11 Introducción al concepto de derivada

ANALIZA Y CALCULA

¿Sobre qué trata el libro *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence des lignes courbes*, obra del marqués de l´Hôpital?

El libro *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence des lignes courbes* es el primer libro publicado sobre la aplicación del cálculo diferencial al estudio de las curvas.

Comenta la referencia que hace marqués de l´Hôpital a su maestro en su libro.

En la referencia que hace el marqués de l´Hôpital a su maestro en el libro, reconoce que su obra se basa en los descubrimientos de los hermanos Bernoulli, y que los ha publicado con su nombre y sin el consentimiento de los mismos. Además asume cualquier reclamación que pudieran hacer los hermanos.

INVESTIGA Y CONTESTA

La polémica entre Newton y Leibniz sobre la paternidad del cálculo diferencial es la más popular en la historia de las matemáticas. Busca información de cómo nació, se desarrolló y terminó esa polémica. ¿Qué papel jugaron los hermanos Bernoulli en la misma?

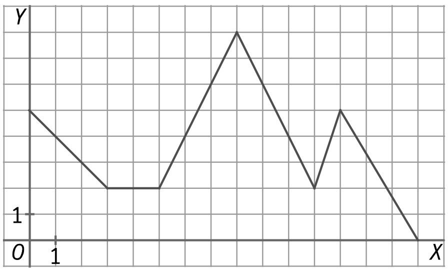
Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Observa la gráfica de la función y calcula su tasa de variación media en cada uno de los intervalos siguientes.

a) [0, 2] **c) [3, 9]** **e) [12, 15]**

b) [3, 5] **d) [5, 11]** **f) [0, 15]**



¿En qué intervalos la función crece? ¿Y en cuáles decrece?

a) *TVM f*[0, 2] = $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

b) *TVM f*[3, 5] = $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{2-2}{2}=\frac{0}{2}=0$

c) *TVM f*[3, 9] = $\frac{f(9)-f(3)}{9-3}=\frac{6-2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

d) *TVM f*[5, 11] = $\frac{f(11)-f(5)}{11-5}=\frac{2-2}{6}=\frac{0}{6}=0$

e) *TVM f*[12, 15] = $\frac{f(15)-f(12)}{15-12}=\frac{0-5}{3}=\frac{-5}{3}$

f) *TVM f*[0, 15] = $\frac{f(15)-f(0)}{15-0}=\frac{0-5}{15}=\frac{-5}{15}=\frac{-1}{3}$

La función crece en los intervalos cuya tasa de variación media es positiva. Es decir, en [3, 9].

La función decrece en los intervalos cuya tasa de variación media es negativa. Es decir, en [0, 2], [12, 15] y [0, 15].

2. **Halla la *TVM* de estas funciones en el intervalo [1, 4].**

a) $f(x) = 5$ **c)** $f(x) = -2x + 1$ **e)** $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x$ **d)** $f(x) = x^2$ **f)** $f(x) = 2^x$

a) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{5-5}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

b) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{4-1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

c) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{-7-(-1)}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2$

d) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{16-1}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

e) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$

f) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{16-2}{3} = \dfrac{14}{3}$

3. **Halla la *TVM* de la función $f(x) = 3x - 8$ en los siguientes intervalos.**

a) [–7, –3] **c)** [–4, 1] **e)** [1, 10]

b) [–6, –4] **d)** [0, 6] **f)** [–2, 15]

¿Qué observas? ¿Por qué ocurre esto? ¿Tiene algo que ver el coeficiente de *x* de la función dada?

a) $TVM\ f[-7, -3] = \dfrac{f(-3)-f(-7)}{-3-(-7)} = \dfrac{3\cdot(-3)-8-(3\cdot(-7)-8)}{-3+7} = \dfrac{-17-(-29)}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

b) $TVM\ f[-6, -4] = \dfrac{f(-4)-f(-6)}{-4-(-6)} = \dfrac{3\cdot(-4)-8-(3\cdot(-6)-8)}{-4+6} = \dfrac{-20-(-26)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

c) $TVM\ f[-4, 1] = \dfrac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)} = \dfrac{3\cdot 1-8-(3\cdot(-4)-8)}{1+4} = \dfrac{-5-(-20)}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$

d) $TVM\ f[0, 6] = \dfrac{f(6)-f(0)}{6-0} = \dfrac{3\cdot 6-8-(3\cdot 0-8)}{6} = \dfrac{10-(-8)}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$

e) $TVM\ f[1, 10] = \dfrac{f(10)-f(1)}{10-1} = \dfrac{3\cdot 10-8-(3\cdot 1-8)}{9} = \dfrac{22-(-5)}{9} = \dfrac{27}{9} = 3$

f) $TVM\ f[-2, 15] = \dfrac{f(15)-f(-2)}{15-(-2)} = \dfrac{3\cdot 15-8-(3\cdot(-2)-8)}{15+2} = \dfrac{37-(-14)}{17} = \dfrac{51}{17} = 3$

La tasa de variación media en todos los intervalos es 3, y coincide con la pendiente de la recta $f(x) = 3x - 8$.

4. **Calcula la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto indicado.**

a) $f(x) = 2x - 5$, **en** $x = 7$ **c)** $f(x) = \dfrac{2}{x}$, **en** $x = 2$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, **en** $x = 1$ **d)** $f(x) = x^3 + 2$, **en** $x = -3$

a) $TVI\ f(7) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(7+h)-5-(2\cdot 7-5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 = 2$

b) $TVI\ f(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-3(1+h)+2-(1-3+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h-1) = -1$

c) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2}{2+h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(2+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2+h} = \dfrac{-1}{2}$

d) $TVI\ f(-3) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-3+h)^3+2-(-25)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-9h^2+27h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h^2-9h+27)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}(h^2-9h+27) = 27$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en *x* = 1, *x*= 4, *x* = 0, *x* = –4.

a) *f*(*x*) = 3*x* + 1 **b) *f*(*x*) = –*x* + 4**

¿Qué observas?

a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+1-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}3 = 3$

$f'(4) = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x+1-13}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x-12}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}3 = 3$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+1-1}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x} = \lim\limits_{x\to0}3 = 3$

$f'(-4) = \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x+1+11}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x+12}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4}3 = 3$

b) $f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+4-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}-1 = -1$

$f'(4) = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{-x+4-0}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{-x+4}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}-1 = -1$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x+4-4}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to0}-1 = -1$

$f'(-4) = \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-x+4-8}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-x-4}{x+4} = \lim\limits_{x\to-4}-1 = -1$

En ambos casos la tasa de variación media coincide con la pendiente de la recta *f*(*x*).

En el primer apartado la pendiente es 3 y, en el segundo, –1.

6. Actividad resuelta.

7. Dada la función *f*(*x*) = *x*², calcula *f*´(3), *f*´(–2), *f*´(5). Comprueba que para cualquier valor *x* = *a*, *f*´(*a*) = 2*a*.

$f'(3) = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}(x+3) = 6 = 2\cdot3$

$f'(-2) = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}(x-2) = -4 = 2\cdot(-2)$

$f'(3) = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}(x+5) = 10 = 2\cdot5$

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(x+a) = 2a$

Se verifica que *f*´(*a*) = 2*a* para cualquier valor de *x*.

8. Calcula la pendiente de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos indicados. ¿Qué ángulo forman con el eje de abscisas?

a) *f*(*x*) = 4*x* – *x*², en *x* = 0 y *x* = 5 **b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, en *x* = 1 y *x* = –2**

a) En $x = 0 \Rightarrow m = f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(4-x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}(4-x) = 4$

Como tg $\alpha = 4 \Rightarrow \alpha$ = arctg 4 = 75,964º $\Rightarrow \alpha$ = 75º 57´ 49,5´´

En $x = 5 \Rightarrow m = f'(5) = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{4x-x^2-(-5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{-(x-5)(x+1)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}(-x-1) = -6$

Como tg $\alpha = -6 \Rightarrow \alpha$ = arctg (–6) = –80,538º $\Rightarrow \alpha$ = –80º 32´ 16,8´´

b) En $x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-2x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2(x-1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-2}{x}\right) = -2$

Como tg $\alpha = -2 \Rightarrow \alpha$ = arctg –2 = –63,435º $\Rightarrow \alpha$ = –63º 26´ 6´´

En $x = -2 \Rightarrow m = f'(-2) = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\frac{2}{x}+1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2+x}{x(x+2)} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

Como tg $\alpha = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ = –26,565º $\Rightarrow \alpha$ = –26º 33´ 54´´

9. Halla la recta tangente a las funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **en** $x = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$**, en** $x = -1$

a) El punto de tangencia es $A(0, f(0)) = A(0, -3)$.

