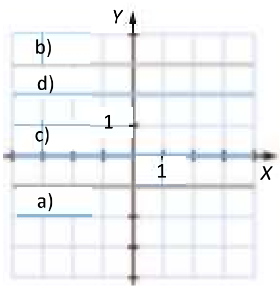
De modo que $s \equiv y = \frac{2}{3}x + 2$

3. Página 202

$$f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(0) = 3 \rightarrow n = 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x + 3$$

4. Página 203

Son las 4 funciones constantes.

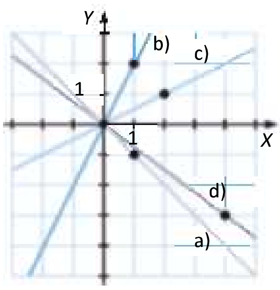


5. Página 203

Las cuatro son funciones de proporcionalidad directa, por lo que pasarán por (0, 0). Calculamos otro punto para cada una de ellas para poder dibujar la recta.

a) $f(1) = -1$ $\qquad$ c) $f(2) = 1$

b) $f(1) = 2$ $\qquad$ d) $f(4) = -3$



6. Página 203

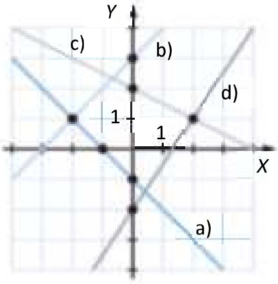
Las cuatro son funciones lineales. Calculamos dos puntos de cada función para trazarlas.

a) $f(0) = -0 - 1 = -1$ $\quad f(-1) = -(-1) - 1 = 0$

b) $f(0) = 0 + 3 = 3$ $\quad f(-2) = -2 + 3 = 1$

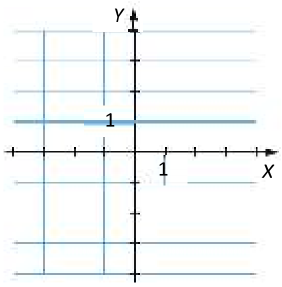
c) $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$ $\quad f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 1$

d) $f(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 2 = -2$ $\quad f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = 1$

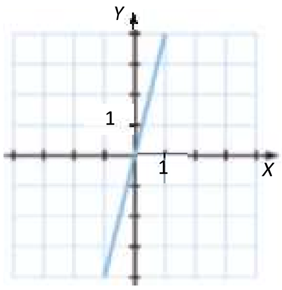


7. Página 203

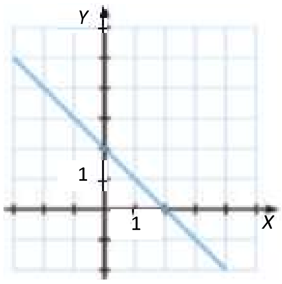
a) $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \rightarrow$ Es una función constante $\rightarrow f(x) = 1$



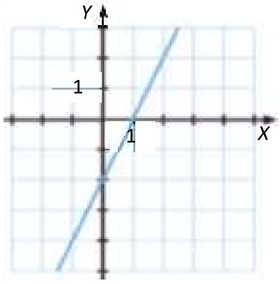
b) $\begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow n = 0 \\ m = 4 \end{cases} \rightarrow f(x) = 4x$



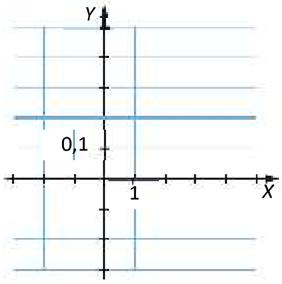
c) $\begin{cases} f(0) = 2 \rightarrow n = 2 \\ m = -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x + 2$



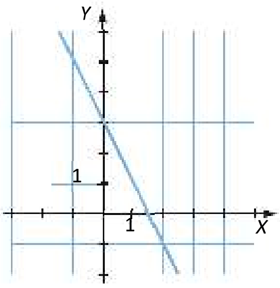
d) $\begin{cases} f(0) = -2 \rightarrow n = -2 \\ m = 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = 2x - 2$



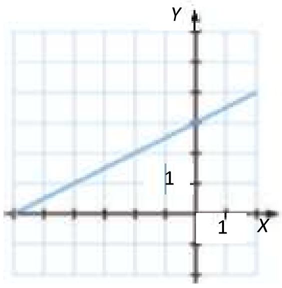
e) $\begin{cases} f(2) = \dfrac{1}{5} \rightarrow n = \dfrac{1}{5} \\ m = 0 \end{cases}$ → Con pendiente nula es una función constante → $f(x) = \dfrac{1}{5}$



f) $\begin{cases} f(0) = 3 \rightarrow n = 3 \\ f(1) = m + 3 = 1 \rightarrow m = -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = -2x + 3$



g) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 3$

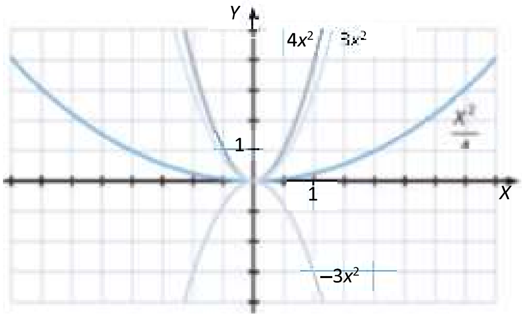


8. Página 204

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje *Y*.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$-3x^2$	−12	−3	0	−3	−12
$3x^2$	12	3	0	3	12
$x^2/4$	1	0,25	0	0,25	1
$4x^2$	16	4	0	4	16



9. Página 204

$$y = ax^2 \xrightarrow{x=2} y = 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

10. Página 204

Son funciones del tipo $y = ax^2$. Sea *f*(*x*) la gráfica verde (*r*); *g*(*x*) la gráfica azul (*t*) y *h*(*x*) la gráfica roja (*s*).

$$(2,-2) \rightarrow f(2) = -2 = 4a \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$(1,2) \rightarrow g(1) = 2 = a \rightarrow a = 2 \rightarrow g(x) = 2x^2$$

$$(1,1) \rightarrow h(1) = 1 = a \rightarrow a = 1 \rightarrow g(x) = x^2$$

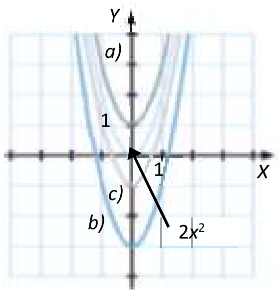
11. Página 205

La función $y = 2x^2$ tiene como vértice (0, 0) y su eje de simetría es el eje *Y*.

Damos valores en un entorno del vértice y representamos.

x	−2	−1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8

Para representar las otras funciones desplazamos el vértice verticalmente.



12. Página 205

a) $y = 2x^2 + x \xrightarrow{a=2,\,b=1}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-1}{2\cdot 2}, \dfrac{-1^2}{4\cdot 2}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}\right)$

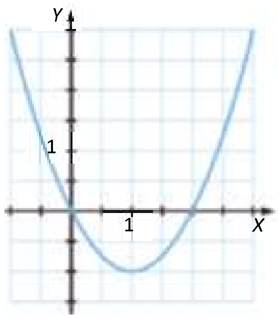
b) $y = 3x^2 - 2x \xrightarrow{a=3,\,b=-2}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-(-2)}{2\cdot 3}, \dfrac{-(-2)^2}{4\cdot 3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

c) $y = x^2 - 3x \xrightarrow{a=1,\,b=-3}$ Vértice $\rightarrow \left(\dfrac{-(-3)}{2\cdot 1}, \dfrac{-(-3)^2}{4\cdot 1}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

13. Página 205

a) $y = (x-1)^2 - 1 \rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1$

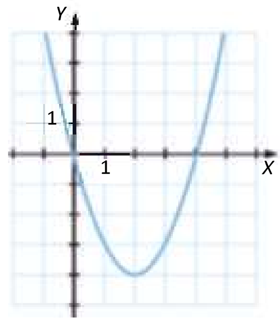
$y = x^2 - 2x \xrightarrow{a=1,\,b=-2}$ Vértice: $(1, -1)$



Se traslada $y = x^2$
1 a la derecha y
1 hacia abajo.

c) $y = (x-2)^2 - 4 \rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 4$

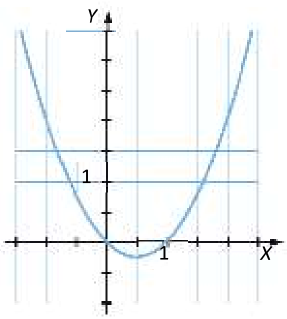
$y = x^2 - 4x \xrightarrow{a=1,\,b=-4}$ Vértice: $(2, -4)$



Se traslada $y = x^2$
2 a la derecha y
4 hacia abajo.

b) $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \rightarrow y = x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}$

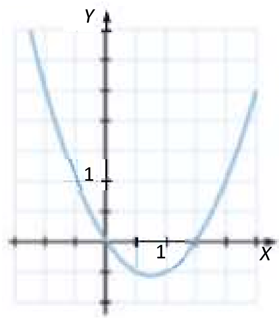
$y = x^2 - x \xrightarrow{a=1,\,b=-1}$ Vértice: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$



Se traslada $y = x^2$
1/2 a la derecha y
1/4 hacia abajo.

d) $y = \left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16} \rightarrow y = x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{16}$

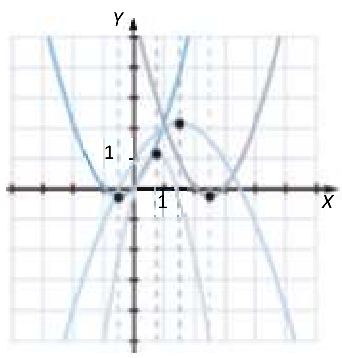
$y = x^2 - \dfrac{3}{2}x \xrightarrow{a=1,\,b=\frac{-3}{2}}$ Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{16}\right)$



Se traslada $y = x^2$
3/4 a la derecha y
9/16 hacia abajo.

Todas las parábolas son del tipo $y = ax^2 + bx$.

14. Página 206



La orientación de las parábolas azul oscuro (azul en el libro) y gris oscuro (roja en el libro) es hacia arriba, tienen un mínimo. La orientación de las parábolas azul claro (verde en el libro) y gris claro (rosa en el libro) es hacia abajo, tienen un máximo.

15. Página 206

Todas las funciones son parábolas.

a) $a=2>0\rightarrow$ El vértice de la función es un mínimo.

$b=1\rightarrow$ *a* y *b* son del mismo signo $\rightarrow$ El vértice está a la izquierda del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow\left(-\frac{1}{2\cdot 2},\frac{-1^2+4\cdot 2}{4\cdot 2}\right)=\left(-\frac{1}{4},\frac{7}{8}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x=-\frac{1}{4}$

b) $a=-1<0\rightarrow$ El vértice de la función es un máximo.

$b=3\rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow\left(-\frac{3}{-2},\frac{-3^2-4\cdot 2}{-4}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{17}{4}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x=\frac{3}{2}$

c) $a=1>0\rightarrow$ El vértice de la función es un mínimo.

$b=-5\rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow\left(-\frac{-5}{2},\frac{-(-5)^2-4}{4}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{-29}{4}\right)$ Eje de simetría $\rightarrow x=\frac{5}{2}$

d) $a=-1<0\rightarrow$ El vértice de la función es un máximo.

$b=4\rightarrow$ *a* y *b* son de distinto signo $\rightarrow$ El vértice está a la derecha del eje *Y*.

Vértice $\rightarrow\left(-\frac{4}{-2},\frac{-4^2+4\cdot 8}{-4}\right)=(2,-4)$ Eje de simetría $\rightarrow x=2$

16. Página 206

a) $y=(x-1)^2+1=x^2-2x+1+1\rightarrow y=x^2-2x+2\rightarrow$ Vértice $\rightarrow\left(-\frac{-2}{2},\frac{-(-2)^2+4\cdot 2}{4}\right)=(1,1)$

b) $y=(x+1)^2-2=x^2+2x+1-2\rightarrow y=x^2+2x-1\rightarrow$ Vértice $\rightarrow\left(-\frac{2}{2},\frac{-2^2+4\cdot 1\cdot(-1)}{4}\right)=(-1,-2)$

La primera coordenada del vértice es la cantidad que aparece restando a *x* en las expresiones dentro del paréntesis. La segunda coordenada del vértice es lo que aparece fuera del paréntesis.

