10 Introducción al concepto de límite

PIENSA Y CONTESTA

Según Zenón de Elea, ¿quién ganará la carrera: Aquiles o la tortuga?

Según Zenón de Elea la carrera la ganará la tortuga.

¿Por qué no es correcto el razonamiento de Zenón?

El error del razonamiento de Zenón fue creer que la suma de infinitos tramos, aunque sean infinitamente pequeños, será una distancia infinita y, por tanto, inalcanzable.

¿Qué significa límite en la frase "…su valor exacto es el límite de esta suma $S = 600 + \ldots + \frac{6}{10^n} = \frac{2000}{3}$"?

En la frase, límite significa que la suma de los infinitos tramos que tiene que recorrer Aquiles se aproxima cada vez más al número 666,666… = $\frac{2000}{3}$.

INVESTIGA Y RESUELVE

Las series infinitas atrajeron la atención de los matemáticos desde los tiempos de Newton. No todas las sumas de números cada vez más pequeños tienen límite finito. La suma de la *serie armónica*, $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ no es un número finito. Investiga por qué se la conoce como *serie armónica*.

Esta serie se conoce como serie armónica porque cada término es igual a la media armónica de sus dos términos contiguos.

Es decir, cada término de la serie armónica verifica que $a_n = \dfrac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$.

Euler resolvió el *Problema de Basilea*, formulado por J. Bernoulli, que consiste en calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales: $S = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \ldots$ ¿Cómo lo resolvió?

La función sen x se puede aproximar por un polinomio infinito sen x = $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

El método de Euler consiste en utilizar el polinomio infinito y realizando algunas transformaciones algebraicas obtener que $S = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

Actividades propuestas

1. Calcula el límite de las funciones en los valores indicados.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$**, para $x = 3$ y $x = 1$.**

b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$**, para $x = 0$ y $x = 4$.**

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{3}{3-2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{1-2} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \sqrt{0} - 1 = -1$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \sqrt{4} - 1 = 1$

2. Halla los límites, construyendo una tabla de valores en cada caso para estudiar hacia qué valor tiende la función.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2+x}{x^2-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2+x}{x^2-2} = 0$

x	–1,9	–1,99	–1,999	–2,001	–2,01	–2,1
***f*(*x*)**	0,062 111	0,005 101	0,000 501	–0,000 499	–0,004 901	–0,041 493

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

x	–0,1	–0,01	–0,001	0,1	0,11	0,111
***f*(*x*)**	0,998 334	0,999 983	0,999 999	0,998 334	0,997 985	0,997 948

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,000 01
***f*(*x*)**	0,707 107	0,316 228	0,1	0,031 622	0,01	0,003 162

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

x	1	1,5	1,57	1,5707	1,570 79	1,570 796
***f*(*x*)**	1,557 408	14,101 42	1255,765	10 381,33	158 057,9	3 060 022

3. Calcula los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando *x* tiende a 0 e indica si existe el límite en ese punto.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

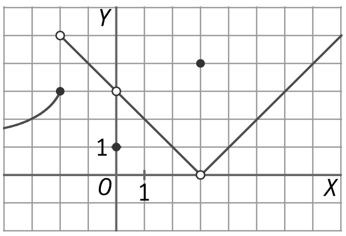
x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000 01	0,000 001
***f*(*x*)**	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	–0,000 01	–0,000 001
***f*(*x*)**	–10	–100	–1000	–10 000	–100 000	–1 000 000

Como los límites por la derecha y por la izquierda son distintos, la función no se aproxima a un único valor cuando *x* tiende a 0, por lo que no existe el límite en ese punto.

4. A partir de la gráfica de *f*(*x*), indica el valor de la función, los límites laterales y el límite si existe en:



a) $x = -2$ **c)** $x = 1$

b) $x = 0$ **d)** $x = 3$

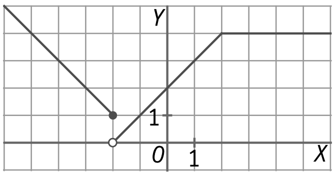
a) $f(-2) = 3$ y $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 5$.

b) $f(0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$

c) $f(1) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

d) $f(3) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 5$

5. **Representa la función $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x+2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Calcula los límites laterales cuando x tiende a –2 y a 2. ¿Existe el límite en cada caso?**



$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$.

6. **Calcula los límites laterales para $x = 2$ de la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5-x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?**

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x-1) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (5-x^2) = 1$

7. **Halla el valor de los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^2-2}{2-x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^2-4}{2-x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2-2}{2-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2-4}{2-x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^2-2}{2-x}\right) = -\infty$

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,000 01	2,000 001
f(x)	–24,1	–204,01	–2004,001	–20 004	–200 004	–2 000 004

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x^2-4}{2-x}\right) = -4$

x	2,1	2,01	2,001	2,000 1	2,000 01	2,000 001
f(x)	–4,1	–4,01	–4,001	–4,0001	–4,000 01	–4,000 001

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2-2}{2-x}\right) = +\infty$

x	1,9	1,99	1,999	1,999 9	1,999 99	1,999 999
f(x)	16,1	196,01	1996,001	19 996	199 996	1 999 996

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2-4}{2-x}\right) = -4$

x	1,9	1,99	1,999	1,999 9	1,999 99	1,999 999
f(x)	–3,9	–3,99	–3,999	–3,9999	–3,999 99	–3,999 999

8. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+1}{5+x}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{2x^2+1}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{5x-30}\right)$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{5-x^2}\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+1}{5+x}\right)=-2$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
***f*(*x*)**	–0,166 667	–1,266 667	–1,895 238	–1,989 055	–1,998 901	–1,999 890

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{2x^2+1}\right)=2$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
***f*(*x*)**	1	1,940 299	1,994 900	1,999 499	1,999 949	1,999 995

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{5x-30}\right)=0,2=\frac{1}{5}$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
***f*(*x*)**	–0,12	0,6	0,217 021	0,201 610	0,200 160	0,200 016

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{5-x^2}\right)=-1$

x	–1	–10	–100	–1000	–10 000	–100 000
***f*(*x*)**	1,25	–1,284 211	–1,020 710	–1,002 007	–1,000 200	–1,000 020

9. Con la ayuda de la calculadora completa la tabla de valores para determinar el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^5}\right)$

x	**2**	**10**	**20**	**30**	**50**
***f*(*x*)**	•	•	•	•	•

x	**2**	**10**	**20**	**30**	**50**
***f*(*x*)**	0,230 908	0,220 265	151,6141	439 772,6	$1,6\cdot 10^{13}$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^5}\right)=+\infty$

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{x-2} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{2x-2}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$**, calcula los límites cuando *x* tiende a –1, a 2 y en +∞ y en –∞.**

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\dfrac{5}{3}$

x	–1,01	–1,001	–1,0001	–0,9999	–0,999	–0,99
f(x)	–1,664 452	–1,666 445	–1,666 644	–1,666 689	–1,666 889	–1,668 896

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{2}{3}$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,620 690	0,662 207	0,666 222	0,667 111	0,671 096	0,709 677