La pendiente de la tangente es $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-3-(-3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - (-3) = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 3$

b) El punto de tangencia es $A(-1, f(-1)) = A(-1, -1)$.

La pendiente de la tangente es $f'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x}-(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{1+x}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{x} = -1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - (-1) = -(x - (-1)) \Rightarrow y = -x - 2$

10. Actividad resuelta.

11. La recta $y = -x + 2$ es tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ en un punto. ¿Cuáles son sus coordenadas? Halla la derivada de la función en ese punto.

El punto de tangencia entre la recta y la parábola es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = -x+2 \\ y = x^2-5x+6 \end{cases} \Rightarrow -x+2 = x^2-5x+6 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$$

Las coordenadas del punto de tangencia son (2, 0).

La derivada en $x = 2$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

$$m = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6+0}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1$$

12. ¿Cuáles de las siguientes rectas son tangentes a la parábola $y = x^2 - 3$?

1. $y = x - 4$
2. $y = -4x - 7$
3. $y = -3$
4. $y = x$
5. $y = x - 7$
6. $y = 2x$

a) Halla el punto de tangencia.

b) Calcula la derivada de la función en esos puntos.

Se plantean los sistemas y se estudia la solución de los mismos.

1. $\begin{cases} y = x-4 \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

2. $\begin{cases} y = -4x-7 \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x = -2$

3. $\begin{cases} y = -3 \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $\begin{cases} y = x \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2-x-3=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

5. $\begin{cases} y = x-7 \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2-x+4=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{-15}}{2}$

6. $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2-3 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$

Las únicas rectas tangentes con la parábola $y = x^2 - 3$ son $y = -4x - 7$ e $y = -3$.

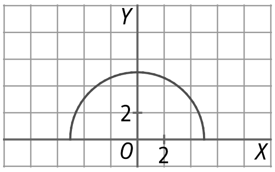
a) El punto de tangencia de $y = -4x - 7$ con la parábola $y = x^2 - 3$ es $A(-2, f(-2)) = A(-2, 1)$.

El punto de tangencia de $y = -3$ con la parábola $y = x^2 - 3$ es $A(0, f(0)) = A(0, -3)$.

b) $f'(-2) = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-3-1}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-2) = -4$

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3-(-3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$

13. La gráfica de la función $y=\sqrt{25-x^2}$ es una semicircunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 5.



a) Halla la ecuación de la tangente a la semicircunferencia en el punto de abscisa $x = 3$.

b) ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas?

a) El punto de tangencia es $A(3, f(3)) = A(3, 4)$.

La pendiente de la tangente es $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{25-x^2}-4\right)\left(\sqrt{25-x^2}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{25-x^2}+4\right)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{(x-3)\left(\sqrt{25-x^2}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{25-x^2}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+3)}{\left(\sqrt{25-x^2}+4\right)}=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-4=\dfrac{-3}{4}(x-3)\Rightarrow y=\dfrac{-3}{4}x+\dfrac{25}{4}$.

b) Como $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-3}{4}\Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-3}{4}\right)=-36{,}870º\Rightarrow\alpha=-36º\ 52'\ 12''$

14. Actividad interactiva.

15. Calcula la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $f(x) = 7x - 2$ **b)** $m(x)=\dfrac{1}{x}$ **c)** $g(x) = 3x^2 + 5x - 6$ **d)** $r(x) = x^3 - 5$

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7(x+h)-2-(7x-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}7=7$

b) $m'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{m(x+h)-m(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{hx(x+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{x(x+h)}=\dfrac{-1}{x^2}$

c) $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2+5(x+h)-6-(3x^2+5x-6)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6x+3h+5)}{h}=6x+5$

d) $r'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(x+h)-r(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-5-(x^3-5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

16. Actividad resuelta.

17. Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ **c)** $f(x)=\sqrt{x}$ **e)** $f(x) = 5^x$

b) $f(x) = x - 2$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$ **f)** $f(x)=\dfrac{9^x}{3^{2x}}$

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 1$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3}=x^{\frac{1}{2}-3}=x^{\frac{-5}{2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-5}{2}x^{\frac{-7}{2}}$

e) $f'(x) = 5^x\cdot\ln x$

f) $f(x)=\dfrac{9^x}{3^{2x}}=\dfrac{(3^2)^x}{3^{2x}}=\dfrac{3^{2x}}{3^{2x}}=1\Rightarrow f'(x)=0$

18. **Sean las funciones $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $h(x) = \log x$. Calcula los valores de:**

a) $f'(2)$ **c)** $g'(8)$ **e)** $h'(1)$

b) $f'(-1)$ **d)** $g'(-1)$ **f)** $h'(100)$

$f'(x) = 4x^3$ $g'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $h'(x) = \frac{1}{x\ln 10}$

a) $f'(2) = 4 \cdot 8 = 32$ **c)** $g'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$ **e)** $h'(1) = \frac{1}{\ln 10}$

b) $f'(-1) = -4$ **d)** $g'(-1) = = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^2}} = \frac{1}{3}$ **f)** $h'(100) = \frac{1}{100\ln 10}$

19. **Averigua los puntos en los que la tangente a la parábola de ecuación $f(x) = 8x - x^2$ tienen pendiente:**

a) **Nula.** **b)** **Positiva.** **c)** **Negativa.**

La pendiente de la recta tangente a la parábola $f(x) = 8x - x^2$ es $m = f'(x) = 8 - 2x$.

a) $8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4$ **b)** $8 - 2x > 0 \Rightarrow 4 > x$ **c)** $8 - 2x < 0 \Rightarrow 4 < x$

20. **¿En qué puntos de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ la tangente tiene una pendiente $m = -4$? ¿Cuál es su ecuación?**

La pendiente de la recta tangente a la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ es $m = f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ y $m = -4 \Rightarrow -4 = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.

Si $x = \frac{1}{2}$, el punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \Rightarrow$ La ecuación de la tangente es: $y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x + 4$

Si $x = \frac{-1}{2}$, el punto de tangencia es $\left(\frac{-1}{2}, -2\right) \Rightarrow$ La ecuación de la tangente es: $y + 2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 4$

21. **Actividad resuelta.**

22. **Halla las derivadas de las funciones.**

a) $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 5x)$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot 2x$ **c)** $f(x) = \text{sen } x \cos x$ **d)** $f(x) = (\ln x)^2$

a) $f'(x) = 3x^2(x^2 + 5x) + (x^3 - 1)(2x + 5) = 3x^4 + 15x^3 + 2x^4 + 5x^3 - 2x - 5 = 5x^4 + 20x^3 - 2x - 5$

b) $f'(x) = 2x \cdot 2x + x^2 \cdot 2 = 6x^2$

c) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

d) $f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

23. **Obtén las derivadas de las funciones siguientes.**

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x - 3}{x}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3 + e^{2x}}{x+1}$

a) $f'(x) = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 3)x - (x^3 + x^2 + 3x - 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 + 3}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$ **d)** $f'(x) = \frac{(3x^2 + 2e^x)(x+1) - (x^3 + e^{2x})}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 2xe^{2x}}{(x+1)^2}$

24. Halla la derivada de la función $y = \text{cotg } x$:

a) Como cociente entre el cos x y el sen x.

b) A partir de la igualdad cotg $x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$.

a) $y = \text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$

$$y' = \frac{-\text{sen}x \cdot \text{sen}x - \cos x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x} = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{-\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\text{sen}^2 x} = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$$

b) $y = \text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$

$$y' = \frac{-\left(1 + \text{tg}^2 x\right)}{\text{tg}^2 x} = \frac{-1 - \text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{-\left(\cos^2 x + \text{sen}^2 x\right)}{\text{sen}^2 x} = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado.

25. Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = x\text{sen } x$, en $x = \pi$

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, en $x = 1$

c) $h(x) = 2x + \sqrt{x}$, en $x = 16$

d) $i(x) = x^2 + 5x - 1$, en $x = \dfrac{3}{2}$

e) $j(x) = 3x + 5x$, en $x = 0$

f) $k(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x^2}$, en $x = \dfrac{\pi}{2}$

a) $f'(x) = \text{sen } x + x\cos x \Rightarrow f'(\pi) = \text{sen } \pi + \pi\cos \pi = -\pi$

b) $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow g'(1) = \dfrac{1 - \ln 1}{1^2} = 1$

c) $h'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow h'(16) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{16}} = \dfrac{17}{8}$

d) $i'(x) = 2x + 5 \Rightarrow i'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{3}{2} + 5 = 8$

e) $j'(x) = 3 + 5 = 8 \Rightarrow j'(0) = 8$

f) $k'(x) = \dfrac{\cos x \cdot x^2 - 2x\text{sen}x}{x^4} \Rightarrow k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-\pi}{\frac{\pi^4}{16}} = \dfrac{-16}{\pi^3}$

26. Si $f(x) = 3x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = e^x$, halla la expresión de las siguientes funciones y de sus derivadas.

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(g \circ h)(x)$

c) $(h \circ f)(x)$

d) $(f \circ h \circ g)(x)$

e) $(h \circ f \circ g)(x)$

f) $(g \circ h \circ f)(x)$

a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x) = \dfrac{1}{3x}$ y $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = g'(3x) \cdot f'(x) = \dfrac{-1}{9x^2} \cdot 3 = \dfrac{-3}{9x^2} = \dfrac{-1}{3x^2}$

b) $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$ y $(g \circ h)'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x) = g'(e^x) \cdot h'(x) = \dfrac{-1}{e^{2x}} \cdot e^x = \dfrac{-1}{e^x}$

c) $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(3x) = e^{3x}$ y $(h \circ f)'(x) = h'[f(x)] \cdot h'(x) = h'(3x) \cdot f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

d) $(f \circ h \circ g)(x) = f\left[h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = f\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 3e^{\frac{1}{x}}$ y $(f \circ h \circ g)'(x) = f'[h[g(x)] \cdot h'[g(x)] \cdot g'(x) = 3 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-3e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

e) $(h \circ f \circ g)(x) = h\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = h\left(\dfrac{3}{x}\right) = e^{\frac{3}{x}}$ y $(h \circ f \circ g)'(x) = h'[f[g(x)] \cdot f'[g(x)] \cdot g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{-3e^{\frac{3}{x}}}{x^2}$

f) $(g \circ h \circ f)(x) = g[h(3x)] = g(e^{3x}) = \dfrac{1}{e^{3x}}$ y $(g \circ h \circ f)'(x) = g'[h[f(x)] \cdot h'[f(x)] \cdot f'(x) = \dfrac{-1}{e^{6x}} \cdot e^{3x} \cdot 3 = \dfrac{-3}{e^{3x}}$

27. Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (3x+1)^3$ **c)** $f(x) = 5^{2x-3}$ **e)** $f(x) = \text{sen } x \ln x$ **g)** $f(x) = \ln (x^2 + x + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{4x-1}$ **d)** $f(x) = \text{sen } (\ln x)$ **f)** $f(x) = \text{sen}^3 x$ **h)** $f(x) = \ln (\text{sen } x)$

a) $f'(x) = 3(3x+1)^2 \cdot 3 = 9(3x+1)^2$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$

c) $f'(x) = 5^{2x-3} \cdot \ln 5 \cdot 2 = 2\ln 5 \cdot 5^{2x-3}$

d) $f'(x) = \cos (\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

e) $f'(x) = \cos x \ln x + \text{sen } x \cdot \dfrac{1}{x} = \cos x \ln x + \dfrac{\text{sen} x}{x}$

f) $f'(x) = 3\text{sen}^2 x \cdot \cos x$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1} \cdot (2x+1) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{\text{sen} x} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{\text{sen} x} = \text{cotg } x$

28. Calcula las coordenadas del vértice de estas parábolas e indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $y = x^2 - 4x + 4$ **b)** $y = 1 - x^2$ **c)** $y = 3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = (2x - 1)^2$

a) $y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$-\infty$ … 2	2 … $+\infty$
	$x = -3$	$x = 3$
y'	–	+
y	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$.

Como en $x = 2$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo y coincide con el vértice de la parábola. Sus coordenadas son $(2, f(0)) = (2, 0)$.

b) $y' = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$

	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
	$x = -1$	$x = 1$
y'	+	–
y	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

Como en $x = 0$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo y coincide con el vértice de la parábola. Sus coordenadas son $(0, f(0)) = (0, 1)$.

c) $y' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$

	$-\infty$ … -1	-1 … $+\infty$
	$x = -3$	$x = 0$
y'	–	+
y	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Como en $x = -1$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo y coincide con el vértice de la parábola. Sus coordenadas son $(-1, f(-1)) = (-1, -6)$.

d) $y' = 8x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$-\infty$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+\infty$
	$x = 0$	$x = 3$
y'	–	+
y	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y creciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

Como en $x = \frac{1}{2}$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo y coincide con el vértice de la parábola. Sus coordenadas son $(\frac{1}{2}, f(0)) = (\frac{1}{2}, 0)$.

29. Determina el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y los mínimos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

b) $f(x) = 4x^3 - x^4$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+6x-7}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$ y $f'(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

$-\infty \quad 2 \quad +\infty$

	$x = 0$	$x = 3$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$.
Como en $x = 2$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

b) $D(f) = \mathbb{R}$ y $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$.

$-\infty \quad 0 \quad 3 \quad +\infty$

	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
$f'(x)$	+	+	–
$f(x)$	↗	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.
Como en $x = 3$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$

$f'(x) = \dfrac{-5}{(x-5)^2} < 0$, entonces la función es decreciente en todo su dominio y no tiene ni mínimos ni máximos relativos.

d) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

$f'(x) = \dfrac{-7}{(x-3)^2} < 0$, entonces la función es decreciente en todo su dominio y no tiene ni mínimos ni máximos relativos.

e) $x^2 + 6x - 7 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x-7}} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-7}} = 0 \Rightarrow x = -3$, que no pertenece al dominio.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -7)$ y $(1, +\infty)$

$-\infty \quad -7 \quad 1 \quad +\infty$

	$x = -8$		$x = 2$
$f'(x)$	–	No definida	+
$f(x)$	↘	No definida	↗

La función es decreciente en $(-\infty, -7)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
En $x = -7$ y $x = 1$, la función tiene mínimos.

f) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ x+3 & \text{si } x > -3 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

Si $x < -3 \Rightarrow f'(x) = -1 < 0$ y la función es decreciente.

Si $x > -3 \Rightarrow f'(x) = 1 > 0$ y la función es creciente.

Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, -3)$ y creciente en $(-3, +\infty)$.
Como en $x = -3$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

30. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2(8 - x^2)$ **c)** $f(x) = 2xe^x$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

b) $f(x) = (2x - 1)^3$ **d)** $f(x) = \ln(x + 4)$ **f)** $f(x) = 2^{2x - x^2}$

a) $f'(x) = 16x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$ o $x = -2$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
$f'(x)$	+	–	+	–
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
Como en $x = -2$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.
Como en $x = 0$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.
Como en $x = 2$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

b) $f'(x) = 6(2x - 1)^2 > 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. Como $f'(x) = 0$ para $x = \frac{1}{2}$, entonces la función es creciente en todo su dominio.

c) $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$

$-\infty \quad -1 \quad +\infty$

	$x = -2$	$x = 0$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.
Como en $x = -1$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

d) $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow D(f) = (-4, +\infty) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+4} > 0$ en todo su dominio $\Rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+1}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$

$-\infty \quad 1 \quad +\infty$

	$x = -8$	$x = 2$
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

La función es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
Como en $x = 1$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

f) $f'(x) = \ln 2 \cdot (2 - 2x)\, 2^{2x - x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$

$-\infty \quad 1 \quad +\infty$

	$x = 0$	$x = 2$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.
Como en $x = 1$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

31. Actividad resuelta.

32. El precio previsto de un terreno durante los 2 próximos años, es $P(t) = \dfrac{t-8}{(t+2)^2} + 100$, donde *t* es el tiempo transcurrido en meses. ¿Cuál es el mejor momento de vender?