Sí, se podrían representar así todas las parábolas.

17. Página 207

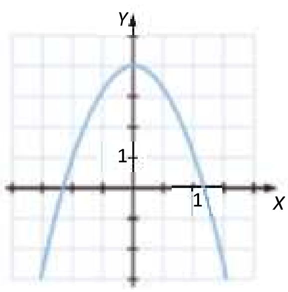
a) $a=-3$, $b=0$, $c=4\rightarrow$ Vértice: $\left(0,\frac{-4\cdot 3\cdot 4}{-4\cdot 3}\right)=(0,4)$

$a=-3<0\rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X:* $-3x^2+4=0\rightarrow x^2=\frac{4}{3}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\rightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{3}},0\right)\\ x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}\rightarrow\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},0\right)\end{cases}$

Corte con el eje *Y:* (0, 4)

x	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	–1	0	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
y	0	1	4	1	0



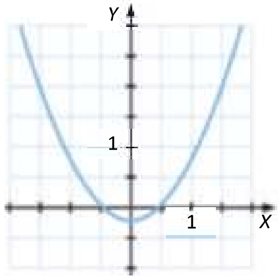
b) $a=1,\ b=0,\ c=\frac{1}{4} \longrightarrow$ Vértice: $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$

$a=1>0 \longrightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2-\frac{1}{4}=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right) \\ x_2=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2},0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$



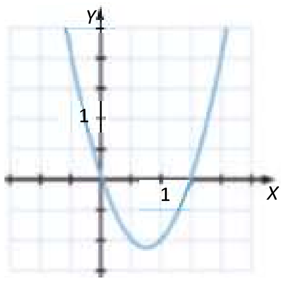
c) $a=2,\ b=-3,\ c=0 \ \longrightarrow$ Vértice: $\left(\frac{3}{4},-\frac{3^2}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{3}{4},-\frac{9}{8}\right)$

$a=2>0 \longrightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $2x^2-3x=0 \rightarrow x(2x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow (0,0) \\ x_2=\frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2},0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 0)

x	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
y	5	0	$-\frac{9}{8}$	-1	0



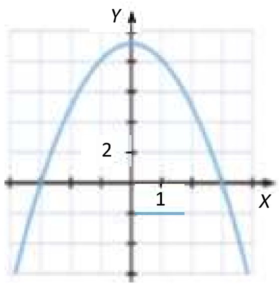
d) $a=-1,\ b=0,\ c=9 \rightarrow$ Vértice: $\left(0,\frac{-4\cdot 9}{-4}\right)=(0,9)$

$a=-1<0 \longrightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2+9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \rightarrow (3,0) \\ x_2=-3 \rightarrow (-3,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 9)

x	-3	-1	0	1	3
y	0	8	9	8	0



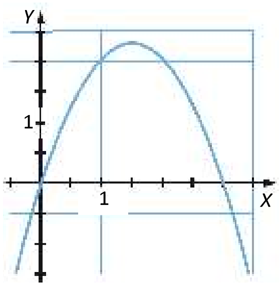
e) $a=-1,\ b=3,\ c=0 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-3}{-2},-\frac{3^2}{-4}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$

$a=-1<0 \longrightarrow$ El vértice es un máximo.

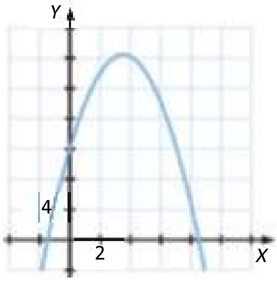
Corte con el eje *X*: $-x^2+3x=0 \rightarrow x(-x+3)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow (0,0) \\ x_2=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 0)

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	3
y	-4	0	2	$\frac{9}{4}$	0



f) $a = 4$, $b = -1$, $c = 0 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{1}{2\cdot 4}, -\frac{1^2}{4\cdot 4}\right) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$



$a = 4 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $4x^2 - x = 0 \rightarrow x(4x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow (0,0) \\ x_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 0)

Construimos una tabla de valores alrededor del vértice.

x	−1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
y	5	0	$-\frac{1}{16}$	0	3

18. Página 207

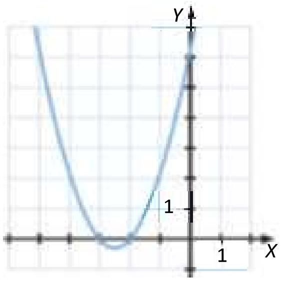
a) $a = 1$, $b = 5$, $c = 6 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-5}{2}, \frac{-5^2 + 4\cdot 6}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2 = -3 \rightarrow (-3,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 6)

x	−3	$-\frac{5}{2}$	−2	0	1
y	0	$\frac{1}{4}$	0	6	12



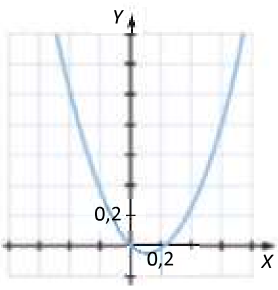
b) $a = -1$, $b = 7$, $c = 12 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-7}{2\cdot(-1)}, \frac{-7^2 + 4\cdot(-1)\cdot 12}{4\cdot(-1)}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{97}{4}\right)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje *X*: $-x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12}}{2\cdot(-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+\sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \frac{7-\sqrt{97}}{2} \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: (0, 12)

x	−1	0	1	$\frac{7}{2}$	4	6
y	4	12	16	$\frac{97}{4}$	24	18



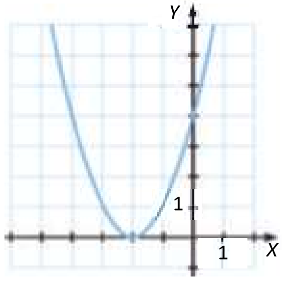
c) $a = 1$, $b = 4$, $c = 4 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-4}{2}, \frac{-4^2 + 4 \cdot 4}{4}\right) = (-2, 0)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} \rightarrow x_1 = -2 \rightarrow (-2, 0)$

Corte con el eje Y: (0, 4)

x	–4	–3	–2	–1	0
y	4	1	0	1	4



d) $a = -1$, $b = 1$, $c = -6 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-1}{2 \cdot (-1)}, \frac{-1^2 + 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}{4 \cdot (-1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{23}{4}\right)$

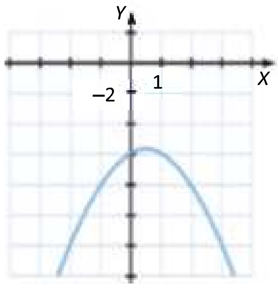
$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje X: $-x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{-2}$

$\rightarrow$ No corta al eje X.

Corte con el eje Y: (0, –6)

x	–2	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	–12	–6	$-\frac{23}{4}$	–6	–8



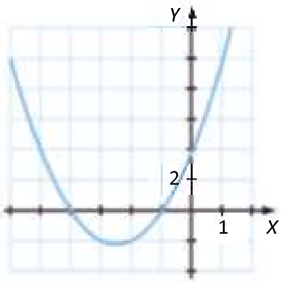
e) $a = 1$, $b = 5$, $c = 4 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{-5}{2}, \frac{-5^2 + 4 \cdot 4}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x_2 = -4 \rightarrow (-4, 0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: (0, 4)

x	–4	$-\frac{5}{2}$	–2	–1	0
y	0	$-\frac{9}{4}$	–2	0	4



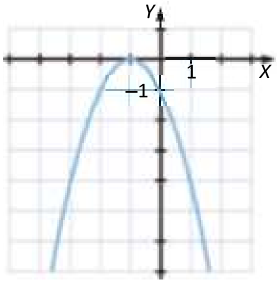
f) $a = -1$, $b = -2$, $c = -1 \longrightarrow$ Vértice: $\left(-\frac{-2}{-2}, \frac{-2^2+4}{-4}\right) = (-1{,}0)$

$a = -1 < 0 \longrightarrow$ El vértice es un máximo.

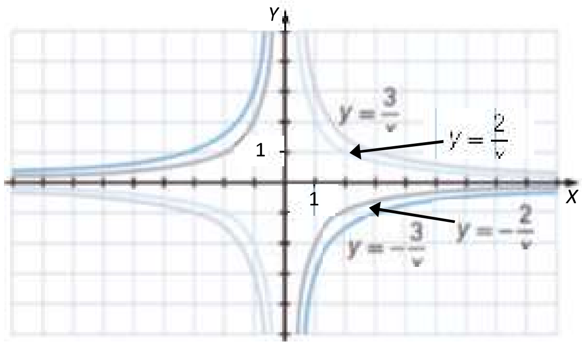
Corte con el eje X: $-x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow x_1 = -1 \rightarrow (-1{,}0)$

Corte con el eje Y: (0, –1)

x	–3	–2	–1	0	1
y	–4	–1	0	–1	–4



19. Página 208



20. Página 208

$$y = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=1, y=-2} k = -2 \rightarrow y = -\frac{2}{x}$$

21. Página 208

Sea $f(x)$ la gráfica verde y $g(x)$ la gráfica roja.

$f(x)$ es una función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (1,2):

$$f(x) = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=1, y=2} k = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{x}$$

$g(x)$ es una función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (–2,2):

$$g(x) = \frac{k}{x} \xrightarrow{x=-2, y=2} k = -4 \rightarrow g(x) = -\frac{4}{x}$$

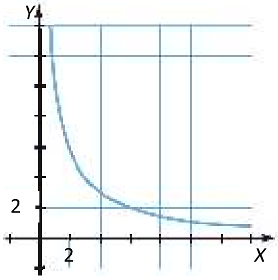
22. Página 209

$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12 \longrightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

La constante de proporcionalidad es $k = 12 > 0 \longrightarrow$ La función es decreciente y está en el 1.er y 3.er cuadrantes.

Sea x los días e y el número de obreros, entonces $y = \frac{12}{x}$.

Representamos solo la gráfica en el primer cuadrante, ya que no hay obreros ni días de trabajo negativos.



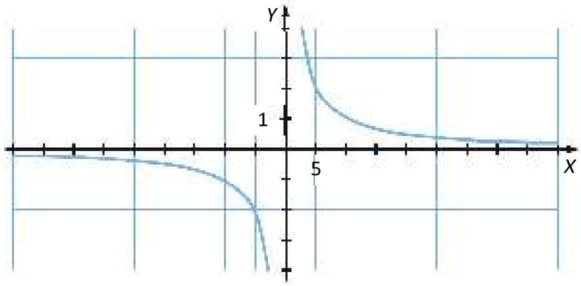
(Para obtener resultados realistas solo podemos considerar los casos en que nos dé un número de obreros entero, lo otro son aproximaciones del número de obreros que habría que considerar o plantear el contratar a una persona una parte de la jornada, ya que aunque podemos considerar una parte de un día, no podemos considerar una parte de un obrero)

23. Página 209

$x \cdot y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{x} \rightarrow k = 10 > 0 \rightarrow$ La gráfica es creciente y está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	−10	−5	−1	1	5	10
y	−1	−2	−10	10	2	1



24. Página 209

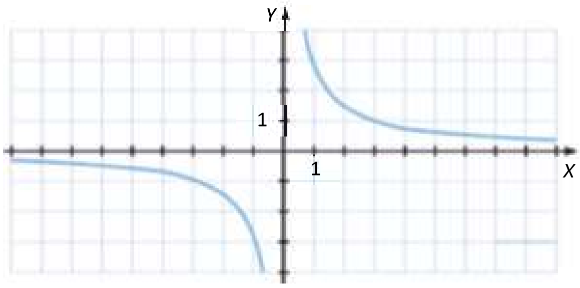
Es una función de proporcionalidad inversa.

$1 \cdot 3 = -2 \cdot a = b \cdot 1 = c \cdot (-0{,}75) = 3 \rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1{,}5; b = 3; c = -\frac{3}{0{,}75} = -4$

La constante de proporcionalidad es $k = 3 > 0 \rightarrow$ La función es decreciente y está en el 1.er y 3.er cuadrantes.