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
f(x)	0	1,636 364	1,960 396	1,996 004	1,999 600	1,999 960

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$

x	–1	–10	–100	–1000	–10 000	–100 000
f(x)	–1,666 667	–1,166 667	–1,019 608	–1,001 996	1,000 120	–1,000 020

11. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ **y** $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=5$**, calcula:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)+\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2+5=7$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2\cdot 5=10$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}=\dfrac{2}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to 1} g(x)}=2^5=32$

12. Calcula los siguientes límites utilizando sus propiedades.

a) $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-7)$

b) $\lim\limits_{x\to 4}(x^{20}-6)(x-4)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)(x+1)$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(6+4x)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-7)=\lim\limits_{x\to -3} x^2-\lim\limits_{x\to -3} 7=9-7=2$

b) $\lim\limits_{x\to 4}(x^{20}-6)(x-4)=\lim\limits_{x\to 4}(x^{20}-6)\cdot\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)(x+1)=\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1\cdot 2=2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(6+4x)^{2x}=\left[\lim\limits_{x\to -1}(6+4x)\right]^{\lim\limits_{x\to -1} 2x}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

13. Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 5}(f+g)(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(g-f)(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 5} 3\cdot g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

$\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}(2x+1) = 10+1 = 11$

$\lim\limits_{x\to 5} g(x) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{2x-3}{x+2}\right) = \dfrac{7}{7} = 1$

a) $\lim\limits_{x\to 5}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 5} f(x) + \lim\limits_{x\to 5} g(x) = 11+1 = 12$

b) $\lim\limits_{x\to 5}(g-f)(x) = \lim\limits_{x\to 5} g(x) - \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1-11 = -10$

c) $\lim\limits_{x\to 5} 3\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to -2} 3\cdot \lim\limits_{x\to 5} g(x) = 3\cdot \lim\limits_{x\to 5} g(x) = 3\cdot 1 = 3$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 5} f(x)}{\lim\limits_{x\to 5} g(x)} = \dfrac{11}{1} = 11$

14. Actividad resuelta

15. Calcula el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ y el $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{-1+1}{-1-3} = 0$

16. Sabiendo el valor de los límites, halla los límites siguientes o indica si son indeterminaciones o no tienen solución.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to +\infty} j(x) = 4$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)\cdot j(x)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{j(x)}{g(x)}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)\cdot h(x)\right]$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)\cdot j(x)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to +\infty} j(x) = +\infty\cdot 4 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminación

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{j(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to +\infty} j(x)}{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)} = \dfrac{4}{-\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)\cdot h(x)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty\cdot 0$. Indeterminación

17. A partir de las siguientes funciones, $f(x) = -5x$ y $g(x) = x^2 - 2$, calcula los valores de los límites que aparecen a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{g(x)}\right]^{f(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{g(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{f(x)}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{g(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)\right]^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{x^2-2} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(\dfrac{-5}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{-5}{x}}{1-\dfrac{2}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{-5x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{g(x)}\right]^{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2-2}\right)^{-5x} = 0^{-\infty} = \dfrac{1}{0^{+\infty}} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} 4\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = 4^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)} = 4^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[g(x)\right]^{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-2\right)^{-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-2\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty} -5x} = (+\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

18. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^2+6x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x^3-x^2+2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^2+6x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^2+6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{6}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{6}{x}} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x^3-x^2+2} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x^3-x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}} = \dfrac{0}{2} = 0$

19. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}\right]$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(x+1)-(x^2-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+2x+6}{x^2+4x+3}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación

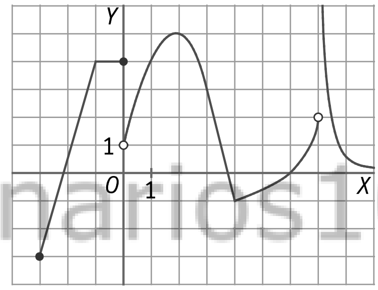
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+2x+6}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-2+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{-2}{1}=-2$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+5}=\infty-\infty$. Indeterminación

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x-4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

20. Clasifica las discontinuidades de la siguiente función.



Indica los intervalos en los que es continua.

La función es continua en [–3, 0) ∪ (0, 7) ∪ (7, +∞).

En $x = 0$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito porque $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=4\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

En $x = 7$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to7^+}f(x)=+\infty$.

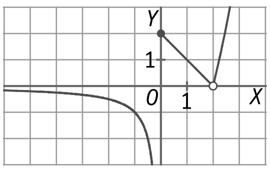
21. Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ 2-x & \text{si } 0\le x\le 2\\ x^2-4 & \text{si } 2<x\end{cases}$.

Esboza su gráfica de forma aproximada.

La función es continua en (–∞, 0) ∪ (0, 2) ∪ (2, +∞).

En $x = 0$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable porque $f(2)$ no existe y $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.



22. Estudia la continuidad y clasifica las funciones de: $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+3x+2}$

$f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{2(x+1)}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}-\{-1,-2\} \Rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Si $x = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+2}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{x+2}=2 \Rightarrow$ En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable.

Si $x = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2}{x+2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2}{x+2}=-\infty \Rightarrow$ En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

23. Actividad resuelta

24. Halla los valores *b* y *c* para que la función *f*(*x*) sea continua en toda la recta real y represéntala.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<b \\ 2 & \text{si } b\le x\le c \\ 6-x & \text{si } c<x \end{cases}$$

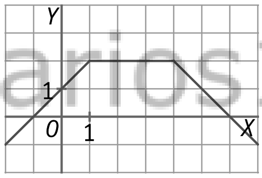
Los puntos que se deben estudiar es $x = b$ y $x = c$, ya que en estos valores cambia la definición de la función.

$f(b) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}(x+1)=b+1$ $\qquad \lim\limits_{x\to b^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+}2=2$

Para que sea continua en $x = b$, el valor de la función y de los límites deben coincidir: $2 = b + 1 \Rightarrow b = 1$

$f(c) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}2=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}(6-x)=6-c$

Para que sea continua en $x = c$, el valor de la función y de los límites deben coincidir: $2 = 6 - c \Rightarrow c = 4$



25. Estudia si las siguientes sucesiones son crecientes o decrecientes y si tienen cotas.

a) $a_n=\dfrac{2n+1}{3}$ **b)** $b_n=\dfrac{4n+1}{n+2}$ **c)** $c_n=\dfrac{2n+1}{n^2}$

a) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(n+1)+1}{3}-\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{2n+2+1-2n-1}{3}=\dfrac{2}{3}>0$

Como $a_{n+1} - a_n > 0$, entonces $a_{n+1} > a_n$ y, por tanto, la sucesión es creciente.

La sucesión está acotada inferiormente, ya que $a_1 = \dfrac{2}{3}$.

La sucesión no está acotada superiormente, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n+1}{3}=+\infty$.

b) $b_{n+1}-b_n=\dfrac{4(n+1)+1}{n+1+2}-\dfrac{4n+1}{n+2}=\dfrac{4n+5}{n+3}-\dfrac{4n+1}{n+2}=\dfrac{7}{(n+3)(n+2)}>0$

$b_{n+1} - b_n > 0$, entonces $b_{n+1} > b_n$ y, por tanto, la sucesión es creciente.