Para hallar cuál es el mejor momento de vender se estudian los extremos de *P*(*t*), cuyo dominio es [0, +∞).

$$P'(t) = \frac{(t+2)^2 - 2(t+2)(t-8)}{(t+2)^4} = \frac{t+2-2(t-8)}{(t+2)^3} = \frac{18-t}{(t+2)^3} = 0 \Rightarrow t = 18$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: (–∞, 18) y (18, +∞)

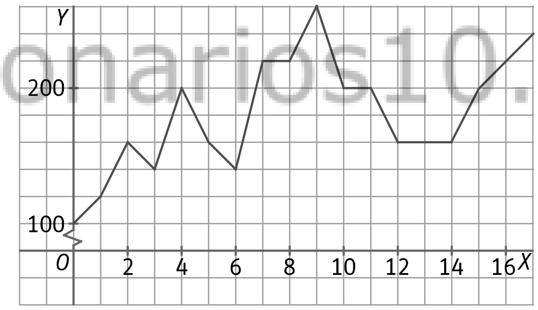
	0 — 18	18 — +∞
	$x = 1$	$x = 20$
$P'(t) = \dfrac{18-t}{(t+2)^3}$,	+	–
$P(t) = \dfrac{t-8}{(t+2)^2} + 100$	↗	↘

La función es creciente en [0, 18) y decreciente en (18, +∞). Como en x = 18 la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Por tanto, el mejor momento para vender el terreno es a los 18 meses.

33. Determina la *TVM* en cada uno de los intervalos indicados, correspondientes a la función de la gráfica adjunta.

a) [0, 5] **c) [1, 9]** **e) [13, 17]**

b) [3, 6] **d) [4, 6]** **f) [0, 17]**



a) $TVM\ f[0, 5] = \dfrac{f(5)-f(0)}{5-0} = \dfrac{160-100}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$

b) $TVM\ f[3, 6] = \dfrac{f(6)-f(3)}{6-3} = \dfrac{140-140}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

c) $TVM\ f[1, 9] = \dfrac{f(9)-f(1)}{9-1} = \dfrac{260-120}{8} = \dfrac{140}{8} = 17{,}5$

d) $TVM\ f[4, 6] = \dfrac{f(6)-f(4)}{6-4} = \dfrac{140-200}{2} = \dfrac{-60}{2} = -30$

e) $TVM\ f[13, 17] = \dfrac{f(17)-f(13)}{17-13} = \dfrac{240-160}{4} = \dfrac{80}{4} = 20$

f) $TVM\ f[0, 17] = \dfrac{f(17)-f(0)}{17-0} = \dfrac{240-100}{17} = \dfrac{140}{17}$

34. **Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\dfrac{8}{x-1}$ en los siguientes intervalos.**

a) [–29, –25] **c) [–4, 0]** **e) [13, 17]**

b) [–17, –13] **d) [2, 6]** **f) [51, 55]**

¿En qué intervalos es mayor? ¿Por qué crees que ocurre eso?

a) *TVM f*[–29, –25] = $\dfrac{f(-25)-f(-29)}{-25-(-29)}=\dfrac{\dfrac{-8}{26}-\left(\dfrac{-8}{30}\right)}{4}=\dfrac{-2}{195}$

b) *TVM f*[–17, –13] = $\dfrac{f(-13)-f(-17)}{-13-(-17)}=\dfrac{\dfrac{-4}{7}-\left(\dfrac{-8}{18}\right)}{4}=\dfrac{-2}{63}$

c) *TVM f*[–4, 0] = $\dfrac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\dfrac{-8-\left(\dfrac{-8}{5}\right)}{4}=\dfrac{-8}{5}$

d) *TVM f*[2, 6] = $\dfrac{f(6)-f(2)}{6-2}=\dfrac{\dfrac{8}{5}-8}{4}=\dfrac{-8}{5}$

e) *TVM f*[13, 17] = $\dfrac{f(17)-f(13)}{17-13}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}}{4}=\dfrac{-1}{24}$

f) *TVM f*[51, 55] = $\dfrac{f(55)-f(51)}{55-51}=\dfrac{\dfrac{4}{27}-\dfrac{4}{25}}{4}=\dfrac{-2}{675}$

La *TVM* es mayor en [51, 55] porque, al ser todas las tasas negativas, decrece menos de media en este intervalo.

35. **¿Por qué no tiene sentido hallar la *TVM* de la función $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ en el intervalo [1, 4]? ¿Y en el intervalo [3, 6]?**

En x = 2, la función $f(x)$ no es continua y, por tanto, no tiene sentido calcular la tasa de variación media en ningún intervalo que contenga a x = 2. Luego, no tiene sentido calcular la *TVM* de $f(x)$ en [1, 4].

En el intervalo [3, 6] la función $f(x)$ es continua, por tanto sí que tiene sentido calcular la tasa de variación media.

36. **Actividad resuelta.**

37. **Calcula la *TVM* de la función $f(x) = x^2 - 4$ en cada uno de los intervalos siguientes.**

a) [3, 4] **c) [3; 3,01]** **e) [3; 3,0001]**

b) [3; 3,1] **d) [3; 3,001]** **f) [3; 3,000 01]**

¿Cuál parece ser la *TVI* de la función en x = 3? Compruébalo hallando su valor mediante la definición.

a) *TVM f*[3, 4] = $\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=\dfrac{12-5}{1}=7$

b) *TVM f*[3; 3,1] = $\dfrac{f(3{,}1)-f(3)}{3{,}1-3}=\dfrac{5{,}61-5}{0{,}1}=6{,}1$

c) *TVM f*[3; 3,01] = $\dfrac{f(3{,}01)-f(3)}{3{,}01-3}=\dfrac{5{,}0601-5}{0{,}01}=6{,}01$

d) *TVM f*[3; 3,001] = $\dfrac{f(3{,}001)-f(3)}{3{,}001-3}=\dfrac{5{,}006\,001-5}{0{,}001}=6{,}001$

e) *TVM f*[3; 3,0001] = $\dfrac{f(3{,}0001)-f(3)}{3{,}0001-3}=\dfrac{5{,}000\,600\,01-5}{0{,}0001}=6{,}0001$

f) *TVM f*[3; 3,00001] = $\dfrac{f(3{,}000\,01)-f(3)}{3{,}000\,01-3}=\dfrac{5{,}000\,06-5}{0{,}000\,01}=6{,}000\,01$

La *TVI* en x = 3 parece ser 6: *TVI*: $f(3)$ = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-4-5}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+6h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+6)=6$

38. **Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = 3x - 8$ en cada uno de los siguientes puntos.**

a) $x = 0$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = -7$

¿Qué observas en todos los casos? ¿Por qué crees que ocurre esto?

a) $TVI\ f(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h-8-(-8)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h} = 3$

b) $TVI\ f(5) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cdot(5+h)-8-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h} = 3$

c) $TVI\ f(-2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(-2+h)-8-(-14)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h} = 3$

d) $TVI\ f(-7) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-7+h)-f(-7)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(-7+h)-8-(-29)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h} = 3$

En todos los casos la *TVI* es 3, porque coincide con la pendiente de la recta $f(x) = 3x - 8$.

39. **Halla la derivada de las siguientes funciones polinómicas de segundo grado y comprueba que en la abscisa de su vértice el valor de la derivada es cero.**

a) $f(x) = x^2 - 4x$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ **c)** $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **d)** $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-4(x+h)-(x^2-4x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2xh-4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2x-4) = 2x-4$

La abscisa de su vértice es $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 2\cdot 2 - 4 = 0$.

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(x+h)^2+2(x+h)+3-(-x^2+2x+3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2-2xh+2h}{h} = -2x + 2$

La abscisa de su vértice es $x = 1 \Rightarrow f'(1) = -2\cdot 1 + 2 = 0$.

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2+4(x+h)+1-(x^2+4x+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2xh+4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2x+4) = 2x + 4$

La abscisa de su vértice es $x = -2 \Rightarrow f'(1) = 2\cdot(-2) + 4 = 0$.