Representamos la gráfica teniendo en cuenta los valores de la tabla

x	1	−2	3	−4
y	3	−1,5	1	−0,75



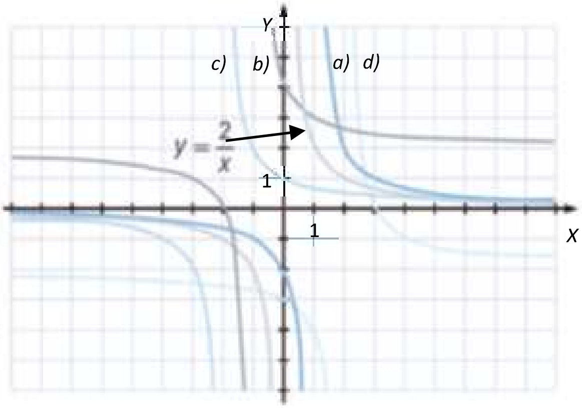
25. Página 210

$y = \frac{2}{x} \rightarrow k = 2 > 0 \rightarrow$ La función es decreciente y la gráfica está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores:

x	−3	−2	−1	1	2	3
y	$-\frac{2}{3}$	−1	−2	2	1	$\frac{2}{3}$

Representamos la gráfica y las otras funciones desplazando los ejes de simetría a partir de ésta.



26. Página 210

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow y = -\frac{1}{x} \rightarrow y = -f(x) \rightarrow$ Para representar la gráfica de $y = -\frac{1}{x}$ tenemos que representar la función simétrica respecto al eje *Y* de $y = \frac{1}{x}$.

27. Página 210

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ trasladada 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

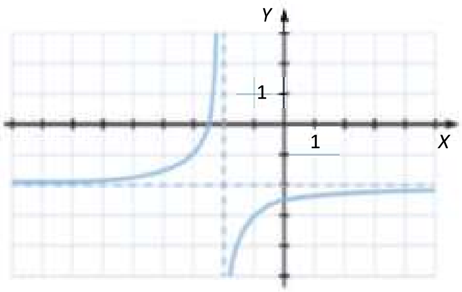
Su expresión algebraica es $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$.

28. Página 211

a) $a = -2$, $b = -2 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = -2$.

$k = -1 < 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrantes.

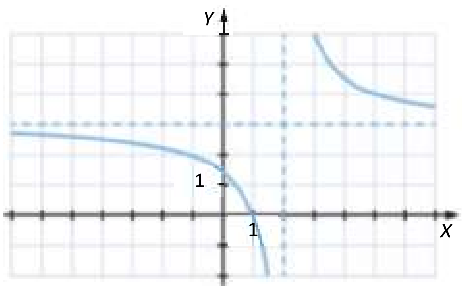
Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $a = 2$, $b = 3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = 3$.

$k = 3 > 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrantes.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

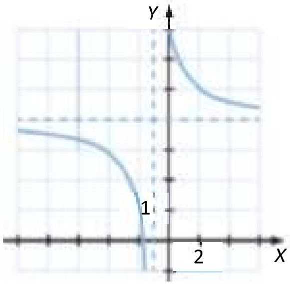


29. Página 211

a) $a = -1$, $b = 4 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 4$.

$k = 3 > 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

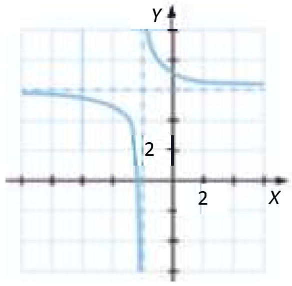
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $a = -2$, $b = 6 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 6$.

$k = 2 > 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

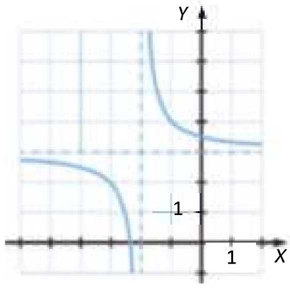
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a = -2$, $b = 3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$.

$k = 1 > 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

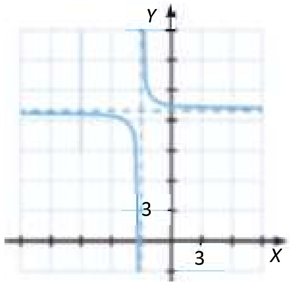
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $a = -3$, $b = 13 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 13$.

$k = 4 > 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 1.º y 3.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{4}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

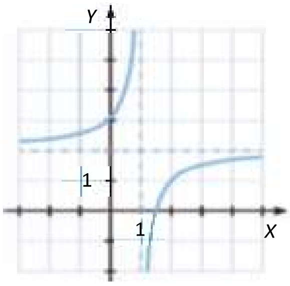


30. Página 211

a) $a = 1$, $b = 2 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 2$.

$k = -1 < 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

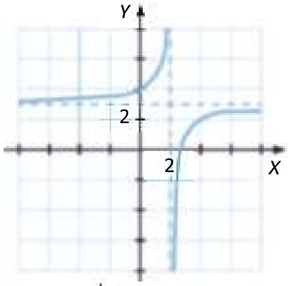
Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos nuevos ejes.



b) $a = 2$, $b = 3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = 3$.

$k = -2 < 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

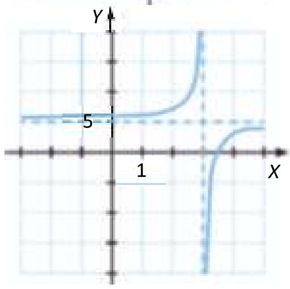
Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a = 3$, $b = 5 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 3$ e $y = 5$.

$k = -2 < 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

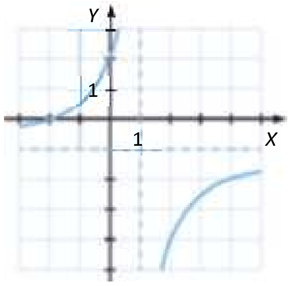
Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $a = 1$, $b = -1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = -1$.

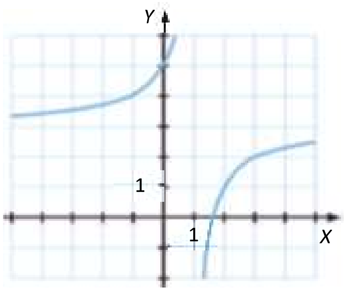
$k = -3 < 0 \rightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en el 2.º y 4.º cuadrante.

Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{3}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

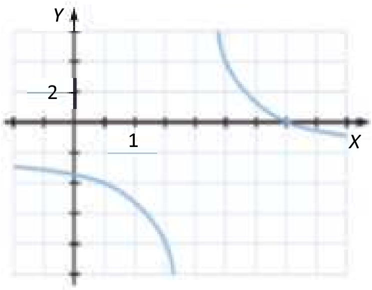


31. Página 211

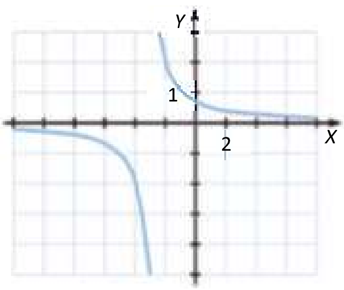
a)



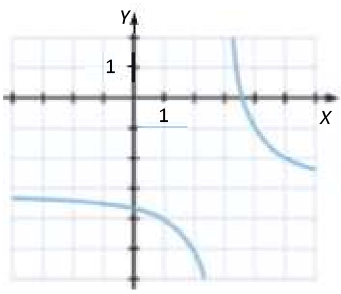
c)



b)



d)



32. Página 211

$f(x)=\frac{k}{x-a}+b\rightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=-1\rightarrow a=-2, b=-1$. La función pasa por el punto (1,0).

$f(x)=\frac{k}{x+2}-1\xrightarrow{x=1,y=0}0=\frac{k}{3}-1\rightarrow k=3\rightarrow f(x)=\frac{3}{x+2}-1$

ACTIVIDADES FINALES

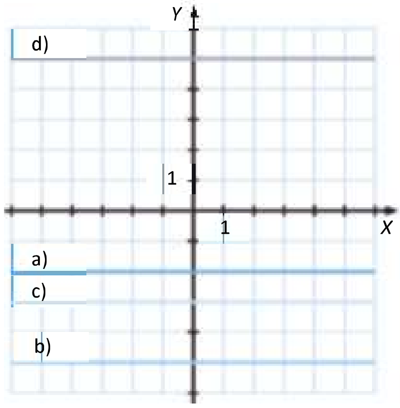
33. Página 212

a) Es una función de proporcionalidad directa por ser una recta que pasa por el origen de coordenadas.

b) Es una función lineal por ser una recta de pendiente y ordenada en el origen distintas de cero.

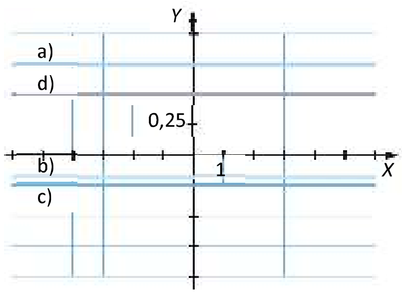
34. Página 212

Son funciones constantes.



35. Página 212

Son funciones constantes.



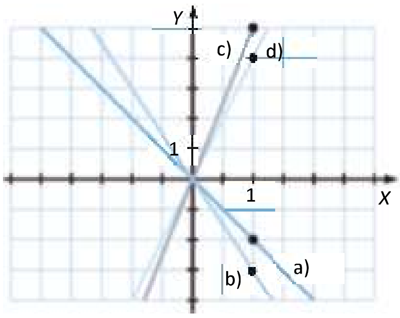
36. Página 212

Son funciones de proporcionalidad directa, pasan por (0, 0).

Para hallar su representación gráfica, calculamos un punto de la función además del (0, 0).

a) $f(1)=-2\cdot 1=-2$ c) $f(1)=5\cdot 1=5$

b) $f(1)=-3\cdot 1=-3$ d) $f(1)=4\cdot 1=4$

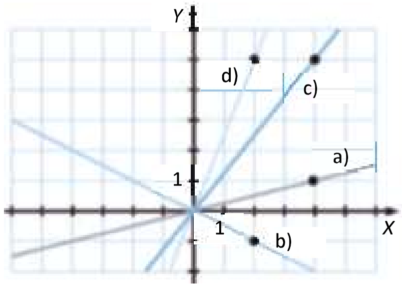


37. Página 212

Son funciones de proporcionalidad directa, pasan por (0, 0).

Para hallar su representación gráfica, calculamos un punto de la función además del (0, 0).

a) $f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ b) $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ c) $f(4) = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5$ d) $f(2) = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$



38. Página 212

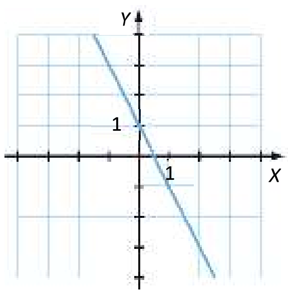
a) Función lineal

$m = -2 < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 1$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, 1)$

$f(x) = -2x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = -1 \rightarrow (1, -1)$



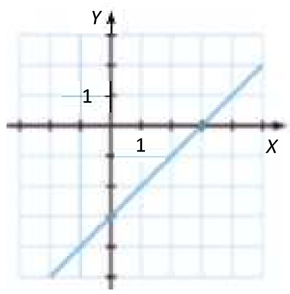
c) Función lineal

$m = 1 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -3$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -3)$

$f(x) = x - 3 \xrightarrow{x=1} f(1) = -2 \rightarrow (1, -2)$



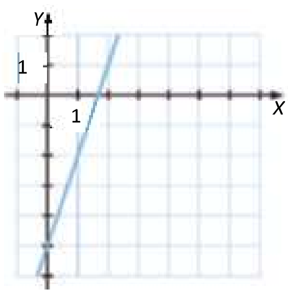
b) Función lineal

$m = 3 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -5$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -5)$

$f(x) = 3x - 5 \xrightarrow{x=1} f(1) = -2 \rightarrow (1, -2)$



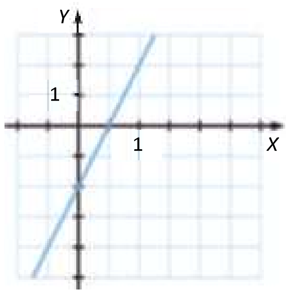
d) Función lineal

$m = 4 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -2)$

$f(x) = 4x - 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 2 \rightarrow (1, 2)$