La sucesión está acotada inferiormente, ya que $b_1 = \dfrac{5}{3}$.

La sucesión está acotada superiormente, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4n+1}{n+2}=4$.

c) $c_{n+1} - c_n = \dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)^2} - \dfrac{2n+1}{n^2} = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n+1}{n^2} = \dfrac{-2n^4-4n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$

$c_{n+1} - c_n > 0$, entonces $c_{n+1} < c_n$ y, por tanto, la sucesión es decreciente.

La sucesión está acotada inferiormente, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2n+1}{n^2} = 0$.

La sucesión está acotada superiormente, ya que $c_1 = 3$.

26. Calcula los siguientes límites e indica si las sucesiones son convergentes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n(n^2+1)}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^3-2n+2}$

a) La sucesión es convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+n} = \frac{+\infty}{+\infty}\textbf{.} \text{ Indeterminación} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

b) La sucesión es convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^3-2n+2} = \frac{+\infty}{+\infty}\textbf{.} \text{ Indeterminación} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^3-2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \frac{2}{n}}{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

27. Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+3n}{2n-1}\right)^2$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+3n}{2n-1}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{2n-1}\right)^n$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+2n}{3n-1}\right)^{2n}$

a) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}\right]^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} n} 1^{\infty}\textbf{.} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot n} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2n-1}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n-1}} = e^{\frac{2}{2}} = e$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+2n}{3n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+2n}{3n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}\right]^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

28. Resuelve los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+3n}{2n-1}\right)^{\frac{2}{n}}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+2n}{2n-1}\right)^{2n+1}$

Halla el término 1000 de la sucesión y comprueba que se aproxima al límite obtenido.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n}{2n-1}\right)^{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{2}{n}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}=1$$

$$a_{1000}=\left(\frac{2+3\cdot 1000}{2\cdot 1000-1}\right)^{\frac{2}{1000}}=\left(\frac{3002}{1999}\right)^{0{,}002}=1{,}000\,814$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+2n}{2n-1}\right)^{2n+1}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+2n}{2n-1}\right)\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)}=1^{+\infty}$$ **.** Indeterminación

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+2n}{2n-1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{3}}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{3}}\right)^{\frac{2n-1}{3}\cdot\frac{3}{2n-1}\cdot(2n+1)}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{3}}\right)^{\frac{2n-1}{3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{2n-1}}=e^{3}$$

$$a_{1000}=\left(\frac{2+2\cdot 1000}{2\cdot 1000-1}\right)^{2001}=\left(\frac{2002}{1999}\right)^{2001}=20{,}100\,614$$

29. Completa la tabla de valores en tu cuaderno para determinar la tendencia de las siguientes funciones en el punto x= 2: $f(x) = x^2 - 2$, $g(x)=\dfrac{4}{2-x}$.

x	1	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	3
$f(x)$	•	•	•	•	•	•	•	•
$g(x)$	•	•	•	•	•	•	•	•

¿Cuáles parecen ser los siguientes límites? $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

x	1	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	3
$f(x)$	–1	1,61	1,9601	1,996 001	2,004 001	2,0401	2,41	7
$g(x)$	3	40	400	4000	–4000	–400	–40	–4

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ No existe.

30. Actividad resuelta

31. Determina la tendencia de la función $h(x)=\sqrt{x^2+x-6}$ en el punto x = 2, construyendo en tu cuaderno una tabla de valores. ¿Cuáles parecen ser los límites? $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

x	1	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	3
$h(x)$	No existe	No existe	No existe	No existe	0,070 718	0,223 830	0,51	2,449 490

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ No existe. $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ No existe.

32. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-5$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=7$, calcula los siguientes límites en el caso de que existan.

a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e) $\lim\limits_{x\to a}[g(x)]^{f(x)}$ g) $\lim\limits_{x\to a}[g\circ f](x)$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ d) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to a}[f\circ g](x)$ h) $\lim\limits_{x\to a}[(f\circ g)(x)]^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=3-2=1$

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)=3(-2)=-6$

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{-3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=3^{-2}$

e) $\lim\limits_{x\to a}[g(x)]^{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}[g(x)]^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=(-2)^3=-8$

f) Como $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f\circ g](x)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-5$

g) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[g\circ f](x)=\lim\limits_{x\to 3} g(x)=7$

h) Como $\lim\limits_{x\to a}[f\circ g](x)-5<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[(f\circ g)(x)]^{g(x)}$ no existe.

33. La función $f(x)=\dfrac{2x-2}{\text{sen}(x-1)}$ no existe en $x = 1$ pero sí en los puntos cercanos a 1. Completa la tabla de valores para estudiar la tendencia de la función cuando $x \to 1$.

x	**0,9**	**0,99**	**0,999**	**0,9999**	**0,999 99**
***f*(x)**	•	•	•	•	•
x	**1,1**	**1,01**	**1,001**	**1,0001**	**1,000 01**
***f*(x)**	•	•	•	•	•

Utiliza la calculadora para hacer los cálculos en radianes.

x	**0,9**	**0,99**	**0,999**	**0,9999**	**0,999 99**
***f*(x)**	2,003 337 226	2,000 033 334	2,000 000 333	2,000 000 003	2,000 000 000 03
x	**1,1**	**1,01**	**1,001**	**1,0001**	**1,000 01**
***f*(x)**	2,003 337 226	2,000 0333 334	2,000 000 333	2,000 000 003	2,000 000 000 03

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\text{sen}(x-1)}=2$

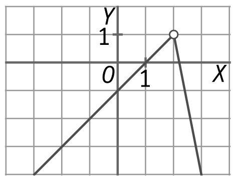
34. Con la ayuda de una tabla de valores, halla los límites laterales para $x = 2$ de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ 5-x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Representa su gráfica de forma aproximada.

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
***f*(x)**	0,9	0,99	0,999	0,995 999	0,9599	0,59

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$



35. Sea $f(x)=(3+x)^{\frac{1}{x-1}}$. Calcula, ayudándote de tu calculadora, *f*(2), *f*(1,1), *f*(1,02), *f*(0), *f*(0,9), *f*(0,98). ¿Qué te sugieren estos resultados acerca de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

x	2	1,1	1,02	0	0,9	0,98
***f*(x)**	5	$1{,}34\cdot 10^{6}$	$1{,}63\cdot 10^{30}$	0,333 333	$1{,}22\cdot 10^{-6}$	$1{,}01\cdot 10^{-30}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

36. Indica cuáles de los siguientes límites dan lugar a indeterminaciones y cuáles pueden calcularse directamente. En ese caso, calcula su valor.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x^2)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-2x}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)^x$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{3+x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-x^2)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)^x$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-2x}{3+x}\right)^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x^2)=\infty-\infty$. Indeterminación

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-x^2)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-2x}$. No existe porque $D(f)=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)^x$. No existe porque $D(f)=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)^x=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{3+x}\right)^x=\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminación

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-2x}{3+x}\right)^x=\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminación

37. Compara los valores de las funciones $f(x)=\frac{3x^2-2x+6}{1+x}$ y $g(x)=3x-5$ cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Puedes hacerlo completando la tabla.

x	99	999	9999	–101	–1001	–10 001
$f(x)$	•	•	•	•	•	•
$g(x)$	•	•	•	•	•	•

x	99	999	9999	–101	–1001	–10 001
$f(x)$	292,11	2992,011	29 992,001	–308,11	–3008,011	–30 008,0011
$g(x)$	292	2992	29 992	–308	–3008	–30 008

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ toman valores muy próximos cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ porque:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{11}{1+x}=0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{11}{1+x}=0.$$

38. Opera y calcula los límites a partir de una tabla de valores.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}:x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}-3x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}-(3x-5)\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}:x\right)=3$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
$f(x)$	3,5	2,6	2,951 089	2,995 011	2,999 500	2,999 950

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}-3x\right)=-5$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
$f(x)$	0,5	–4	–4,891 089	–4,989 011	–4,998 900	–4,999 890

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x+6}{1+x}-(3x-5)\right)=0$

x	1	10	100	1000	10 000	100 000
$f(x)$	11	1	0,108 911	0,010 989	0,001 100	0,000 009

39. Resuelve los siguientes límites, que son indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2x-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x}{x}\right)=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2x-3}\right)=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2x-3}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{(x-3)}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x}{(x-3)}=-\infty$

40. Calcula los siguientes límites de funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{1-x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-5}{1-x^2+4x^3}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{4}{x}-1\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-1}{\dfrac{3}{x}+4}=\dfrac{-1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x(x-2)}{x\left(\dfrac{3}{x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2}{\dfrac{3}{x}+4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{1-x}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-5}{1-x^2+4x^3}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-5}{1-x^2+4x^3}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{4}$

41. Actividad resuelta.

42. Calcula los siguientes límites de funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+5}{3-x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1-x^2+4x^3}{x^3+x^2-5}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x+5}{3-x^2}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x+5}{3-x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-x\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\dfrac{5}{x}}{\dfrac{3}{x}-x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-2x}{3+4x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(x-2)}{x\left(\dfrac{3}{x}+4\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{\dfrac{3}{x}+4} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4-x}{3+4x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(\dfrac{4}{x}-1\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}+4\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{4}{x}-1}{\dfrac{3}{x}+4} = \dfrac{-1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1-x^2+4x^3}{x^3+x^2-5}\right) = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1-x^2+4x^3}{x^3+x^2-5}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}} = 4$

43. Resuelve estas indeterminaciones del tipo ∞ – ∞.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+5}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+5}-\dfrac{x^2+4x-3}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+5}-x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8x+1}{x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(-8+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{5}{x}} = -8$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x+5}-\dfrac{x^2+4x-3}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12x^2-19x+16}{x^2+6x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(-12-\dfrac{19}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12-\dfrac{19}{x}+\dfrac{16}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} = -12$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$

44. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones racionales y clasifica sus discontinuidades.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

a) En $x = 1$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable porque $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$.

La función es continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ y presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

b) En $x = -1$, $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$.

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -1$.

c) En $x = -1$, $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+2}{x+1}=-\infty$.

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -1$.

d) $D(f)=\mathbb{R}\Rightarrow$ La función es continua en toda la recta real.

45. Analiza la continuidad de las funciones y clasifica sus discontinuidades.

a) $f(x)=\begin{cases}-3-x & \text{si } x<-2\\ x+1 & \text{si } -2\le x\le 2\\ 3-x & \text{si } 2<x\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{-3-x}{x^2+2x-3} & \text{si } 1\ne x\ne -3\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x=-3\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$

c) $h(x)=\dfrac{x-7}{4-|x-3|}$

a) La función es continua en $x = -2$ porque $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-1$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$.

La función es continua en $(-\infty, 2)\cup(2,+\infty)$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.

b) La función es continua en $x = -3$ porque $g(-3)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-3-x}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-(3+x)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-1}{x-1}=\dfrac{1}{4}$.

En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-\infty$.

La función es continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

c) En $x = -1$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=-\infty$.

En $x = 7$ hay una discontinuidad evitable porque $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{4-|x-3|}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{7-x}=-1$ pero no existe $h(7)$.

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,7)\cup(7,+\infty)$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -1$ y una discontinuidad evitable en $x = 7$.

46. La función $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}{(x^2-1)(x-4)}$ no está definida en x = ±1 y x = 4.

a) Analiza el tipo de discontinuidad que presenta la función en cada uno de estos puntos.

b) Define los valores que debería tomar la función en esos puntos para evitar esas discontinuidades cuando sea posible.

La función $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}{(x^2-1)(x-4)}=\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)}$ no está definida en x = ±1 y x = 4.

a) En x = –1 presenta una discontinuidad evitable pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-1$ y $f(-1)$ no existe.

En x = 1 presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito pues $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

En x = 4 presenta una discontinuidad evitable porque $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{17}{3}$ y $f(4)$ no existe.

b) Se pueden evitar las discontinuidades en x = –1 y en x = 4.

Para evitar esas discontinuidades la función debería valer $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-1$ y $f(4)=\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\dfrac{17}{3}$.

47. Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua: $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x<-\pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi\le x\le \pi \\ x+b & \text{si } \pi<x \end{cases}$

Represéntala gráficamente.

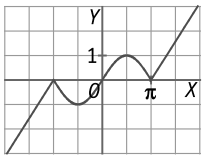
Los puntos que se deben estudiar son $x=-\pi$ y $x=\pi$, ya que en estos valores cambia la definición de la función.

$f(-\pi)=\operatorname{sen}(-\pi)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to -\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -\pi^-}(x+a)=-\pi+a$ $\quad\lim\limits_{x\to -\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -\pi^+}(\operatorname{sen} x)=\operatorname{sen}(-\pi)=0$

Para que sea continua en $x=-\pi$, el valor de la función y de los límites deben coincidir: $0=-\pi+a\Rightarrow a=\pi$

$f(\pi)=\pi+b$ $\quad\lim\limits_{x\to \pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}(\operatorname{sen} x)=\operatorname{sen}\pi=0$ $\quad\lim\limits_{x\to \pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}(x+b)=\pi+b$

Para que sea continua en $x=\pi$, el valor de la función y de los límites deben coincidir: $\pi+b=0\Rightarrow b=-\pi$



48. Halla los valores de a y b para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x^3-4x^2-x+4} & \text{si } -1\ne x\ne 4 \\ a & \text{si } x=-1 \\ b & \text{si } x=4 \end{cases}$$

¿Es discontinua en algún punto?

$f(1)=a$ y $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-4x^2-x+4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{-1}{2}$

$f(4)=b$ y $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-4x^2-x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=\dfrac{1}{3}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ y como $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, la función presenta una discontinuidad de salto infinito en x = 1.