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)^2-6(x+h)+5-(2x^2-6x+5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+4xh-6h}{h} = 4x - 6$

La abscisa de su vértice es $x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow f'(1) = 4\cdot\dfrac{3}{2} - 6 = 0$.

40. **Halla la *TVI* en el punto $x = 2$ de cada una de las funciones siguientes.**

a) $f(x) = 4x - 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{4}{x} + 5x$ **e)** $f(x) = 8\sqrt{2x}$

b) $f(x) = x^2$ **d)** $f(x) = x^3 - 4x^2$ **f)** $f(x) = -x^2 + 8x + 5$

a) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(2+h)-1-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 4 = 4$

b) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+4) = 4$

c) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{4}{2+h}+5(2+h)-12}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h^2+8h}{h(2+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h+8}{2+h} = 4$

d) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-4(2+h)^2-(-8)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+2h^2-4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2+2h-4) = -4$

e) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{8\sqrt{2(2+h)}-16}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{16h}{h\left(\sqrt{2(2+h)}+2\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{16}{\sqrt{4+2h}+2} = 4$

f) $TVI\ f(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(2+h)^2+8(2+h)+5-17}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2+4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-h+4) = 4$

41. **Determina la *TVI* de cada una de las funciones representadas en el punto $x = 2$. ¿Cuál será la *TVI* en el punto $x = 123$?**

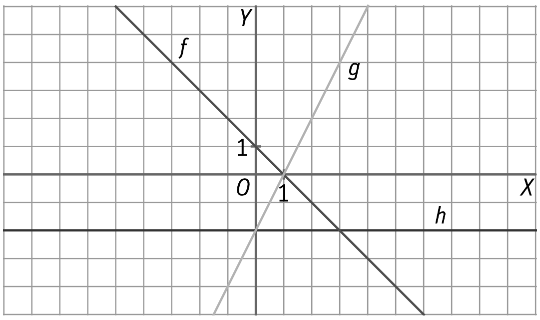
Las pendientes de las rectas son $m_f = -1$, $m_g = 2$ y $m_h = 0$.

Por tanto:

$TVI\, f(2) = TVI\, f(123) = -1$

$TVI\, g(2) = TVI\, g(123) = 2$

$TVI\, h(2) = TVI\, h(123) = 0$



42. **Halla la tasa de variación instantánea de la función $f(x) = ax + b$ en el punto $x = p$.**

$$TVI\, f(p) = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(p+h)+b-(ap+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

43. **Aplicando directamente la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.**

a) $f(x) = 4x - 7$ **en** $x = 3$

b) $g(x) = 2x - x^2$ **en** $x = -2$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x+1}$ **en** $x = 0$

d) $i(x) = \sqrt{3x+7}$ **en** $x = -1$

e) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ **en** $x = 3$

a) $$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)-7-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$$

b) $$g'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-2+h)-(-2+h)^2-(-8)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6-h) = 6$$

c) $$h'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h(0+h)-h(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{h+1}-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{h+1} = -3$$

d) $$i'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{i(-1+h)-i(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(-1+h)+7}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3h+4}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3h+4}-2\right)\left(\sqrt{3h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{3h+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3h+4}+2\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+4}+2} = \frac{3}{4}$$

e) $$j'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{j(3+h)-j(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{h+3}}{h+1}-\frac{\sqrt{3}}{1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}(h+1)}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h+3-3h^2-3-6h}{h(h+1)\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}(h+1)\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-3h^2-5h}{h(h+1)\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}(h+1)\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3h-5}{(h+1)\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}(h+1)\right)} = \frac{-5}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-5}{2\sqrt{3}}$$

44. Escribe la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las funciones *f*(*x*), *h*(*x*) y *i*(*x*) en los puntos indicados.

a) $g(x) = 2x - x^2$ **en** $x = -2$ **b)** $h(x) = \dfrac{3}{x+1}$ **en** $x = 0$ **c)** $j(x) = \sqrt{3x+7}$ **en** $x = -1$

a) El punto de tangencia es $A(-2, f(-2)) = A(-2, -8)$.

La pendiente es $g'(-2) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x-x^2-(-8)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-(x+2)(x-4)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} -(x-4) = 6$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y + 8 = 6 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = 6x + 4$

b) El punto de tangencia es $A(0, f(0)) = A(0, 3)$.

La pendiente es $h'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-3x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-3}{x+1} = -3$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = -3 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -3x + 3$

c) El punto de tangencia es $A(-1, f(-1)) = A(-1, 2)$.

La pendiente es $j'(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt{3x+7}-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x+3}{(x+1)\left(\sqrt{3x+7}+2\right)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+2} = \dfrac{3}{4}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = \dfrac{3}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{11}{4}$

45. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = (x - 1)^2$ en el punto $x = 3$.

El punto de tangencia es $A(3, f(3)) = A(3, 4)$.

La pendiente es $f'(3) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x-1)^2-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}(x+1) = 4$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 4(x - 3) \Rightarrow y = 4x - 8$

46. ¿En qué puntos corta la recta $y = x$ a la curva de ecuación $y = \dfrac{2}{x-1}$? Halla la ecuación de la tangente a la curva en cada uno de esos puntos.

Los puntos de tangencia entre la recta y la hipérbola son la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{2}{x-1} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Las coordenadas de los puntos de corte son (2, 2) y (–1, –1).

La derivada en $x = 2$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

$$m = f'(2) = = \lim_{x\to2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{2}{x-1}-2}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{4-2x}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{-2}{x-1} = -2$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es: $y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6$

La derivada en $x = -1$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

$$m = f'(-1) = = \lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{\frac{2}{x-1}-(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es: $y + 1 = \dfrac{-1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \dfrac{-x}{2} - \dfrac{3}{2}$

47. Actividad resuelta.

48. La hipérbola de ecuación $y = \dfrac{6}{x}$ tiene dos tangentes paralelas a la recta $y = 7 - 6x$.

a) ¿En qué puntos son tangentes?

b) ¿Cuál es la ecuación de las dos tangentes?

a) Como las tangentes son paralelas a la recta $y = 7 - 6x$ entonces tendrán la misma pendiente: $m = -6$.

La pendiente de las rectas tangentes a la hipérbola $y = \dfrac{6}{x}$ es $m = f'(x) = \dfrac{-6}{x^2}$ y $m = -6 \Rightarrow -6 = \dfrac{-6}{x^2} \Rightarrow x = \pm 1$.

Si $x = 1 \Rightarrow y = 6$ y si $x = -1 \Rightarrow y = -6$.

Por tanto, las coordenadas de los puntos de tangencia son (1, 6) y (–1, –6).

b) Si $x = 1$, la ecuación de la recta tangente es: $y - 6 = -6(x - 1) \Rightarrow y = -6x + 12$

Si $x = -1$, la ecuación de la recta tangente es: $y + 6 = -6(x + 1) \Rightarrow y = -6x - 12$

49. Halla la derivada de estas funciones polinómicas.

a) $f(x) = x^5$ **c)** $f(x) = x^6 + x$ **e)** $f(x) = -3x^3 + 2x$ **g)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **i)** $f(x) = 4x^4 - 3x^2 - 3x - 10$

b) $f(x) = x^4 + 3$ **d)** $f(x) = 2x - 1$ **f)** $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **h)** $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x^2$ **j)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

a) $f'(x) = 5x^4$ **c)** $f'(x) = 6x^5 + 1$ **e)** $f'(x) = -9x^2 + 2$ **g)** $f'(x) = 4x^3 - 4x$ **i)** $f'(x) = 16x^3 - 6x - 3$

b) $f'(x) = 4x^3$ **d)** $f'(x) = 2$ **f)** $f'(x) = 2x + 2$ **h)** $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 10x$ **j)** $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

50. Deriva las funciones potenciales.

a) $f(x) = (2x - 1)^5$ **c)** $f(x) = (x^6 + x)^3$ **e)** $f(x) = (x^2 - 1)^2$

b) $f(x) = (x^2 - 1)^{-2}$ **d)** $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^{-1}$ **f)** $f(x) = (3x + x^2)^{-3}$

a) $f'(x) = 10(2x - 1)^4$ **c)** $f(x) = 3(6x^5 + 1)(x^6 + x)^2$ **e)** $f(x) = 4x(x^2 - 1)$

b) $f(x) = -4x(x^2 - 1)^{-3}$ **d)** $f(x) = -(2x + 2)(x^2 + 2x - 3)^{-2}$ **f)** $f(x) = -3(3 + 2x)(3x + x^2)^{-4}$