39. Página 212

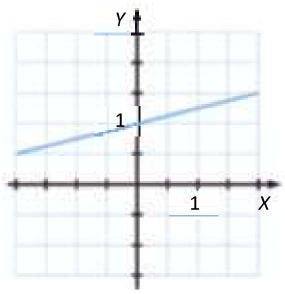
a) Función lineal

$m = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 1$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, 1)$

$f(x) = \frac{1}{4}x + 1 \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{5}{4} \rightarrow \left(1, \frac{5}{4}\right)$



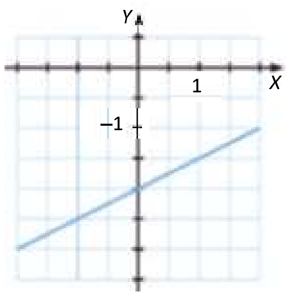
b) Función lineal

$m = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = -2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, -2)$

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(1, -\frac{3}{2}\right)$



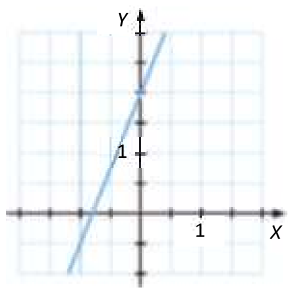
c) Función lineal

$m = \frac{5}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 2$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, 2)$

$f(x) = \frac{5}{2}x + 2 \xrightarrow{x=-1} f(-1) = \frac{-1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$



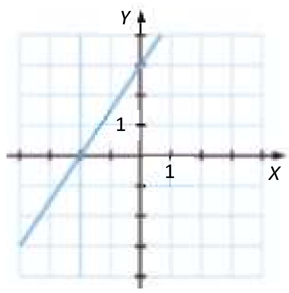
d) Función lineal

$m = \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 3$

Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0, 3)$

$f(x) = \frac{3}{2}x + 3 \xrightarrow{x=-2} f(-2) = 0 \rightarrow (-2, 0)$



40. Página 212

a) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(0) = 0 \rightarrow n = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x$

b) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ f(0) = 2 \rightarrow n = 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x + 2$

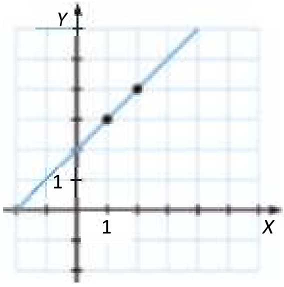
c) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ f(0) = -1 \rightarrow n = -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = -2x - 1$

d) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ f(-1) = -2 \rightarrow -3 + n = -2 \rightarrow n = 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = 3x + 1$

41. Página 212

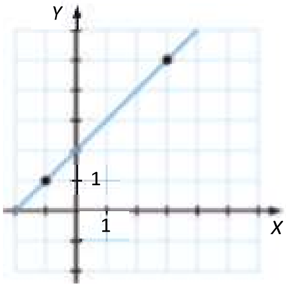
a) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 3 \\ 2m + n = 4 \end{cases} \rightarrow 3 - m = 4 - 2m \rightarrow m = 1$

$n = 3 - m \xrightarrow{m=1} n = 2 \rightarrow f(x) = x + 2$



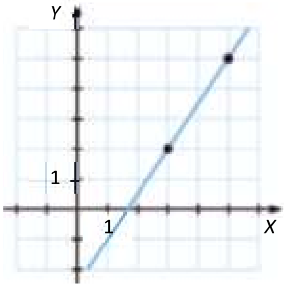
b) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(3) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m + n = 1 \\ 3m + n = 5 \end{cases} \rightarrow 1 + m = 5 - 3m \rightarrow m = 1$

$n = 1 + m \xrightarrow{m=1} n = 2 \rightarrow f(x) = x + 2$



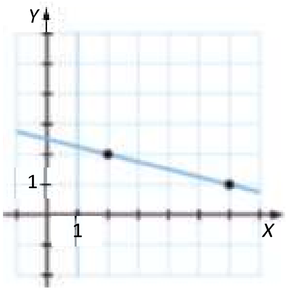
c) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} f(3) = 2 \\ f(5) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m + n = 2 \\ 5m + n = 5 \end{cases} \rightarrow 2 - 3m = 5 - 5m \rightarrow m = \frac{3}{2}$

$n = 2 - 3m \xrightarrow{m=\frac{3}{2}} n = -\frac{5}{2} \rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$



d) $f(x) = mx + n \rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \\ f(6) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2m + n = 2 \\ 6m + n = 1 \end{cases} \rightarrow 2 - 2m = 1 - 6m \rightarrow m = -\frac{1}{4}$

$n = 2 - 2m \xrightarrow{m=-\frac{1}{4}} n = \frac{5}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$



42. Página 212

$$f(x) = mx + n \xrightarrow[f(3)=5]{f(1)=3} \begin{cases} m + n = 3 \\ 3m + n = 5 \end{cases} \to 3 - m = 5 - 3m \to \text{Pendiente: } m = 1$$

Ordenada en el origen: $n = 3 - m \xrightarrow{m=1} n = 2$

44. Página 212

a) La recta pasa por los puntos (0, 3) y (–1, 1).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 3 \to n = 3 \\ f(-1) = 1 \to -m + 3 = 1 \to m = 2 \end{cases} \to f(x) = 2x + 3$$

b) La recta pasa por los puntos (0, –1) y (–1, 0).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = -1 \to n = -1 \\ f(-1) = 0 \to -m - 1 = 0 \to m = -1 \end{cases} \to f(x) = -x - 1$$

c) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (1, –1).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 2 \to n = 2 \\ f(1) = -1 \to m + 2 = -1 \to m = -3 \end{cases} \to f(x) = -3x + 2$$

d) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (–1, –2).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 2 \to n = 2 \\ f(-1) = -2 \to -m + 2 = -2 \to m = 4 \end{cases} \to f(x) = 4x + 2$$

45. Página 212

a) La recta pasa por los puntos (0, 2) y (4, 0).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 2 \to n = 2 \\ f(4) = 0 \to 4m + 2 = 0 \to m = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

b) La recta pasa por los puntos (0, –3) y (9, 0).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = -3 \to n = -3 \\ f(9) = 0 \to 9m - 3 = 0 \to m = \dfrac{1}{3} \end{cases} \to f(x) = \frac{1}{3}x - 3$$

c) La recta pasa por los puntos (0, 1) y (–3, –1).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 1 \to n = 1 \\ f(-3) = -1 \to -3m + 1 = -1 \to m = \dfrac{2}{3} \end{cases} \to f(x) = \frac{2}{3}x + 1$$

d) La recta pasa por los puntos (0, 0) y (3, 4).

$$f(x) = mx + n \to \begin{cases} f(0) = 0 \to n = 0 \\ f(3) = 4 \to 3m = 4 \to m = \dfrac{4}{3} \end{cases} \to f(x) = \frac{4}{3}x$$

46. Página 213

a) Es la función constante $y = 2$.

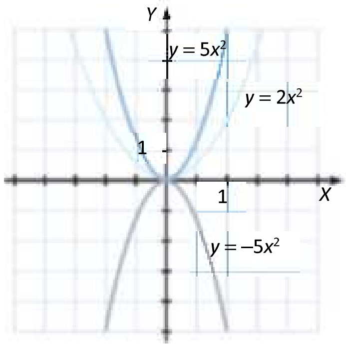
b) Es la función constante $y = -1$.

47. Página 213

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje Y.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$-5x^2$	−20	−5	0	−5	−20
$5x^2$	20	5	0	5	20
$2x^2$	8	2	0	2	8

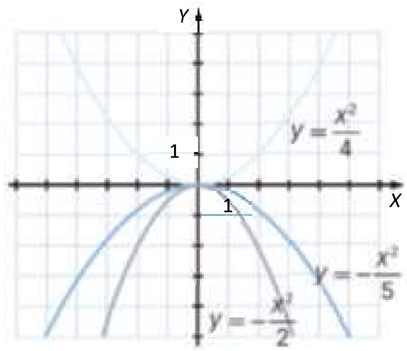


48. Página 213

El vértice de las parábolas es el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje Y.

Construimos tablas de valores alrededor del vértice y después dibujamos las parábolas.

	−2	−1	0	1	2
$x^2/4$	1	1/4	0	1/4	1
$-x^2/5$	−4/5	−1/5	0	−1/5	−4/5
$-x^2/2$	−2	−1/2	0	−1/2	−2



49. Página 213

Son parábolas con vértice (0, 0). Son funciones de la forma $f(x) = ax^2$

a) Pasa por el punto (1, 3) $\rightarrow f(1) = 3 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2$

b) Pasa por el punto (3, 3) $\rightarrow f(3) = 3 \rightarrow a \cdot 3^2 = 3 \rightarrow a = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2$

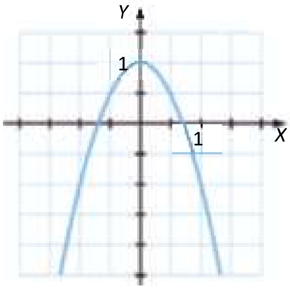
50. Página 213

a) Vértice: (0, 1)

$a = -2 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Su eje de simetría es el eje Y.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y	-1	0	1	0	-1

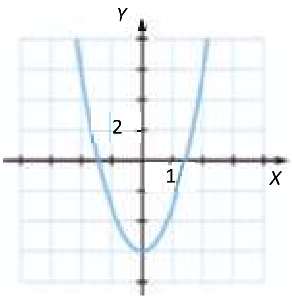


b) Vértice: (0, –6)

$a = 3 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Su eje de simetría es el eje Y.

x	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$
y	0	-3	-6	-3	0

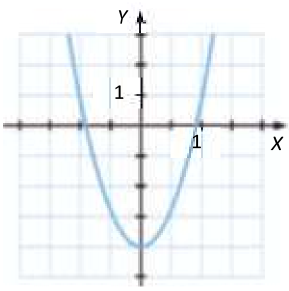


c) Vértice: (0, –4)

$a = 5 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Su eje de simetría es el eje Y.

x	-1	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	1
y	1	0	-4	0	1

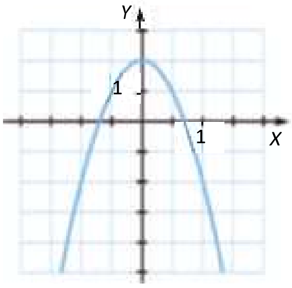


d) Vértice: (0, 2)

$a = -4 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

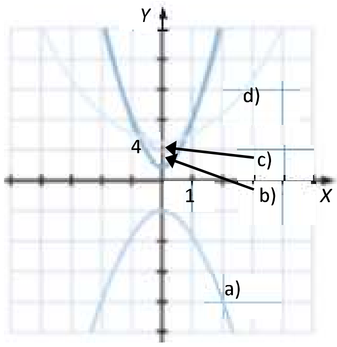
Su eje de simetría es el eje Y.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y	-2	0	2	0	-2



51. Página 213

Procediendo de manera análoga al ejercicio anterior tenemos:



52. Página 213

a) El vértice es (0, –3), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 3$.

Pasa por el punto (1, 0) $\rightarrow f(1) = 0 \rightarrow a - 3 = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2 - 3$.

b) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (1, –1) $\rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a + 1 = -1 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 1$.

c) El vértice es (0,0), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2$.

Pasa por el punto (2, 2) $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

d) El vértice es (0, 3), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 3$.

Pasa por el punto (2, 1) $\rightarrow f(2) = 1 \rightarrow 4a + 3 = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.

53. Página 213

a) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (2, 2) $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 4a + 1 = 2 \rightarrow a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

b) El vértice es (0, –1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 1$.

Pasa por el punto (2, –3) $\rightarrow f(2) = -3 \rightarrow 4a - 1 = -3 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$.

c) El vértice es (0, 1), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 + 1$.

Pasa por el punto (3, –2) $\rightarrow f(3) = -2 \rightarrow 9a + 1 = -2 \rightarrow a = -\frac{1}{3} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$.

d) El vértice es (0, –4), por tanto la función es de la forma $f(x) = ax^2 - 4$.

Pasa por el punto (1, –1) $\rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a - 4 = -1 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = 3x^2 - 4$.