49. La función *f*(*x*) es continua para cierto valor de *a*.

$$f(x)=\begin{cases}8-x^2 & \text{si } -2\geq x\\ a|x| & \text{si } -2<x<2\\ 8-x^2 & \text{si } 2\leq x\end{cases}$$

a) Calcula el valor de *a*.

b) Representa la función para ese valor de *a*.

c) Representa la función para *a* = 1 y explica el tipo de discontinuidad que presenta la función.

a) Los puntos que se deben estudiar son $x = -2$ y $x = 2$, ya que en estos valores cambia la definición de la función.

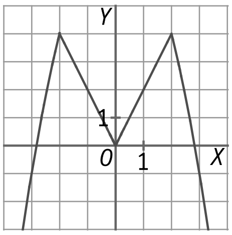
$f(-2) = 4$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(8-x^2) = 4$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(a|x|) = 2a$

Para que sea continua en $x = -2$, el valor de la función y de los límites deben coincidir: $4 = 2a \Rightarrow a = 2$

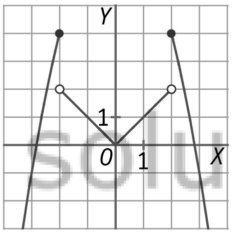
$f(2) = 4$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(8-x^2) = 4$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(a|x|) = 2a = 4$

Para $a = 2$ la función es continua.

b)



c)



En $x = -2$ y en $x = 2$ hay discontinuidades inevitables de salto finito.

50. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3-x}{x+1} & \text{si } -2\leq x\\ \sqrt{x+3} & \text{si } -2<x<1\\ \dfrac{x+5}{x^2+2x} & \text{si } 1\leq x\end{cases}$$

a) Calcula *f*(–3), *f*(–2), *f*(–1), *f*(0,24), *f*(1).

b) Justifica que la función es continua en toda la recta real.

a) $f(-3) = \dfrac{-3-(-3)}{-3+1} = 0$, $f(-2) = \dfrac{-3-(-2)}{-2+1} = 1$, $f(-1) = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2} = 1{,}41$, $f(0{,}24) = \sqrt{0{,}24+3} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$ y

$f(1) = \dfrac{1+5}{1+2} = 2$.

b) Los puntos que se deben estudiar son $x = -2$ y $x = 1$, ya que en estos valores cambia la definición de la función. En el resto de puntos la función es continua.

La función es continua en $x = -2$ porque $f(-2) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-3-x}{x+1} = 1$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{x+3} = 1$.

La función es continua en $x = 1$ porque $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x+3} = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+5}{x^2+2x} = 2$.

La función es continua en toda la recta real.

51. Resuelve los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2n}{3+2n}\right)^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{2-n}{n+2}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3+n}{n}\right)^{n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{1+n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+n}{3+n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

Todos los límites son indeterminaciones tipo 1^{∞}.

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{\frac{1+n}{1}\cdot\frac{1}{1+n}\cdot n}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+1}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}}=e$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2n}{3+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3+2n}{-2}}\right)^{\frac{3+2n}{-2}\cdot\frac{-2}{3+2n}\cdot 2n}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3+2n}{-2}}\right)^{\frac{3+2n}{-2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{3+2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{3+2n}}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2-n}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{4}}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{4}}\right)^{\frac{n+2}{4}\cdot\frac{4}{n+2}\cdot n}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{4}}\right)^{\frac{n+2}{4}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+2}}=e^{4}$$

d) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+n}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot\frac{3}{n}\cdot n}=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n}}=e^{3}$$

e) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+n}\right)^{\frac{n+1}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}=e$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+n}{3+n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3+n}\right)\right]^{\frac{n^2}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3+n}{2}}\right)^{\frac{3+n}{2}\cdot\frac{2}{3+n}\cdot\frac{n^2}{n+1}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3+n}{2}}\right)^{\frac{3+n}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{3+n}\cdot\frac{n^2}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2+4n+3}}=e^{2}$$

52. Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2n^2+5}{n^2+4n} \right)^{n-2}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2n^2+5}{n^2+4n} \right)^{2-n}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{n-2}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{2-n}$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{\frac{2n-3}{1+n}}$

f) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{\frac{1+n}{2n-3}}$

a) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n} \right)^{n-2} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} \right]^{n-2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{4}{n}} \right)^{n-2} = 2^{+\infty} = +\infty$$

b) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n} \right)^{2-n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} \right]^{2-n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{4}{n}} \right)^{2-n} = 2^{-\infty} = 0$$

c) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{n-2} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)} \right]^{n-2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{4}{n}}{2+\frac{5}{n}} \right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

d) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{2-n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)} \right]^{2-n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{4}{n}}{2+\frac{5}{n}} \right)^{2-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

e) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5} \right)^{\frac{2n-3}{1+n}} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)} \right]^{\frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{4}{n}}{2+\frac{5}{n}} \right)^{\frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$$

f) $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n} \right)^{\frac{1+n}{2n-3}} = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} \right]^{\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{4}{n}} \right)^{\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

53. Actividad resuelta

54. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-n}{n+4}\right)^{2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-n-3}{n}\right)^{2(n-1)}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+4}{1-n}\right)^{2n}$ **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^{\frac{2n+1}{3}}$

a) Aparece la indeterminación $(-1)^{\infty}$. Como el exponente siempre es impar, la función es siempre negativa, por lo que se puede escribir el límite como:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-n}{n+4}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[(-1)\cdot\frac{n}{n+4}\right]^{2n+1}=-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n+1}=-\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{n+4}\right)^{2n+1}=-\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-4}}\right)^{\frac{n+4}{-4}}\right]^{\frac{-4}{n+4}\cdot(2n+1)}=$$

$$=-e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8n-4}{n+4}}=-e^{-8}=-\frac{1}{e^8}$$

b) Aparece la indeterminación $(-1)^{\infty}$. Como el exponente siempre es par, la función es siempre positiva, por lo que se puede escribir el límite como:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-n-3}{n}\right)^{2(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\left[(-1)\cdot\frac{n+3}{n}\right]^{2(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{2(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{2(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3}{n}\cdot 2(n-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6(n-1)}{n}}=e^{6}$$

c) Aparece la indeterminación $(-1)^{\infty}$. Como el exponente siempre es par, la función es siempre positiva, por lo que se puede escribir el límite como:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{1-n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left[(-1)\cdot\frac{n+4}{n-1}\right]^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{\frac{n-1}{5}}\right]^{\frac{5}{n-1}\cdot 2n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10n}{n-1}}=e^{10}$$

d) Aparece la indeterminación 1^{∞}. Como el exponente siempre es par, la función es siempre positiva, por lo que se puede escribir el límite como:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{\frac{2(n+1)}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{n+4}\right)^{\frac{2(n+1)}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-3}}\right)^{\frac{2(n+1)}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+4}{-3}}\right)^{\frac{n+4}{-3}}\right]^{\frac{-3}{n+4}\cdot\frac{2(n+1)}{3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}-\left(\frac{2n+1}{n+4}\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

55. Actividad resuelta.

56. Halla el valor de los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)^{\frac{1}{2x-2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}$

a) $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)^{\frac{1}{2x-2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{2x-2}}\right)^{\frac{1}{2x-2}}=e$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(1+\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}=e$