51. Expresa las siguientes funciones racionales como potenciales, halla su derivada y después exprésala otra vez como racionales.

a) $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{3}{(3-2x)^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{5}{(x^2+x+4)^4}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{5}{(x^3-3x)^5}$

a) $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} = 2(x-1)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -4(x-1)^{-3} = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^3} = 2(x^2+1)^{-3} \Rightarrow f'(x) = 2\cdot(-3)(x^2+1)^{-4}\cdot 2x = \dfrac{-12x}{(x^2+1)^4}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(3-2x)^2} = 3(3-2x)^{-2} \Rightarrow f'(x) = 12(3-2x)^{-3} = \dfrac{12}{(3-2x)^3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3} = (2x+1)^{-3} \Rightarrow f'(x) = -6(2x+1)^{-4} = \dfrac{-6}{(2x+1)^4}$

e) $f(x) = \dfrac{5}{(x^2+x+4)^4} = 5(x^2+x+4)^{-4} \Rightarrow f'(x) = -20(2x+1)(x^2+x+4)^{-5} = \dfrac{-20(2x+1)}{(x^2+x+4)^5}$

f) $f(x) = \dfrac{5}{(x^3-3x)^5} = 5(x^3-3x)^{-5} \Rightarrow f'(x) = -25(3x^2-3)(x^3-3x)^{-6} = \dfrac{-25(3x^2-3)}{(x^3-3x)^6}$

52. **Calcula $f'(0)$ en las siguientes funciones exponenciales.**

a) $f(x) = 10^x$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = \dfrac{2^x}{4^x}$

d) $f(x) = e^x$

e) $f(x) = 3^x \cdot 5^x$

f) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^{2x}}$

a) $f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 \Rightarrow f'(0) = \ln 10$

b) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2$

c) $f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = \ln\dfrac{1}{2}$

d) $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

e) $f'(x) = 15^x \cdot \ln 15 \Rightarrow f'(0) = \ln 15$

f) $f'(x) = \left(\dfrac{e}{4}\right)^x \ln\dfrac{e}{4} \Rightarrow f'(0) = \ln\dfrac{e}{4}$

53. **Actividad resuelta.**

54. **Expresa estas funciones como funciones potenciales y después deriva.**

a) $f(x) = \sqrt{4x}$

b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{6x+2}$

a) $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2}(2x+1)^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{6x+2} = (6x+2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = 2(6x+2)^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$

55. **Deriva las funciones.**

a) $f(x) = (2x-1)^3(x+1)^2$

b) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^2$

a) $f'(x) = 6(2x-1)^2(x+1)^2 + 2(2x-1)^3(x+1) = 40x^4 + 16x^3 - 30x^2 - 2x + 4$

b) $f'(x) = (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) = x^2 + 2x + x + 2 + x^2 + 2x + x^2 + x = 3x^2 + 6x + 2$

c) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)^2 - 2(x+1)(2-x)}{(x+1)^4} = \dfrac{-x^2 - 1 - 2x - 4x + 2x^2 - 4 + 2x}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x+1)^4} = \dfrac{(x+1)(x-5)}{(x+1)^4} = \dfrac{x-5}{(x+1)^3}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^2 = 2\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right) \cdot \left(\dfrac{(x+3)-(x+4)}{(x+3)^2}\right) = \dfrac{2x+8}{x+3} \cdot \left(\dfrac{-1}{(x+3)^2}\right) = \dfrac{-2x-8}{(x+3)^3}$

56. **Deriva las funciones trigonométricas.**

a) $f(x) = \text{sen}4x$

b) $f(x) = \cos(1-x)$

c) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos(2x)}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)^2$

a) $f'(x) = 4\cos 4x$

b) $f'(x) = \text{sen}(1-x)$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos(2x) + 2\text{sen}\, x \cdot \text{sen}(2x)}{(\cos(2x))^2}$

d) $f'(x) = 2\left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right) \cdot \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\text{sen}\, x}{\cos^3 x}$

57. **Deriva las funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln(2x+1)$
b) $f(x) = \ln(3x+1)^2$
c) $f(x) = \ln^2(3x+1)$
d) $f(x) = \log(2-3x)$
e) $f(x) = \log(1+7x)^3$
f) $f(x) = \log_2(5x)$

a) $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

b) $f'(x) = \dfrac{6(3x+1)}{(3x+1)^2} = \dfrac{6}{3x+1}$

c) $f'(x) = \dfrac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{(2-3x)\ln 10}$

e) $f'(x) = \dfrac{21(1+7x)^2}{(1+7x)^3\cdot\ln 10} = \dfrac{21}{(1+7x)\cdot\ln 10}$

f) $f'(x) = \dfrac{5}{5x\cdot\ln 2} = \dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$

58. **Halla la derivada de las funciones en los puntos indicados.**

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ en $x = 1$

b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ en $x = 0$

c) $h(x) = \text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ en $x = 2\pi$

d) $i(x) = x^2\ln(x+3)$ en $x = -2$

e) $j(x) = x^3e^{2x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{2}$

b) $g'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 2$

c) $h'(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow h'(\pi) = 2\cos\dfrac{7\pi}{2} = 0$

d) $i'(x) = 2x\ln(x+3) + \dfrac{x^2}{x+3} \Rightarrow i'(-2) = -4\ln 1 + \dfrac{4}{1} = 4$

e) $j'(x) = 3x^2e^{2x} + 2x^3e^{2x} \Rightarrow j'(-1) = 3e^{-2} - 2e^{-2} = e^{-2}$

59. **Deriva las funciones:**

a) $f(x) = \ln(x)$
b) $f(x) = \ln(\text{sen}x)$
c) $f(x) = x\ln(x)$
d) $f(x) = \ln(\text{tg}x)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
b) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$
c) $f'(x) = \ln x + 1$
d) $f'(x) = \dfrac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg } x}$

60. **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.**

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = 5$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$ y $(5, +\infty)$

	$-\infty$ a -1	-1 a 5	5 a $+\infty$
	$x = -2$	$x = 0$	$x = 6$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 5)$.
Como en $x = -1$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.
Como en $x = 5$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

61. Determina los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 7$ **b)** $f(x) = 6 + 4x^3 - x^4$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x-7}{2x+3}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ o $x = 2$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty,-2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, -2)$: $x = -3$	$(-2, 2)$: $x = 0$	$(2, +\infty)$: $x = 3$
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$.

Como en $x = -2$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

Como en $x = 2$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

b) $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$

	$(-\infty, 0)$: $x = -1$	$(0, 3)$: $x = 1$	$(3, +\infty)$: $x = 4$
$f'(x)$	+	+	–
$f(x)$	↗	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Como en $x = 3$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

c) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{2(2x+3)-2(2x-7)}{(2x+3)^2} = \dfrac{20}{(2x+3)^2} > 0$ en todo su dominio $\Rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

No tiene extremos relativos.

d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x+1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) = -1 < 0$ y la función es decreciente.

Si $x > -1 \Rightarrow f'(x) = 1 > 0$ y la función es creciente.

Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Como en $x = -1$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un míximo relativo.

62. Estudia la monotonía y determina los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ **c)** $f(x)=e^{-x^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ y $f'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x=0$ o $x=\dfrac{3}{2}$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty,0)$, $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

$-\infty$ 0 $\frac{3}{2}$ $+\infty$

	$x=-1$	$x=0{,}5$	$x=2$
$f'(x)$	–	–	+
$f(x)$	↘	↘	↗

La función es decreciente en $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Como en $x=\dfrac{3}{2}$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

b) $D(f) = (-\infty,0]\cup(2,+\infty)$ y $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}<0$ en todo su dominio $\Rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio. Presenta un mínimo en $x = 0$.

c) $D(f)=\mathbb{R}$ y $f'(x)=-2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow x=0$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$

$-\infty$ 0 $+\infty$

	$x=-2$	$x=1$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.
Como en $x = 0$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

d) $D(f)=(0,+\infty)$ y $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow x=e$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(0, e)$ y $(e, +\infty)$

0 e $+\infty$

	$x=1$	$x=3$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

La función es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$.
Como en $x = e$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

63. Estudia la monotonía y determina los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **en** $-2\pi \le x \le 2\pi$ **b)** $f(x)=x+\cos x$ **en** $-\pi \le x \le \pi$

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \Rightarrow x=\pi$ o $x=-\pi$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $[-2\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$ y $(\pi, 2\pi]$

-2π $-\pi$ π 2π

	$x=-4$	$x=1$	$x=4$
$f'(x)$	–	+	–
$f(x)$	↘	↗	↘

La función es decreciente en $[-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$ y creciente en $(-\pi, \pi)$.
Como en $x = -\pi$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.
Como en $x = \pi$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

b) $f'(x) = 1 - \operatorname{sen} x \ge 0$ en $[-\pi, \pi] \Rightarrow$ Es creciente en todo su dominio.
Tiene un mínimo en $f(-\pi) = -\pi - 1$ y un máximo en $f(\pi) = \pi - 1$.