54. Página 213

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\frac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = -4$ ⟶ Vértice: (2, –4)

Eje de simetría: $x = 2$

b) $a = 3$, $b = -9$ ⟶ Vértice: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{4}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{3}{2}$

c) $a = -1$, $b = 8$ ⟶ Vértice: (4, 16)

Eje de simetría: $x = 4$

d) $a = 1$, $b = -6$ ⟶ Vértice: (3, –9)

Eje de simetría: $x = 3$

55. Página 213

a) Vértice: (–1, –2) Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

b) Vértice: (1, –1) Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con el eje X: (2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

c) Vértice: (–1, 1) Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0) y (0, 0) Punto de corte con el eje Y: (0, 0)

d) Vértice: (–2, 6) Eje de simetría: $x = -2$

Puntos de corte con el eje X: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{9}{2}, 0\right)$ Punto de corte con el eje Y: (0, 2)

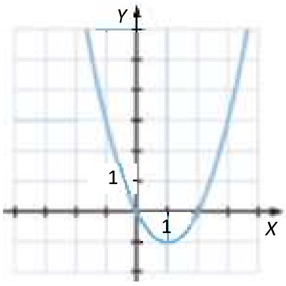
56. Página 213

Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\dfrac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = -2 \rightarrow$ Vértice: $(1, -1)$ y eje de simetría: $x = 1$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

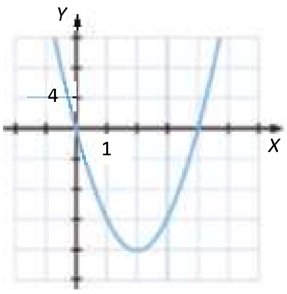
x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3



b) $a = 4$, $b = -16 \rightarrow$ Vértice: $(2, -16)$ y eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

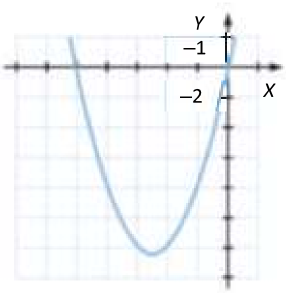
x	0	1	2	3	4
y	0	-12	-16	-12	0



c) $a = 2$, $b = 10 \rightarrow$ Vértice: $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{25}{2}\right)$ y eje de simetría: $x = -\dfrac{5}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

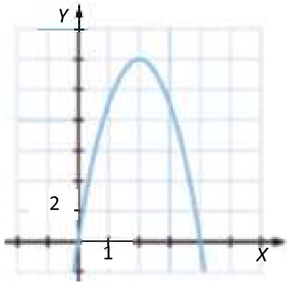
x	-5	-3	$-\dfrac{5}{2}$	-2	0
y	0	-12	$-\dfrac{25}{2}$	-12	0



d) $a = -3$, $b = 12 \rightarrow$ Vértice: (2, 12) y eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	1	2	3	4
y	0	9	12	9	0



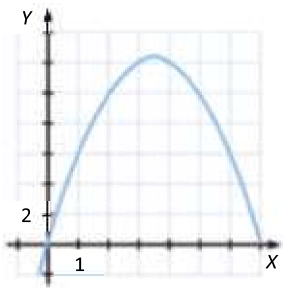
57. Página 213

Vértice: $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\dfrac{b}{2a}$

a) $a = -1$, $b = 7 \rightarrow$ Vértice: $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = \dfrac{7}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

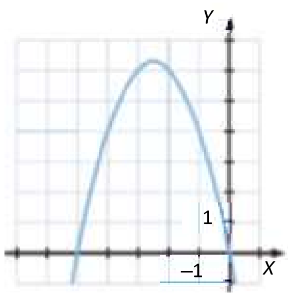
x	0	2	$\frac{7}{2}$	5	7
y	0	10	$\frac{49}{4}$	10	0



b) $a = -1$, $b = -5 \rightarrow$ Vértice: $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = -\dfrac{5}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

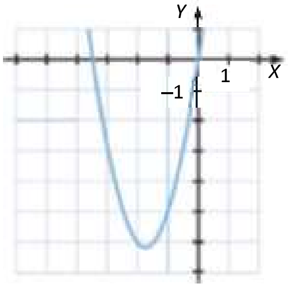
x	–5	–4	$-\frac{5}{2}$	–1	0
y	0	4	$\frac{25}{4}$	4	0



c) $a = 2$, $b = 7 \rightarrow$ Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{7}{4}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

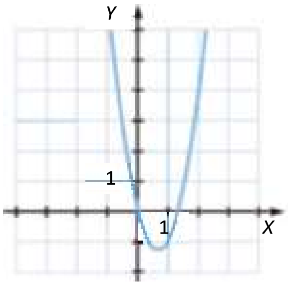
x	–3	–2	$-\frac{7}{4}$	–1	0
y	–3	–6	$-\frac{49}{8}$	–5	0



d) $a = 3$, $b = -4 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y eje de simetría: $x = \frac{2}{3}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	–1	0	$\frac{2}{3}$	1	2
y	7	0	$-\frac{4}{3}$	–1	4



58. Página 213

a) $y = (x+1)^2 - 1 \rightarrow y = x^2 + 2x$. Vértice $\xrightarrow{a=1, b=2} (-1, -1)$

Es la función representada por la gráfica azul.

b) $y = -(x+2)^2 + 4 \rightarrow y = -x^2 - 4x$. Vértice $\xrightarrow{a=-1, b=-4} (-2, 4)$

Es la función representada por la gráfica verde.

c) $y = 2(x+1)^2 - 2 \rightarrow y = 2x^2 + 4x$. Vértice $\xrightarrow{a=2, b=4} (-1, -2)$

Es la función representada por la gráfica rosa.

d) $y = -(x-3)^2 + 5 \rightarrow y = -x^2 + 6x - 4$. Vértice $\xrightarrow{a=-1, b=6, c=-4} (3, 5)$

Es la función representada por la gráfica roja.

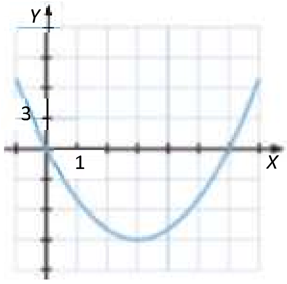
59. Página 214

a) Vértice: (3, –9)

Eje de simetría: $x = 3$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	2	3	4	6
y	0	–8	–9	–8	0

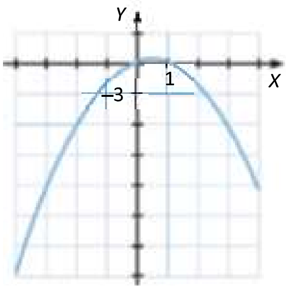


b) Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	–1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	–2	0	$\frac{1}{4}$	0	–2

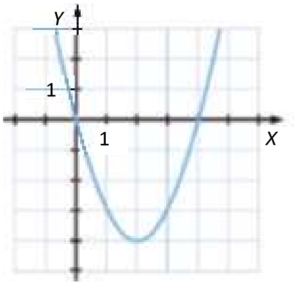


c) Vértice: (2, –4)

Eje de simetría: $x = 2$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	0	1	2	3	4
y	0	–3	–4	–3	0

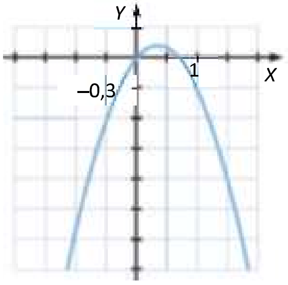


d) Vértice: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{1}{3}$

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
y	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$



60. Página 214

Pasa por el punto (0, 0) $\rightarrow y = ax^2 + bx$

Su vértice es (–1, 2) $\rightarrow y = a(x+1)^2 + 2$

Pasa por el punto (–2, 0) $\xrightarrow{x=-2, y=0} 0 = a + 2 \rightarrow a = -2 \rightarrow y = -2(x+1)^2 + 2 \rightarrow y = -2x^2 - 4x$

61. Página 214

Pasa por el punto (0, 0) $\rightarrow y = ax^2 + bx$

Su vértice es (2, 4) $\rightarrow y = a(x-2)^2 + 4$

Pasa por el punto (4, 0) $\xrightarrow{x=4, y=0} 0 = 4a + 4 \rightarrow a = -1 \rightarrow y = -(x-2)^2 + 4 \rightarrow y = -x^2 + 4x$

62. Página 214

a) $a = 2$, $b = 10$, $c = 12$. Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{5}{2}$

Puntos de corte con el eje *X*: $2x^2 + 10x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x_2 = -2 \rightarrow (-2, 0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 12 \rightarrow (0, 12)$

b) $a = 1$, $b = -6$, $c = -7$. Vértice: (3, –16) y eje de simetría: $x = 3$

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 6x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 7}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \rightarrow (7, 0) \\ x_2 = -1 \rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = -7 \rightarrow (0, -7)$

c) $a = 1$, $b = -8$, $c = 15$. Vértice: (4, –1) y eje de simetría: $x = 4$.

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow (5,0) \\ x_2 = 3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 15 \rightarrow (0,15)$

d) $a = 1$, $b = 9$, $c = 18$. Vértice: $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ y eje de simetría: $x = -\frac{9}{2}$

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 + 9x + 18 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow (-3,0) \\ x_2 = -6 \rightarrow (-6,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 18 \rightarrow (0,18)$

63. Página 214

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ Eje de simetría: $-\frac{b}{2a}$

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3 \rightarrow$ Vértice: (–1, –4) Eje de simetría: $x = -1$

b) $a = -2$, $b = 4$, $c = 6 \rightarrow$ Vértice: (1, 8) Eje de simetría: $x = 1$

c) $a = -5$, $b = 1$, $c = -1 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{1}{10}, -\frac{19}{20}\right)$ Eje de simetría: $x = \frac{1}{10}$

d) $a = 2$, $b = -2$, $c = 3 \rightarrow$ Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$

64. Página 214

f(*x*) gráfica verde, *g*(*x*) gráfica roja, *h*(*x*) gráfica morada.

$f(x) \rightarrow$ Vértice: $(0,0)$, eje de simetría: $x = 0$. El vértice es un mínimo. Ramas hacia arriba.

$g(x) \rightarrow$ Vértice: $(0,1)$, eje de simetría: $x = 0$. El vértice es un máximo. Ramas hacia abajo.

$h(x) \rightarrow$ Vértice: $(-2,1)$, eje de simetría: $x = -2$. El vértice es un mínimo. Ramas hacia arriba.

65. Página 214

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 8$. Vértice: $\left(-3, \frac{-6^2 + 4 \cdot 8}{4}\right) = (-3, -1)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje *X*: $x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow (-4,0) \end{cases}$

Corte con el eje *Y*: $y = 8 \rightarrow (0,8)$

x	–4	–3	–2	–1	0
y	0	–1	0	3	8

b) $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. Vértice: $\left(-2, \frac{-4^2 - 4 \cdot 5}{4}\right) = (-2, -9)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow (1,0) \\ x_2 = -5 \rightarrow (-5,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: $y = -5 \rightarrow (0,-5)$

x	−5	−3	−2	0	1
y	0	−8	−9	−5	0

c) $a = -1$, $b = -6$, $c = -8$. Vértice: $\left(-3, \frac{-6^2 + 4 \cdot 8}{-4}\right) = (-3, 1)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje X: $-x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow (-2,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow (-4,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: $y = -8 \rightarrow (0,-8)$

x	−4	−3	−2	−1	0
y	0	1	0	−3	−8

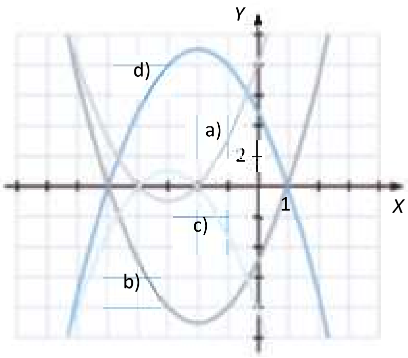
d) $a = -1$, $b = -4$, $c = 5$. Vértice: $\left(-2, \frac{-4^2 - 4 \cdot 5}{-4}\right) = (-2, 9)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje X: $-x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow (1,0) \\ x_2 = -5 \rightarrow (-5,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: $y = 5 \rightarrow (0,5)$

x	−5	−3	−2	0	1
y	0	8	9	5	0



66. Página 214

Sea $f(x)$ la gráfica roja, $g(x)$ la gráfica azul y $h(x)$ la gráfica verde.

El vértice es $(0,0) \rightarrow f(x) = ax^2$. Ramas hacia arriba.