57. Los siguientes límites de funciones dan lugar a indeterminaciones del tipo 1^{∞}. Resuélvelas.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x-2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2-x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x-2}\right)^{2x-2}=e$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot(2-x)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{4x-8}{2x+3}}=e^{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4x-8}{2x+3}}=e^{-2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4x-8}{2x+3}}=e^{-2}$

58. Calcula los límites que dan lugar a indeterminaciones.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x-2}{4x^2-6x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to5^+}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x^2+5x+2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to5^-}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x-2}{4x^2-6x+2}=\frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x-2}{4x^2-6x+2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(2x-1)}{2(x-1)(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x-1}=-2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x^2+5x+2}=\frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow\displaystyle\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x^2+5x+2}=\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(3x+2)}{(3x+2)(x+1)}=\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{3x-2}{x+1}=-12$

c) $\displaystyle\lim_{x\to5^+}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}=\frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow\displaystyle\lim_{x\to5^+}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}=\lim_{x\to5^+}\frac{2(x-5)}{x(x-5)^2}=\lim_{x\to5^+}\frac{2}{x(x-5)}=+\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to5^-}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}=\frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow\displaystyle\lim_{x\to5^-}\frac{2x-10}{x^3-10x^2+25x}=\lim_{x\to5^-}\frac{2(x-5)}{x(x-5)^2}=\lim_{x\to5^-}\frac{2}{x(x-5)}=+\infty$

59. Sean $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{x+3}$ y $g(x)=\dfrac{3x^2+x-7}{3-x}$, calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f-g)(x)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f:g)(x)$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x+3}=+\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)=\infty-(-\infty)=+\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-7}{3-x}=-\infty$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{21x^2-11x-18}{9-x^2}=-21$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f:g)(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+11x^2-7x+3}{3x^3+10x^2-4x-21}=-1$

60. Calcula los siguientes límites de sucesiones racionales.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+5}{n^2-3n+1}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n+5}}{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^2+4n}$ **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sqrt{n+5}}{3n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+5}{n^2-3n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+5}{n^2-3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^2+4n} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^2+4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} = \dfrac{2}{1} = 2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n+5}}{n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n+5}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = 0$

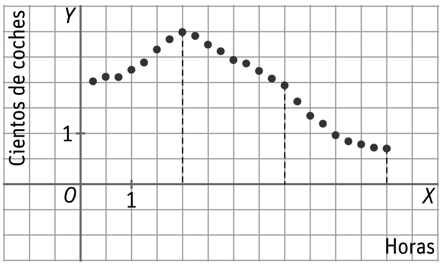
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sqrt{n+5}}{3n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sqrt{n+5}}{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{3+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$

61. Calcula $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}}$ y justifica que $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}}$ no existe.

$\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}} = \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}} = \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} = 0$

El límite no existe porque el dominio de la función son los valores de x que satisfacen $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} \geq 0$. La solución de esta inecuación es $(-\infty,-2) \cup [1, +\infty)$ y, por tanto, la función no existe por la izquierda de $x = 1$.

62. Ana se ha pasado toda la mañana contando los coches que pasaban por su calle para su estudio sobre contaminación. Cada 15 minutos apuntaba en una gráfica la cantidad de coches que habían pasado en ese periodo de tiempo. La gráfica que obtuvo al cabo de 6 horas es:



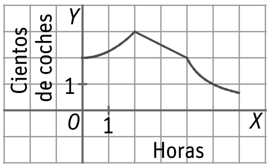
Para obtener una función que se ajuste a la gráfica, le pide ayuda a su hermana mayor, que le da esta respuesta: "La función es continua y pasa por el punto (2, 3). Las constantes *k*, *a* y *b* que faltan las puedes hallar tú."

$$f(x) = \begin{cases} 2+\dfrac{x^2}{k} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ ax+b & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Calcula esas constantes y representa la gráfica de la función para valorar el ajuste. Ayúdate de tu compañero y proponed otra función que también ajuste los datos de Ana.

La función pasa por (2, 3) $\Rightarrow k = 4$. La función es continua en $x = 4 \Rightarrow f(4) = \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = 4a+b = \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = 2 \Rightarrow$ $4a + b = 2$ y es continua en $x = 2 \Rightarrow f(2) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2a+b \Rightarrow 2a + b = 3$.

$$\begin{cases} 2a+b=3 \\ 4a+b=2 \end{cases} \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{2} \Rightarrow b=4 \;\Rightarrow\; f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{x^2}{3} & \text{si } 0\le x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2}+4 & \text{si } 2<x\le 4 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 4<x\le 6 \end{cases}$$



63. Un científico ha obtenido que el número de miles de bacterias que hay en un cultivo de laboratorio viene dado por la función:

$$f(\mathrm{t})=\begin{cases} \dfrac{3}{4}t^2+2 & \text{si } 0\le t\le 2 \\ \dfrac{15}{t+1} & \text{si } 2<t \end{cases}$$

Donde la variable, *t*, representa el tiempo en horas.

Determina:

a) El número de bacterias que había al principio.

b) El número de bacterias que hay al cabo de 150 minutos.

c) A partir de qué instante habrá menos de 1000 bacterias.

d) ¿Qué ocurrirá con el número de bacterias al cabo de mucho tiempo?

e) ¿Es continua la función *f*(*t*)?

a) $f(0) = 2$. Al principio había 2000 bacterias.

b) 150 minutos = 2,5 horas $\Rightarrow f(2,5) = 4,286$. Al cabo de 150 minutos había 4286 bacterias, aproximadamente.

c) $\dfrac{15}{t+1}<1 \Rightarrow 15<t+1 \Rightarrow t>14$. A partir de las 14 horas habrá menos de 1000 bacterias.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{15}{t+1}\right)=0$. Al cabo de mucho tiempo las bacterias desaparecerán.

e) El punto que se debe estudiar es $x = 2$, ya que en este valor cambia la definición de la función. En el resto de puntos la función es continua.

La función es continua en $x = 2$ porque $f(2) = 5$, $\lim\limits_{t\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{t\to-2^-}\left(\dfrac{3}{4}t^2+2\right)=5$ y $\lim\limits_{t\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{t\to-2^+}\left(\dfrac{15}{t+1}\right)=5$.

64. Irene y Ricardo se proponen ahorrar para poder comprar material escolar para el próximo curso.

- **Irene comienza con 2 CENT, al día siguiente añade otros 2 CENT y cada día va añadiendo 2 CENT más de los que añadió el día anterior.**
- **Ricardo comienza con 3 CENT, al día siguiente añade 1, y cada día va añadiendo un céntimo más de los que añadió el día anterior.**

a) Escribe los 10 primeros términos de la sucesión que obtiene cada uno de ellos con el número de céntimos que van acumulando cada día.

b) El término general de cada una es: $I_n = n^2 - an + b \quad R_n = cn^2 - \frac{1}{2}n + d$. Calcula *a*, *b*, *c* y *d*. ¿Llegaría alguna vez a tener ahorrado Irene el doble de céntimos que Ricardo?

a) Irene: 2, 4,8, 14, 22, 32, 44, 58, 74, 92...