64. **Todas las funciones siguientes pasan por el punto (1, 0). Halla sus derivadas y determina cuáles de las funciones son derivables en ese punto.**

a) $f(x) = \ln x\sqrt{x}$ **c)** $h(x) = x\ln\sqrt{x}$ **e)** $j(x) = \sqrt{x\ln x}$

b) $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x}\right)$ **d)** $i(x) = \sqrt{\ln x}$ **f)** $k(x) = x\sqrt{\ln x}$

Escribe la ecuación de la recta tangente en ese punto a cada una de las funciones derivables en él.

a) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} + \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{\sqrt{1}}{1} + \dfrac{\ln 1}{2\sqrt{1}} = 1 + 0 = 1$

La derivada en $x = 1$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es: $y = x - 1$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{3x}{2x^2} = \dfrac{3}{2x} \Rightarrow g'(1) = \dfrac{3}{2}$

La derivada en $x = \dfrac{3}{2}$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es: $y = \dfrac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3}{2}$

c) $h'(x) = \ln\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \ln\sqrt{x} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow g'(1) = \dfrac{1}{2}$

La derivada en $x = \dfrac{1}{2}$ coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto:

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es: $y = \dfrac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$

d) $i'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \Rightarrow i(x)$ no es derivable en $x = 1$.

e) $j'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x\ln x}} \cdot \left(\ln x + \dfrac{x}{x}\right) = \dfrac{\ln x + 1}{2\sqrt{x\ln x}} \Rightarrow j(x)$ no es derivable en $x = 1$.

f) $k'(x) = \sqrt{\ln x} + x \cdot \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x} + \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \Rightarrow k(x)$ no es derivable en $x = 1$.

65. **Actividad resuelta.**

66. **Halla la derivada de las siguientes funciones e indica su dominio.**

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 + 1}{2x - 3}\right)$ **b)** $f(x) = \ln\sqrt{x^5}$ **c)** $f(x) = \ln(x\cos x)$

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(2x - 3)$ y $D(f) = \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{2x - 3}$ y $D(f') = \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $f(x) = \ln x^{\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}\ln x$ y $D(f) = (0, +\infty) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5}{2x}$ y $D(f) = (0, +\infty)$.

c) $f(x) = \ln x + \ln(\cos x)$ y $D(f) = \left(\dfrac{-3\pi}{2} - k\pi, \dfrac{-\pi}{2} - k\pi\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2} + k\pi, \dfrac{5\pi}{2} + k\pi\right); k \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} - \text{tg}\, x$ y

$D(f') = D(f)$.

67. **Se sabe que la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.**

a) **Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

b) **¿Tiene máximos o mínimos relativos? En caso afirmativo, calcúlalos.**

a) $D(f') = [0, +\infty)$ y $f'(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 1$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $[0, 1)$ y $(1, +\infty)$

	0	1	$+\infty$
	$x = 0{,}5$	$x = 1$	
$f'(x)$	–	+	
$f(x)$	↘	↗	

La función es decreciente en $[0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

b) Como en $x = 1$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo. En x = 0 presenta un máximo.

68. **Halla dos números enteros que cumplan las siguientes condiciones.**

- **La suma de los dos números debe ser 18.**
- **La suma del cuadrado del primero más 10 veces el segundo debe ser lo más pequeña posible.**

Sean x y $18 - x$ los números.

Se trata de optimizar la función $f(x) = x^2 + 10(18 - x) = x^2 - 10x + 180$.

$f'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 5)$ y $(5, +\infty)$

	$-\infty$	5	$+\infty$
	$x = 0$	$x = 6$	
$f'(x)$	–	+	
$f(x)$	↘	↗	

La función es decreciente en $(-\infty, 5)$ y creciente en $(5, +\infty)$.
Como en $x = 5$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo. Por tanto, los números son 5 y 13.

69. **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tiene un extremo relativo en el punto (4, 13).**

a) **Determina los valores de a y b.**

b) **Indica si el extremo relativo corresponde a un máximo o a un mínimo.**

c) **La función tiene otro extremo relativo. Halla el punto en el que se encuentra.**

d) **Con los datos obtenidos representa la gráfica de la función.**

a) Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ y la función presenta un extremo relativo en $x = 4$, entonces $3 \cdot 4^2 + 8a = 0 \Rightarrow a = -6$.

La función pasa por el punto (4, 13), entonces $4^3 + a \cdot 4^2 + b = 13 \Rightarrow 64 - 96 + b = 13 \Rightarrow b = 45$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$.

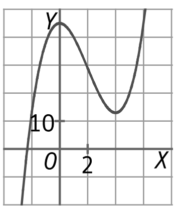
Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$

	$-\infty$	0	4	$+\infty$
	$x = -1$	$x = 1$	$x = 5$	
$f'(x)$	+	–	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en $(0, 4)$.
Como en $x = 4$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

c) Como en $x = 0$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo.

d)



70. El perfil de una carrera ciclista puede ajustarse mediante la función, $y=\frac{x-10}{(x-10)^2+1}+1$, donde x representa la distancia recorrida, e y, la altura sobre el nivel del mar, en kilómetros. Si la carrera tiene una longitud de 50 km, determina:

a) La altura del punto de salida y de llegada.

b) Los tramos del recorrido que son de subida y los que son de bajada.

c) Los puntos donde se alcanza la altura máxima y la altura mínima.

d) La altura máxima y la mínima del recorrido.

e) El punto de subida de máxima pendiente.

a) El punto de salida se encuentra a una altura de $y(0)=\frac{0-10}{(0-10)^2+1}+1=\frac{-10}{101}+1=0{,}900$ km = 900 m.

El punto de llegada se encuentra a una altura de $y(50)=\frac{50-10}{(50-10)^2+1}+1=\frac{40}{1601}+1=\frac{91}{101}=1{,}025$ km = 1025 m.

b) $D(y)$ = [0, 50] e $y'=\frac{(x-10)^2+1-2(x-10)^2}{\left[(x-10)^2+1\right]^2}=\frac{1-(x-10)^2}{\left[(x-10)^2+1\right]^2}=0\Rightarrow x=9$ o $x=11$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: (0, 9), (9, 11) y (11, 50]

	0 — 9	9 — 11	11 — 50
	x = 1	x = 10	x = 15
$f'(x)$	–	+	–
$f(x)$	↘	↗	↘

La función es decreciente en [0, 9) ∪ (11, 50) y creciente en (9, 11).

Por tanto, desde los 9 km a los 11 km es un tramo de subida y, el resto de la carrera, es de bajada.

c) Como en x = 9 la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo. Por tanto, a los 9 km se alcanza la mínima altura.

Como en x = 11 la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Por tanto, a los 11 km se alcanza la máxima altura.

d) La altura mínima se alcanza a los 9 km y es $y(9)=\frac{9-10}{(9-10)^2+1}+1=0{,}5$ km = 500 m.