El vértice es $(0,3) \rightarrow g(x) = ax^2 + 3$. Ramas hacia arriba.

El vértice es $(-1,0)$ y no pasa por $(0,0) \rightarrow h(x) = ax^2 + bx + c$. Ramas hacia abajo.

67. Página 214

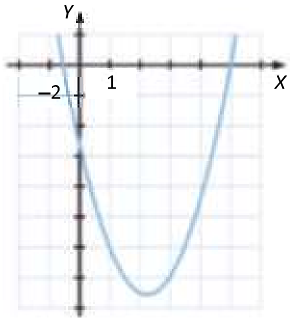
a) $a = 2$, $b = -9$, $c = -5$. Vértice: $\left(-\frac{-9}{2\cdot 2}, \frac{-9^2 - 4\cdot 5\cdot 2}{4\cdot 2}\right) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{121}{8}\right)$

$a = 2 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $2x^2 - 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4\cdot 5\cdot 2}}{2\cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow (5,0) \\ x_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje *Y*: $y = -5 \rightarrow (0,-5)$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	5
y	21	0	-5	$-\frac{121}{8}$	0



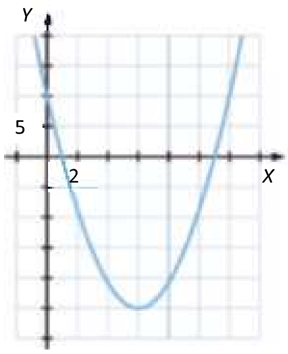
b) $a = 1$, $b = -12$, $c = 11$. Vértice: $\left(6, \frac{-12^2 + 4\cdot 11}{4}\right) = (6,-25)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 12x + 11 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 11}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \rightarrow (11,0) \\ x_2 = 1 \rightarrow (1,0) \end{cases}$

Puntos de corte con el eje *Y*: $y = 11 \rightarrow (0,11)$

x	0	1	6	8	11
y	11	0	-25	-21	0



68. Página 214

a) $y = (x+1)^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 2x + 2$

Vértice: $(-1,1)$ Eje de simetría: $x = -1$ $a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

b) $y = -(x-4)^2 - 2 \rightarrow y = -x^2 + 8x - 18$

Vértice: $(4,-2)$ Eje de simetría: $x = 4$ $a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

c) $y = 2(x-1)^2 - 5 \rightarrow y = 2x^2 - 4x - 3$

Vértice: $(1,-5)$ Eje de simetría: $x = 1$ $a = 2 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

d) $y = -(x+5)^2 + 3 \rightarrow y = -x^2 - 10x - 22$

Vértice: $(-5,3)$ Eje de simetría: $x = -5$ $a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

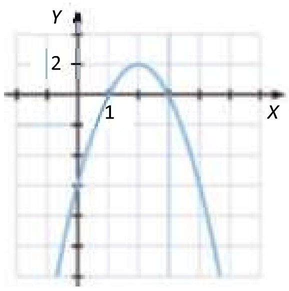
69. Página 214

Vértice: $(2,2) \rightarrow f(x) = a(x-2)^2 + 2 \xrightarrow{a=-2} f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

Puntos de corte con el eje *X:* $-2x^2 + 8x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{-2 \cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow (1,0) \\ x_2 = 3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y:* $y = -6 \rightarrow (0,-6)$

x	0	1	2	3	4
y	−6	0	2	0	−6



70. Página 214

a) Vértice: $(3,0) \rightarrow$ Corresponde a la gráfica azul.

b) Eje de simetría: $x = -\dfrac{3}{2} \rightarrow$ Corresponde a la gráfica verde.

c) Vértice: $(0,-1) \rightarrow$ Corresponde a la gráfica roja.

d) $a < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo $\rightarrow$ Corresponde a la gráfica morada.

71. Página 214

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por el punto $(0,2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow c = 2$

$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 2 = 0 \\ 4a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow 2a + 1 = -2a - 1 \rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$b = 2a + 1 \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} b = 0 \rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por el punto $(0,-3) \to f(0) = -3 \to c = -3$

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 16a - 4b - 3 = 0 \\ 16a + 4b - 3 = 0 \end{cases} \to \frac{16a-3}{4} = \frac{-16a+3}{4} \to a = \frac{3}{16}$$

$$b = \frac{16a-3}{4} \xrightarrow{a=\frac{3}{16}} b = 0 \to f(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(5) = 0 \\ f(3) = 3 \end{cases} \to \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases} \to \begin{cases} c = -a - b \\ 25a + 5b - a - b = 0 \to b = -6a \\ 9a + 3b - a - b = 3 \xrightarrow{b=-6a} a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ c = 5a \end{cases} \xrightarrow{a=-\frac{3}{4}} \begin{cases} b = \frac{9}{2} \\ c = -\frac{15}{4} \end{cases} \to f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{15}{4}$$

d) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(4) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \to \begin{cases} c = -4a - 2b \\ 16a + 4b - 4a - 2b = 0 \to b = -6a \\ a + b - 4a - 2b = 1 \xrightarrow{b=-6a} a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -6a \\ c = 8a \end{cases} \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} \begin{cases} b = -2 \\ c = \frac{8}{3} \end{cases} \to f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}$$

73. Página 215

$$y = -x^2 + 2x + 2 \xrightarrow{y=x} -x^2 + x + 2 = 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{-2} \to \begin{cases} x_1 = -1 \xrightarrow{y=x} (-1,-1) \\ x_2 = 2 \xrightarrow{y=x} (2,2) \end{cases}$$

74. Página 215

$$y = -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{y=x+1} -x^2 + x + 2 = 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{-2} \to \begin{cases} x_1 = -1 \xrightarrow{y=x+1} (-1,0) \\ x_2 = 2 \xrightarrow{y=x+1} (2,3) \end{cases}$$

75. Página 215

La recta $y = mx + n$. Pasa por el punto $(0,3) \to n = 3$ y pasa por $(-3,0) \to 0 = -3m + 3 \to m = 1$

La recta es $y = x + 3$.

La parábola $y = ax^2 + bx + c$. Tiene como vértice el punto $(-1,0) \to y = a(x+1)^2$ y pasa por el punto $(0,1) \to a = 1$.

La parábola es $y = (x+1)^2 \to y = x^2 + 2x + 1$

Los puntos de intersección son $(-2,1)$ y $(1,4)$.

76. Página 215

a) Calculamos la ecuación de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por el punto $(0,0) \to f(0) = 0 \to c = 0$

Pasa por los puntos $(1,3)$ y $(3,3) \to \begin{matrix} f(1) = 3 \\ f(3) = 3 \end{matrix} \to \begin{cases} a + b = 3 \\ 9a + 3b = 3 \end{cases} \to 3 - a = 1 - 3a \to a = -1$

$b = 1 - 3a \xrightarrow{a=-1} b = 4 \to f(x) = -x^2 + 4x$

Vemos ahora dónde se corta con la función dada: $x + 2 = -x^2 + 4x \to x^2 - 3x + 2 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte son (1, 3) y (2, 4).

b) Calculamos la ecuación de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por el punto $(0,2) \to f(0) = 2 \to c = 2$

Pasa por los puntos $(-1,5)$ y $(2,2) \to \begin{matrix} f(-1) = 5 \\ f(2) = 2 \end{matrix} \to \begin{cases} a - b + 2 = 5 \\ 4a + 2b + 2 = 2 \end{cases} \to a - 3 = -2a \to a = 1$

$b = a - 3 \xrightarrow{a=1} b = -2 \to f(x) = x^2 - 2x + 2$

Calculamos ahora la función lineal $y = mx + n$.

Para por (0, 5) $\to 5 = n$ y pasa por (–4, 0) $\to 0 = -4m + 5 \to m = \frac{5}{4}$. Luego $y = \frac{5}{4}x + 5$

Vemos ahora dónde se cortan: $\frac{5}{4}x + 5 = x^2 - 2x + 2 \to x^2 - \frac{13}{4}x - 3 = 0 \to 4x^2 - 13x - 12 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Los puntos de corte son (4, 10) y $\left(-\frac{3}{4}, \frac{65}{16}\right)$

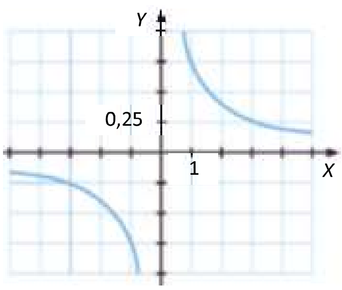
77. Página 215

a)

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$

b) $y = \frac{3}{4x}$

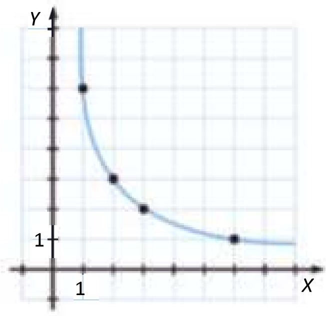
c)



78. Página 215

a) $0{,}02 \cdot 300 = 0{,}1 \cdot 60 = 0{,}2 \cdot 30 = 0{,}5 \cdot 12 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = k = 6 \longrightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

b)



c) Los valores de y crecen hasta infinito.

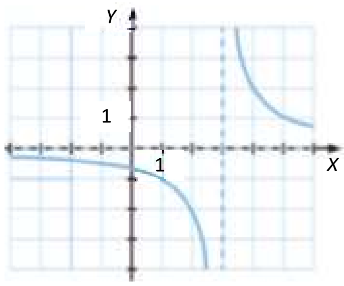
x	0,00001	0,0001	0,001	0,01
y	600 000	60 000	6 000	600

79. Página 215

a) $a = 3$, $b = 0 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 3$ e $y = 0$.

$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

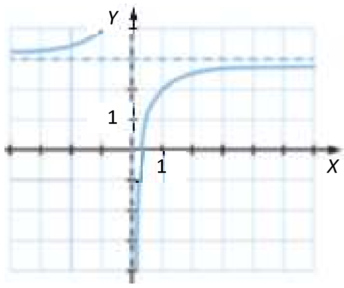
Dibujamos la gráfica de $y = 2/x$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $a = 0$, $b = 3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = 0$ e $y = 3$.

$k = -1 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

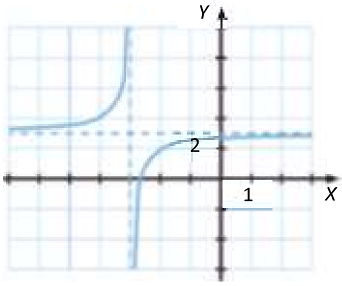
Dibujamos la gráfica de $y = -1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $a = -3$, $b = 3 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 3$.

$k = -1 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

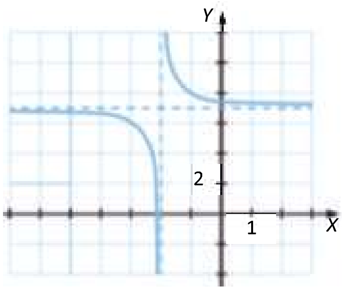
Dibujamos la gráfica de $y = -1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $a = -2$, $b = 7 \longrightarrow$ Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 7$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = 1/x$ desplazada a los nuevos ejes.



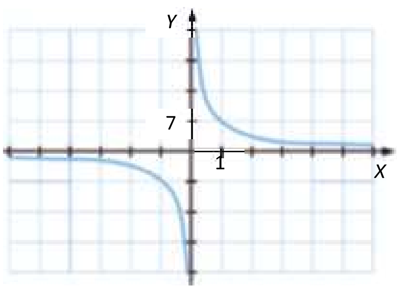
80. Página 215

a) La función no está definida para $x = 0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = \dfrac{7}{-x} = -\dfrac{7}{x} = -f(x)$

$k = 7 > 0 \longrightarrow$ La función es decreciente y la gráfica está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	-7	-14	14	7	$\frac{7}{2}$

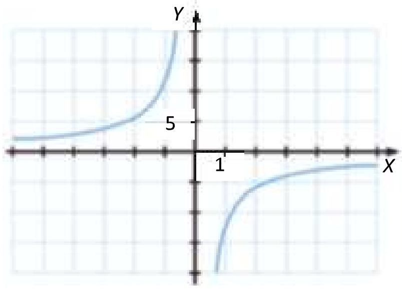


b) La función no está definida para $x = 0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = -\frac{11}{-x} = \frac{11}{x} = -f(x)$

$k = -11 < 0 \rightarrow$ La función es creciente y la gráfica está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{2}$	11	-11	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{11}{3}$

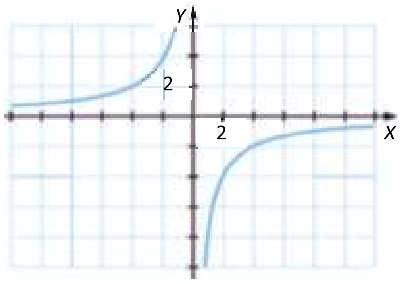


c) La función no está definida para $x = 0$. Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = -\frac{8}{-x} = \frac{8}{x} = -f(x)$

$k = -8 < 0 \rightarrow$ La función es creciente y la gráfica está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	8	16	-16	-8	-4



81. Página 215

a) Es una función de la forma $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$.