Ricardo: 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, 48…

b) Como $I_1 = 2$ e $I_2 = 4$, se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 - a + b = 2 \\ 4 - 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow I_n = n^2 - n + 2$$

Como $R_1 = 2$ e $R_2 = 4$, se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c - \frac{1}{2} + d = 3 \\ 4c - 1 + d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c + 2d = 7 \\ 4c + d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c + 4d = 14 \\ 4c + d = 5 \end{cases} \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow R_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3$$

Para comprobar si Irene tendrá alguna vez el doble de dinero que Ricardo se plantea la ecuación $I_n = 2R_n$:

$$n^2 - n + 2 = 2\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 3\right) \Rightarrow n^2 - n + 2 = n^2 - n + 6 \Rightarrow 2 = 6$$

La ecuación no tiene solución. Por tanto, Irene nunca tendrá el doble de dinero que Ricardo.

65. Si *f*(*x*) una función estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, considera las siguientes afirmaciones:

I. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

II. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

III. *f*(*x*) es continua en $\mathbb{R}$

IV. *f*(*x*) puede estar acotada en $\mathbb{R}$

Entonces se verifica:

A. Todas son ciertas excepto III

B. La única cierta es IV

C. Todas son falsas.

D. Todas son verdaderas.

La función $f(t) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ es una función creciente en $\mathbb{R}$, pero no verifica I porque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

La función $f(t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 1 \leq x \\ \frac{4x - 2}{x} & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$ es una función creciente en $\mathbb{R}$, pero no verifica ni II ni III porque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$ y la función no es continua en $x = 1$.

Por tanto, la única afirmación que se puede asegurar es que una función *f*(*x*) continua en $\mathbb{R}$ puede estar acotada.

La respuesta correcta es la B.

66. La sucesión racional: $-\frac{21}{7}, -\frac{16}{10}, -\frac{11}{13}, \ldots$ tiene por término general un cociente de polinomios de grado uno. Su límite es:

A. $-\frac{1}{3}$

B. 0

C. $\frac{5}{3}$

D. +∞

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{-21 + (n-1) \cdot 5}{7 + (n-1) \cdot 3} = \frac{5n - 26}{3n + 4}$ y su límite es $\frac{5}{3}$.

La respuesta correcta es la C.

67. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ el $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x)$ no puede ser:

A. 1

B. 0

C. Ninguna de las dos

D. Pueden ser las dos cosas.

Si $f(x) = x - a$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-a}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-a}{x-a} = 1$

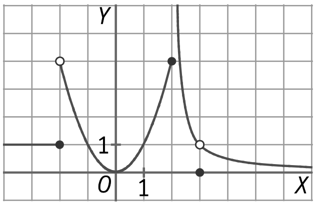
Si $f(x) = (x - a)^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-a}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)^2}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} (x-a) = 0$

El límite $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x)$ puede ser cualquiera de las dos opciones.

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

68. Pilar ha hecho una descripción de las discontinuidades de la siguiente función. Corrige lo que sea erróneo.



- **Hay una discontinuidad evitable en x = 3.**
- **Hay una discontinuidad inevitable cuando x tiende a 2 por la derecha.**
- **Hay una discontinuidad evitable en x = 2.**

El error está en considerar que hay una discontinuidad evitable en x = 2.
En x = 2 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

PONTE A PRUEBA

Interés continuo

Actividad resuelta

El gasto en ocio y cultura

El lunes 1 de septiembre de 2014, la EAE Business School (Escuela de Administración de Empresas) presentó el estudio sobre *El Gasto en Ocio y Cultura* en España 2014 en el que analizaba la inversión en bienes culturales y de ocio en España.

Según el análisis realizado por EAE, en 2013 se invirtieron en España 27 990 millones de euros en ocio, cultura y espectáculos, un 7,38 % menos que el año anterior. El gasto ha caído un 17 % respecto a 2006 y un 24 % respecto a 2007. También descienden el gasto medio por hogar, que pasa a ser de 1537 € y cae un 8 % respecto a 2012, y el gasto medio por persona, que se sitúa en 607 € anuales y presenta una caída del 7 % respecto del año anterior.

En un colectivo de familias se hace un estudio particular relacionando el gasto mensual, *G*(*x*), con sus ingresos mensuales, *x*, ambos en miles de euros, y se obtiene una relación que puede expresarse mediante la función:

$$G(x)=\begin{cases}0,05x & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ 0,2x-0,07 & \text{si} \quad 1<x\le 2\\ \dfrac{3x}{2x+13} & \text{si} \quad 2<x\end{cases}$$

1. **¿Qué cantidad se invirtió en España en el año 2012 en ocio y cultura? ¿Y en 2007?**

   Llamamos x a la cantidad invertida en 2012 en España en ocio y cultura.

   x – 7,38 % de x = 27 990 $\Rightarrow x - 0{,}0738x = 27\,990 \Rightarrow 0{,}9262x = 27\,990 \Rightarrow x = 30\,220{,}26$

   En España, en 2012, se invirtieron 30 220,26 millones de euros en ocio y cultura.

   Llamamos y a la cantidad invertida en 2007 en España en ocio y cultura.

   y – 7,38 % de y = 27 990 $\Rightarrow y - 0{,}24x = 27\,990 \Rightarrow 0{,}76x = 27\,990 \Rightarrow y = 36\,828{,}95$

   En España, en 2007, se invirtieron 36 828,95 millones de euros en ocio y cultura.

2. **¿Cuál fue el gasto medio por hogar en 2012?**

   Llamamos x al gasto medio por hogar en 2012 en España en ocio y cultura.

   x – 8 % de x = 1537 $\Rightarrow x - 0{,}08x = 1537 \Rightarrow 0{,}92x = 1537 \Rightarrow x = 1670{,}65$

   El gasto medio por hogar en 2012 fue de 1670,65 €.

3. **¿Cuál es el número medio de personas por hogar en 2012?**

   Llamamos x al gasto medio por persona en 2012 en España en ocio y cultura.

   x – 7 % de x = 607 $\Rightarrow x - 0{,}07x = 607 \Rightarrow 0{,}93x = 607 \Rightarrow x = 652{,}69$

   El gasto medio por persona en 2012 fue de 652,69 €.

   Como el gasto medio en 2012 fue de 1670,65 € por hogar y de 652,69 € por persona entonces el número medio de persona por hogar en 2012 es $\dfrac{1670{,}65}{652{,}69}=2{,}56$.

4. **¿Es continua la función gasto *G*(*x*)?**

   Los puntos que se deben estudiar son x = 1 y x = 2, ya que en estos valores cambia la definición de la función. En el resto de puntos la función es continua.

   En x = 1 la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en porque:

   $\lim\limits_{x\to 1^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 0{,}05x=0{,}05$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} G(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(0{,}2x-0{,}07)=0{,}2-0{,}07=0{,}13$

   En x = 2 la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en porque:

   $\lim\limits_{x\to 2^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(0{,}2x-0{,}07)=0{,}4-0{,}07=0{,}33$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} G(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x}{2x+13}=\dfrac{6}{17}=0{,}35$

   La función gasto $G(x)$ es continua en $[0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. Justifica que el gasto en ocio y cultura de ese colectivo es siempre creciente con los ingresos.