Los ejes de simetría son $x = 1$ e $y = 3$, por tanto $a = 1$ y $b = 3$. La función pasa por el punto (2,5).

$$f(x) = \frac{k}{x-1} + 3 \xrightarrow{x=2, y=5} 5 = k + 3 \rightarrow k = 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$$

b) Es una función de la forma $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$.

Los ejes de simetría son $x = 3$ e $y = 3$, por tanto $a = 3$ y $b = 3$. La función pasa por el punto (4,0).

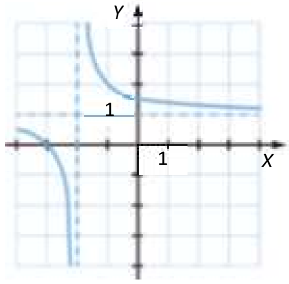
$$f(x) = \frac{k}{x-3} + 3 \xrightarrow{x=4, y=0} 0 = k + 3 \rightarrow k = -3 \rightarrow f(x) = -\frac{3}{x-3} + 3$$

83. Página 216

a) $y=\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+1\rightarrow\ a=-2, b=1\rightarrow$ Las asíntotas son $x=-2$ e $y=1$.

$k=1>0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

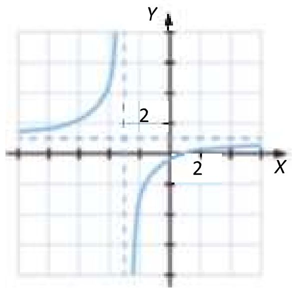
Dibujamos la gráfica de $y=\dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $y=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{-4}{x+3}+1\rightarrow\ a=-3, b=1\rightarrow$ Las asíntotas son $x=-3$ e $y=1$.

$k=-4<0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

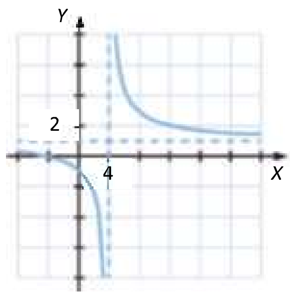
Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{4}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $y=\dfrac{x+5}{x-4}=\dfrac{9}{x-4}+1\rightarrow a=4, b=1\rightarrow$ Las asíntotas son $x=4$ e $y=1$.

$k=9>0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

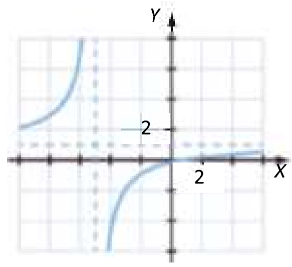
Dibujamos la gráfica de $y=\dfrac{9}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $y=\dfrac{x-1}{x+5}=\dfrac{-6}{x+5}+1\rightarrow\ a=-5, b=1\rightarrow$ Las asíntotas son $x=-5$ e $y=1$.

$k=-6<0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{6}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

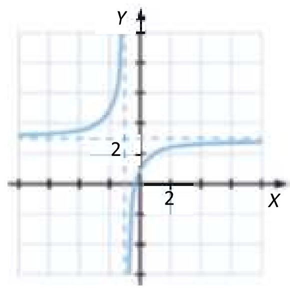


84. Página 216

a) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+3\rightarrow\ a=-1, b=3\rightarrow$ Las asíntotas son $x=-1$ e $y=3$.

$k=-2<0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.º y 4.º.

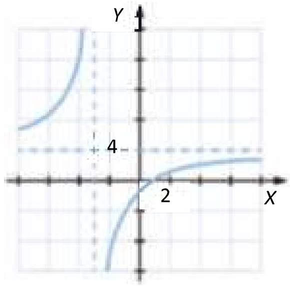
Dibujamos la gráfica de $y=-\dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



b) $y = \frac{4x-2}{x+3} = \frac{-14}{x+3} + 4 \rightarrow\ a = -3, b = 4 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 4$.

$k = -14 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2. ° y 4.°.

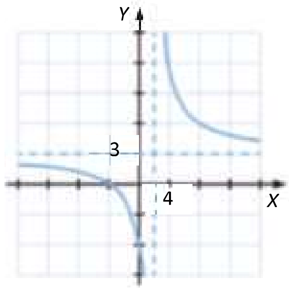
Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{14}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $y = 3\frac{x+4}{x-2} = \frac{18}{x-2} + 3 \rightarrow\ a = 2, b = 3 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = 3$.

$k = 18 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.° y 3.°.

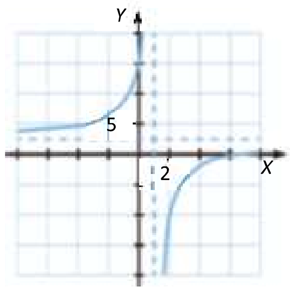
Dibujamos la gráfica de $y = \frac{18}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



d) $y = 2\frac{x-7}{x-1} = \frac{-12}{x-1} + 2 \rightarrow\ a = 1, b = 2 \rightarrow$ Los ejes son $x = 1$ e $y = 2$.

$k = -12 < 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 2.° y 4.°.

Dibujamos la gráfica de $y = -\frac{12}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



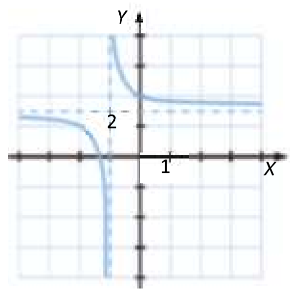
85. Página 216

a) $y = \frac{3x+4}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 3 \rightarrow\ a = -1, b = 3$

Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 3$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.° y 3.°.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

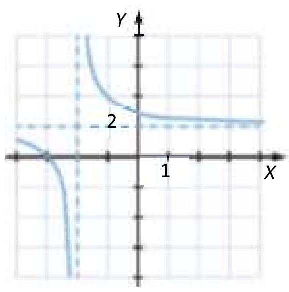


b) $y = \frac{2x+6}{x+2} = \frac{2}{x+2} + 2 \rightarrow\ a = -2, b = 2$

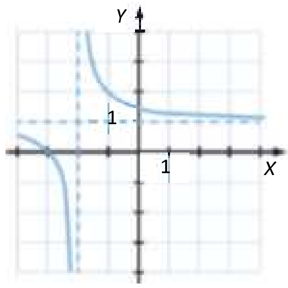
Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 2$.

$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.° y 3.°.

Dibujamos la gráfica de $y = \frac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



c) $y = \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{1}{x+2} + 1 \rightarrow \ a = -2, b = 1$

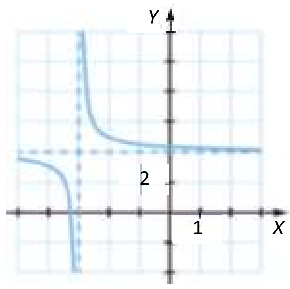


Las asíntotas son $x = -2$ e $y = 1$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

d) $y = \dfrac{4x+13}{x+3} = \dfrac{1}{x+3} + 4 \rightarrow \ a = -3, b = 4$



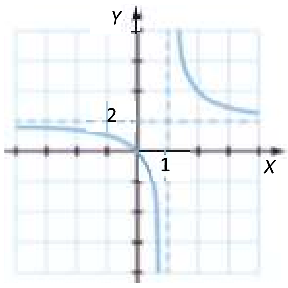
Las asíntotas son $x = -3$ e $y = 4$.

$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

86. Página 216

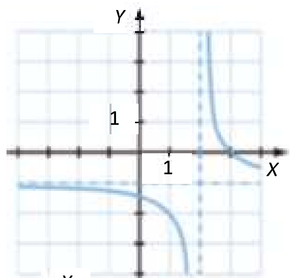
a) $y = \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2}{x-1} + 2 \rightarrow a = 1, b = 2 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 2$.



$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

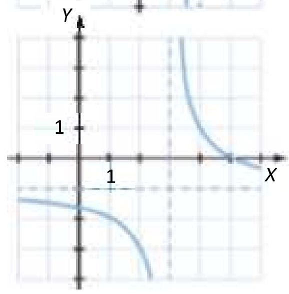
b) $y = \dfrac{3-x}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} - 1 \rightarrow \ a = 2, b = -1 \rightarrow$ Las asíntotas son $x = 2$ e $y = -1$.



$k = 1 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

c) $y = \dfrac{5-x}{x-3} = \dfrac{2}{x-3} - 1 \rightarrow \ a = 3, b = -1 \rightarrow$ Los ejes son $x = 3$ e $y = -1$.



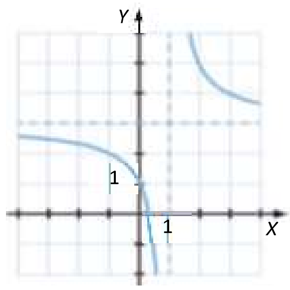
$k = 2 > 0 \longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y = \dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.

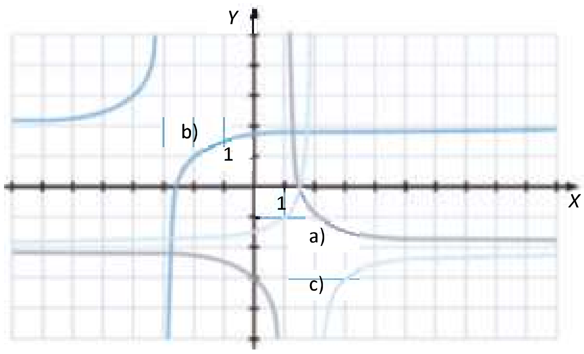
d) $y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3\rightarrow\ a=1,b=3\rightarrow$ Las asíntotas son $x=1$ e $y=3$.

$k=2>0\longrightarrow$ La gráfica de la función de la que procede está en los cuadrantes 1.º y 3.º.

Dibujamos la gráfica de $y=\dfrac{2}{x}$ desplazada a los nuevos ejes.



87. Página 216



88. Página 216

a) Los ejes de simetría son $x=2$ e $y=1$. La función es decreciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 1.º y 3.º.

b) Los ejes de simetría son $x=-2$ e $y=2$. La función es decreciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 1.º y 3.º.

c) Los ejes de simetría son $x=1$ e $y=2$. La función es creciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 2.º y 4.º.

d) Los ejes de simetría son $x=-1$ e $y=-2$. La función es creciente y la función de la que procede está definida en los cuadrantes 2.º y 4.º.

89. Página 216

$f(x)$ gráfica verde, $g(x)$ gráfica roja, $h(x)$ gráfica marrón

Son funciones hiperbólicas de la forma $y=\dfrac{k}{x-a}+b$.

Los ejes de simetría de $f(x)$ son $x=-1$ y $y=0$. La gráfica pasa por el punto (0,1).

$$y=\frac{k}{x+1}\xrightarrow{x=0,y=1}k=1\rightarrow f(x)=\frac{1}{x+1}$$

Los ejes de simetría de $g(x)$ son $x=1$ e $y=3$. La gráfica pasa por el punto (3,2).

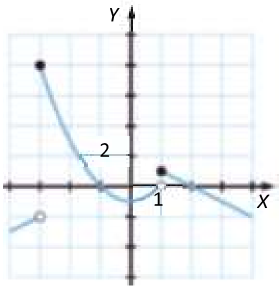
$$y=\frac{k}{x-1}+3\xrightarrow{x=3,y=2}2=\frac{k}{2}+3\rightarrow k=-2\rightarrow g(x)=\frac{-2}{x-1}+3$$

Los ejes de simetría de $h(x)$ son $x=0$ e $y=0$. La gráfica pasa por el punto (5,1).