Si $0 \leq x < 1$ la función $G(x) = 0{,}05x$ es una recta con pendiente $a = 0{,}05$ positiva. Por tanto, la función $G(x)$ es creciente.

Si $x = 1$, $G(1) = 0{,}05$ y $\lim_{x\to 1^+} G(x) = \lim_{x\to 1^+} (0{,}2x - 0{,}07) = 0{,}2 - 0{,}07 = 0{,}13$. Por tanto, la función $G(x)$ es creciente.

Si $1 < x < 2$ la función $G(x) = 0{,}02x - 0{,}07$ es una recta con pendiente $a = 0{,}02$ positiva. Por tanto, la función $G(x)$ es creciente.

Si $x = 2$, $G(2) = 0{,}02 \cdot 2 - 0{,}07 = -0{,}03$ y $\lim_{x\to 2^+} G(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{2x+13} = \frac{6}{17} = 0{,}35$. Por tanto, la función $G(x)$ es creciente.

Si $2 < x$ la función $G(x) = \frac{3x}{2x+13} = \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{2x+13}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{13}{2x+13}\right)$ es creciente porque si $2 < x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow$

$2x_1 + 13 < 2x_2 + 13 \Rightarrow \frac{13}{2x_1+13} > \frac{13}{2x_2+13} \Rightarrow 1 - \frac{13}{2x_1+13} < 1 - \frac{13}{2x_2+13} \Rightarrow \frac{3}{2}\left(1 - \frac{13}{2x_1+13}\right) < \frac{3}{2}\left(1 - \frac{13}{2x_2+13}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x_1}{2x_1+13} < \frac{3x_2}{2x_2+13} \Rightarrow G(x_1) < G(x_2)$.

La función $G(x)$ es creciente.

6. Justifica que, según ese estudio, ninguna familia de ese colectivo realiza un gasto superior a 1500 € mensuales en ocio y cultura.

La función es creciente y $\lim_{x\to +\infty} G(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{2x+13} = \frac{3}{2}$ = 1,5 miles de euros.

Por tanto, ninguna familia de este colectivo realiza un gasto superior a 1500 €.

7. Si los ingresos de una familia en 2012 fueron de 2050 €, y en 2013, de 1900 €, ¿se puede decir que la función del colectivo de familias refleja la situación descrita por la EAE?

Como $G(2050) = \frac{3 \cdot 2{,}05}{2 \cdot 2{,}05 + 13} = 0{,}3596$ y $G(1900) = \frac{3 \cdot 1{,}9}{2 \cdot 1{,}9 + 13} = 0{,}3393$, esta familia gastó, en 2012, 359,6 € en ocio y cultura y, en el año 2013, 339,3 €.

Por tanto, como $\frac{359{,}6 - 339{,}3}{359{,}6} = 0{,}0564$, el gasto de esta familia en 2012 descendió un 5,64 % respecto al 2013.

Este porcentaje es ligeramente inferior al 8 % que obtuvo la EAE en su estudio.

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to -3} \frac{5x+3}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 3x^5 - 4x^3}{x^4 - x^3}$

c) $\lim_{x\to -5} \frac{x+5}{25 - x^2}$

d) $\lim_{x\to 5^+} \frac{x+5}{25 - x^2}$

a) $\lim_{x\to -3} \frac{5x+3}{x-3} = \frac{5\cdot(-3)+3}{-3-3} = \frac{-12}{-6} = 2$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 3x^5 - 4x^3}{x^4 - x^3} = \frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 3x^5 - 4x^3}{x^4 - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x^4 + 3x^2 - 4)}{x^3(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x-1} = \frac{-4}{-1} = 4$

c) $\lim_{x\to -5} \frac{x+5}{25 - x^2} = \frac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim_{x\to -5} \frac{x+5}{25 - x^2} = \lim_{x\to -5} \frac{x+5}{-(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{-1}{x-5} = \frac{-1}{-5-5} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10}$

d) $\lim_{x\to 5^+} \frac{x+5}{25 - x^2} = \frac{1}{0^-} - \infty$

2. Halla los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{2x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5x^2-3}{1+2x^2-7x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{1-x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{2x-7}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{2x-7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{7}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{5}{x}}{2-\dfrac{7}{x}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5x^2-3}{1+2x^2-7x}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5x^2-3}{1+2x^2-7x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{5}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{3-x}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x+2)}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\dfrac{3}{x}-1}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{1-x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-1}=+\infty$

3. Resuelve las siguientes indeterminaciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{1+4x}\right)^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x+3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{3x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2+x\right)}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{-1}{1+1}=\dfrac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{1+4x}\right)^{x+1}=1^{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{1+4x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-4}{1+4x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1+4x}{-4}}\right)^{\frac{1+4x}{-4}\cdot\frac{-4}{1+4x}\cdot(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1+4x}{-4}}\right)^{\frac{1+4x}{-4}}\right]^{\frac{-4}{1+4x}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{1+4x}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x-4}{1+4x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4-\frac{4}{x}\right)}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4-\frac{4}{x}}{4+\frac{1}{x}}}=e^{-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x+3}\right)=\infty-\infty$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{3x+2}=1^{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+3x}\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+3x}\right)^{3x+2}=e$

4. Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-n-n^2\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-n+8}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-3}{2+4n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1+3n}{2+3n}\right)^{3n+2}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-n-n^2\right)=-\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-n+8}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-n+8}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{8}{n^2}}=2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-3}{2+4n}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-3}{2+4n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{n\left(3-\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(4+\dfrac{2}{n}\right)}\right]^{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-\dfrac{3}{n}}{4+\dfrac{2}{n}}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1+3n}{2+3n}\right)^{3n+2}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1+3n}{2+3n}\right)^{3n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3+6n}{2+3n}\right)^{3n+2}==\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\dfrac{3}{n}+6}{\dfrac{2}{n}+3}\right)^{3n+2}=2^{+\infty}=+\infty$

5. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)^{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+3}\right)^{5x}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-5x-6}$

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6}=\dfrac{0}{0}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{2x-6}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x-\sqrt{x+6}\right)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}{(2x-6)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{(2x-6)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{2\left(x+\sqrt{x+6}\right)}=\dfrac{3+2}{2\left(3+\sqrt{3+6}\right)}=\dfrac{5}{12}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)^{2x}=1^{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+3}\right)^{5x}=1^{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+3}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+3}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}\cdot5x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{x+3}\cdot5x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-10x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-10x}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-10}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-10}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-5x-6}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Indeterminación $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-5x-6}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^3}{(x+1)(x-6)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2}{x-6}=0$

6. Estudia la continuidad y la discontinuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ 4-2x & \text{si } 0\le x<3\\ 7-x^2 & \text{si } 3<x\end{cases}$$

En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

En $x = 3$ la función presenta una discontinuidad evitable porque $f(3)$ no existe y $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-2$.

La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)\cup(0, 3)\cup(3, +\infty)$.