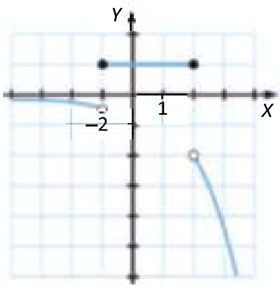
$$y=\frac{k}{x}\xrightarrow{x=5,y=1}k=5\rightarrow h(x)=\frac{5}{x}$$

91. Página 216

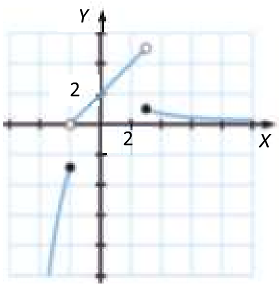
a)



b)



c)



92. Página 217

$h(t)$ es una parábola. Tenemos que $a = -1 \rightarrow$ el vértice es un máximo.

Calculamos el vértice para obtener la altura y el tiempo necesario para alcanzar el punto más alto de la trayectoria $\rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right) \xrightarrow{a=-1, b=2} (1,1)$.

La altura máxima es 1 m y el tiempo necesario 1 s.

93. Página 217

a) El punto de ebullición en la cima del Aneto ha disminuido 34,04 décimas de grado. La temperatura de ebullición es $100 - 3{,}404 = 96{,}596$ ºC.

El punto de ebullición en la cima del Everest ha disminuido 88,5 décimas de grado. La temperatura de ebullición es $100 - 8{,}85 = 91{,}15$ ºC.

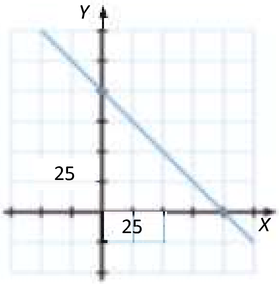
b) Por cada metro de altitud la temperatura disminuye una centésima de décima de grado. La expresión de la función *Temperatura de ebullición del agua (ºC)* – *Altitud (m)* viene dada por $f(x) = 100 - \frac{1}{1\,000}x$.

94. Página 217

a) Tenemos que representar la temperatura que debe de ser calentada una sustancia para alcanzar los 100 °C. Esta función viene dada por $f(x) = 100 - x$, donde x es la temperatura actual de la sustancia.

b)

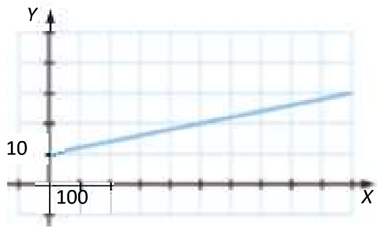
x	0	10	15	20	25
y	100	90	85	80	75



95. Página 217

Gasto	0	25	50	75	100	125	150
Importe	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13

$f(x) = 0{,}02x + 10$



96. Página 217

a) La función que representa esta trayectoria es una parábola.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$

El punto más alto de la trayectoria aparece en el vértice de la parábola.

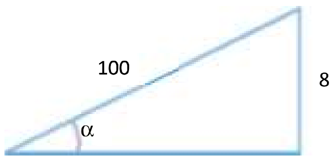
$(2{,}3;3{,}5) \rightarrow f(x) = a(x - 2{,}3)^2 + 3{,}5$

El punto de partida es $(0;4{,}6) \rightarrow 4{,}6 = a(-2{,}3)^2 + 3{,}5 \rightarrow a = 0{,}208$

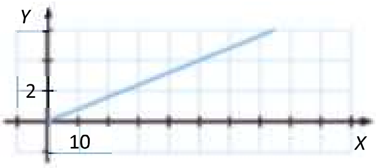
$f(x) = 0{,}208(x - 2{,}3)^2 + 3{,}5$

97. Página 217

Sea x la distancia recorrida y $f(x)$ la altura alcanzada.



$$\frac{8}{100} = \frac{f(x)}{x} \rightarrow f(x) = \frac{8x}{100} = \frac{2x}{25}$$



DEBES SABER HACER

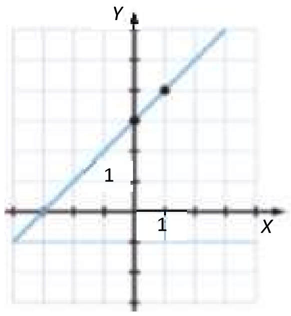
1. Página 217

a) Función lineal

$m = 1 > 0 \rightarrow$ Función creciente

Ordenada en el origen $\rightarrow n = 3$ Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,3)$

$f(x) = x + 3 \xrightarrow{x=1} f(1) = 4 \rightarrow (1,4)$

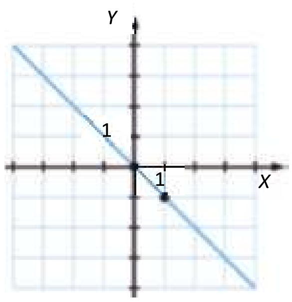


b) Función de proporcionalidad directa

$m = -1 < 0 \rightarrow$ Función decreciente

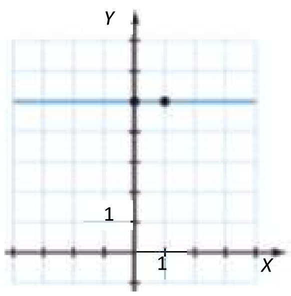
Ordenada en el origen $\rightarrow n = 0$ Punto de corte con el eje $Y \rightarrow (0,0)$

$f(x) = -x \xrightarrow{x=1} f(1) = -1 \rightarrow (1,-1)$



c) Función constante

$f(x) = 5$



2. Página 217

$y = mx + n \rightarrow$ Ordenada en el origen $\rightarrow n = 5$

Pasa por el punto $(-2,2) \xrightarrow{x=-2, y=2} 2 = -2m + 5 \rightarrow m = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 5$

3. Página 217

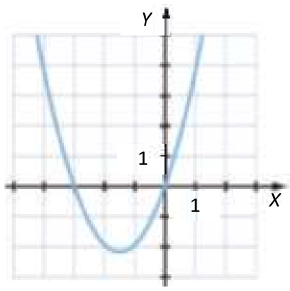
a) $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$. Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3^2}{4}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 3x = 0 \rightarrow (x+3)x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow (-3,0) \\ x_2 = 0 \rightarrow (0,0) \end{cases}$

Corte con el eje Y: (0, 0)

x	-4	-3	$-\frac{3}{2}$	0	1
y	4	0	$-\frac{9}{4}$	0	4

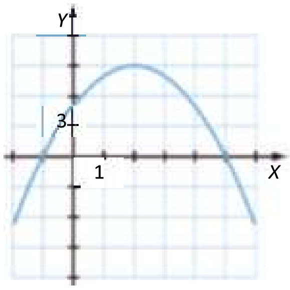


b) $a = -1$, $b = 4$, $c = 5$. Vértice: $\left(\frac{-4}{-2}, \frac{-4^2 - 4 \cdot 5}{-4}\right) = (2,9)$

$a = -1 < 0 \rightarrow$ El vértice es un máximo.

Corte con el eje X: $-x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow (-1,0) \\ x_2 = 5 \rightarrow (5,0) \end{cases}$ Corte con el eje Y: (0, 5)

x	-1	0	2	3	5
y	0	5	9	8	0

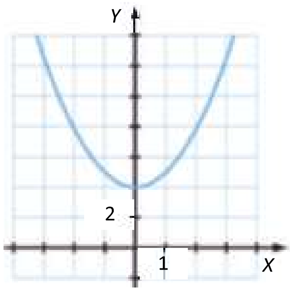


c) $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$. Vértice: (0, 4)

$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow$ No tiene solución. Corte con el eje Y: (0, 4)

x	-2	-1	0	1	2
y	8	5	4	5	8



d) $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$. Vértice: $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3^2-4}{4}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

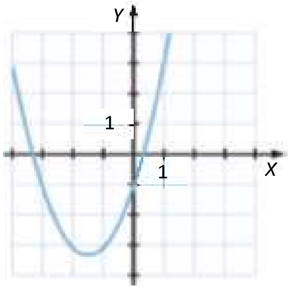
$a = 1 > 0 \rightarrow$ El vértice es un mínimo.

Corte con el eje X: $x^2+3x-1=0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2+4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{13}+3}{2} \end{cases}$

Corte con el eje Y: (0, –1)

Construimos una tabla de valores alrededor del vértice.

x	–3	–2	$-\frac{3}{2}$	0	1
y	–1	–3	$-\frac{13}{4}$	–1	3



4. Página 217

a) $x = x^2+2 \rightarrow x^2-x+2=0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 2}}{2} \rightarrow$ No tiene solución. La intersección es vacía.

b) $-x+4 = x^2+3x+8 \rightarrow x^2+4x+4=0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 4}}{2} = -2$

$f(x) = -x+4 \xrightarrow{x=-2} f(x) = 6 \rightarrow$ La intersección es el punto $(-2,6)$.

c) $5 = x^2+5x+11 \rightarrow x^2+5x+6=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

$f(x) = 5 \xrightarrow{x=-2, x=-3} f(x) = 5 \rightarrow$ La intersección son los puntos $(-2,5)$ y $(-3,5)$.

5. Página 217

a) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{x-2}+1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = 2$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica azul.

b) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}+1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = 1$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica roja.

c) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{x+2}+1 \rightarrow$ Los ejes de simetría son $x = -2$ e $y = 1$. Se corresponde con la gráfica verde.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

98. Página 218

a) Llamamos x al número de máquinas compradas. La función viene dada por $f(x) = 1200x + 2\,250$.

b) $f(13) = 1\,200 \cdot 13 + 2\,250 = 17\,850$ €.

c) La función que relaciona el coste por mantenimiento con el número de máquinas es $g(x) = x^2 + 100$.

$g(x) \le 500 \to x^2 \le 400 \to -20 \le x \le 20 \to$ Solo nos interesa las cantidades positivas. El máximo de cintas que se pueden comprar para pagar menos de 500 € por el mantenimiento son 20.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

99. Página 218

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

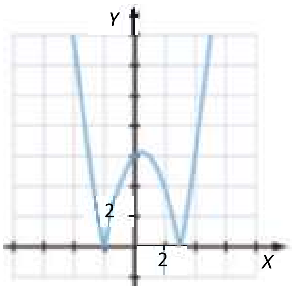
$$\begin{matrix} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f(-1)=8 \end{matrix} \to \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \xrightarrow{c=3} a+b+1=0 \to a=-b-1 \\ a-b+c=8 \end{cases}$$

$$a-b-5=0 \xrightarrow{a=-b-1} b=-3,\ a=-b-1 \xrightarrow{b=-3} a=2 \to f(x)=2x^2-3x+3$$

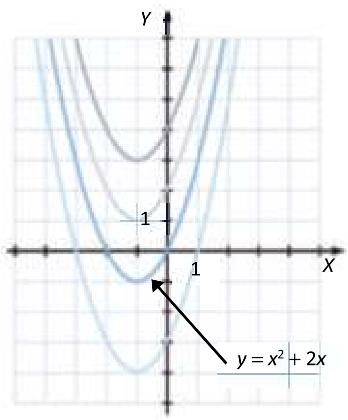
Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, al resolverlo vemos que tiene una sola solución, por lo que hay una función polinómica de grado 2 que cumpla esas condiciones.

b) Hay infinitas funciones polinómicas de grado superior a 2 que cumplen las condiciones, ya que si construimos el sistema dado, tendremos un sistema de 3 ecuaciones no linealmente dependientes, con al menos 4 incógnitas.

100. Página 218



101. Página 218



La gráfica se desplaza verticalmente según los valores de c.

102. Página 218

a) La gráfica solo alcanza el valor $y = 10$ para un valor de x. Tiene una solución.

b) La gráfica alcanza el valor $y = 2$ para tres valores de x. Tiene tres soluciones.

c) La gráfica alcanza el valor $y = -3$ para dos valores de x. Tiene dos soluciones.

103. Página 218

La ecuación tiene tres soluciones para a perteneciente al intervalo $(-3, 5)$.

La ecuación no tiene 4 o más soluciones para ningún valor del parámetro a.

PRUEBAS PISA

104. Página 219

La velocidad de una persona quieta sobre el pasillo móvil, será la diferencia entre las dos velocidades anteriores.