La altura máxima se alcanza a los 11 km y es $y(11)=\frac{11-10}{(11-10)^2+1}+1=1{,}5$ km = 1500 m.

e) Para hallar el punto de máxima pendiente hay que hallar el máximo de la función derivada en el tramo de subida; es decir en el tramo (9, 11).

$$y''=\frac{-2(x-10)\left[(x-10)^2+1\right]^2-4\left[1-(x-10)^2\right]\left[(x-10)^2+1\right](x-10)}{\left[(x-10)^2+1\right]^4}=\frac{2(x-10)\left[-2+2(x-10)^2-\left((x-10)^2+1\right)\right]}{\left[(x-10)^2+1\right]^3}=$$

$$=\frac{2(x-10)\left[-2+2(x-10)^2-(x-10)^2-1\right]}{\left[(x-10)^2+1\right]^3}=\frac{2(x-10)\left[(x-10)^2-3\right]}{\left[(x-10)^2+1\right]^3}=0\Rightarrow x=10,\ x=10\pm\sqrt{3}.$$

Únicamente x = 10 está en el tramo de subida.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: (–∞, 5) y (5, +∞)

	9 — 10	10 — 11
	x = 9,5	x = 10,5
y''	+	–
y'	↗	↘

La función derivada es creciente en (9, 10) y decreciente en (10, 11).

Como en x = 10 la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo.

En el kilómetro 10 la pendiente es máxima.

71. Actividad resuelta.

72. **Se lanza un objeto verticalmente y hacia arriba desde una grúa. La función que determina la altura del objeto, en metros, en cada instante es $h(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t + 21{,}6$, donde t es el tiempo en segundos.**

a) ¿Qué altura tiene la grúa?

b) ¿Con qué velocidad se lanzó el objeto?

c) ¿Cuándo alcanzará el objeto su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

d) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar al suelo? ¿Qué velocidad tendrá en ese momento?

a) $h(0) = 21{,}6$ m tiene la grúa.

b) $v(t) = h'(t) = -9{,}8t + 39{,}2 \Rightarrow v(0) = 39{,}2$ m/s se lanzó el objeto.

c) $v(t) = h'(t) = -9{,}8t + 39{,}2 = 0 \Rightarrow t = 4$.

A los 4 segundos el objeto alcanzó su altura máxima. La altura máxima alcanzada fue $h(4) = 100$ m.

d) $h(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t + 21{,}6 = 0 \Rightarrow h = \dfrac{-39{,}2 \pm \sqrt{1960}}{-9{,}8} = \begin{cases} 8{,}52 \\ -0{,}52 \end{cases}$

El objeto tardará, aproximadamente, 8,52 s en caer al suelo.

En ese momento su velocidad será $v(8{,}52) = h'(8{,}52) = -44{,}296$ m/s.

73. **Para optimizar la producción de aceitunas en un terreno se quiere aumentar el número de olivos. Actualmente hay 80 olivos que producen una media de 60 kg cada uno. Se prevé que por cada olivo que se añada la producción de cada uno disminuirá en un 1 %.**

a) ¿Cuál es la producción prevista si se plantan 20 olivos? ¿Y si se plantan x?

b) Calcula el número de olivos que hay que plantar para que la producción total sea máxima.

c) En el caso de producción máxima, ¿cuál es la producción media de cada árbol?

a) Si se plantan 20 olivos, la producción prevista será $(80 + 20) \cdot 60 \cdot (1 - 0{,}01 \cdot 20) = 4800$ kg.

Si se plantan x olivos, la producción prevista será $P(x) = (80 + x) \cdot 60 \cdot (1 - 0{,}01x) = -0{,}6x^2 + 12x + 4800$ kg.

b) $D(P) = [0, +\infty)$ y $P'(x) = -1{,}2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 10$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $[0, 10)$ y $(10, +\infty)$

	0 — 10	10 — $+\infty$
	$x = 1$	$x = 11$
$P'(x)$	+	–
$P(x)$	↗	↘

La función es creciente en $[0, 10)$ y decreciente en $(10, +\infty)$.

Como en $x = 10$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo.

Por tanto, hay que añadir 10 olivos para que la producción sea máxima.

c) Si se añaden 10 olivos, se producirán $P(10) = 4860$ kg entre todos.

Por tanto, cada olivo producirá 4860 : 90 = 54 kg de media.

74. **Si $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ entonces $f'(3)$ es:**

A. 0 **B. 1** **C. $+\infty$** **D. No existe.**

$f'(3)$ no existe porque $x = 3$ no pertenece al dominio de $f(x)$.

La respuesta correcta es la D.

75. **La *TVM* de la función $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x - 2}$ en el intervalo [1, 5] es:**

A. 2 **B. 1** **C. 8** **D. No hay.**

La función $f(x)$ no es continua en $x = 2$. Como el punto $x = 2$ pertenece al intervalo [1, 5], entonces no tiene sentido calcular la tasa de variación media.

La respuesta correcta es la D.

76. Las funciones *f* y *g* son continuas y derivables en (0, 6) y además, *f*(1) = 2, *g*(1) = 3, *f* ’ (1) = 3, *f* ’ (3) = – 5, *g* ’ (1) = 4 y *g* ’ (2) = 7. El valor de $(f \circ g)'(1) + (g \circ f)'(1)$ es:

A. 0 **B. 1** **C. –1** **D. Otro valor**

$(f \circ g)'(1) + (g \circ f)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) + g'(f(1)) \cdot f'(1) = f'(3) \cdot 4 + g'(2) \cdot 3 = -5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 1$

La respuesta correcta es la B.

77. La función $f(x) = x^2$ sen *x* en el punto *x* = 0:

A. Es creciente. **B. Tiene un máximo.** **C. Es decreciente.** **D. Tiene un mínimo.**

$f'(x) = 2x\,\text{sen}x + x^2\cos x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm\frac{\pi}{2}$

Estudiamos la monotonía en los intervalos: $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

	$\frac{-\pi}{2}$ $x = -1$ 0	0 $x = 1$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↗

La función es creciente en $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

La función es creciente en *x* = 0.

La respuesta correcta es la A.

Encuentra el error

78. Sergio tiene que estudiar el crecimiento, decrecimiento , máximos y mínimos de la función $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ en el intervalo [0, 2π] y ha procedido así:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x \Rightarrow f(x) = \text{sen}\, x$. La derivada de esta función es $f'(x) = \cos x$

Esta derivada se anula en el intervalo [0, 2π] para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$, y como cos *x* > 0 en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y cos *x* < 0 en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, la función es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, con un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

Si su respuesta es incorrecta, ¿dónde ha cometido el error?

La expresión $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\text{sen}^2 x} = \text{sen}x$ es incorrecta porque $\sqrt{\text{sen}^2 x} = |\text{sen}x| = \begin{cases} \text{sen}x & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ -\text{sen}x & \text{si } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$.

Si $0 \le x \le \pi$, $f'(x) = \cos x$ y $f'(x) < 0$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $f'(x) > 0$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Si $\pi \le x \le 2\pi$, $f'(x) = -\cos x$ y $f'(x) < 0$ en el intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y $f'(x) > 0$ en el intervalo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Por tanto, la función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Como en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$ la función cambia de ser creciente a decreciente, son máximos relativos.

PONTE A PRUEBA

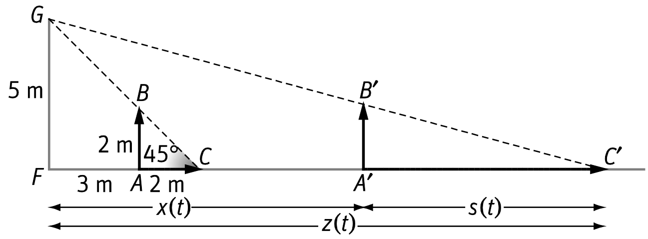
Aprovechando el vidrio

Actividad resuelta.

La velocidad de la sombra

Una farola de 5 m de altura está situada en una calle horizontal y recta por la que camina un hombre de 2 m de altura si incluimos la longitud de su sombrero. Pasea a velocidad constante de 1 m/s, alejándose de la farola. En un instante, se fija en la sombra que proyecta y comprueba que mide exactamente lo mismo que él. A los 6 s, se da cuenta de que la sombra es ahora bastante más larga, por lo que deduce que el tamaño de la sombra crece a una cierta velocidad y que la sombra que proyecta su sombrero avanza bastante más rápida que él sobre la calzada de la calle. El hombre se plantea estas preguntas: ¿Es posible determinar la velocidad de crecimiento de la sombra?, ¿Y la velocidad de alejamiento de la sombra del sombrero? ¿En qué instante la sombra del sombrero estará a cierta distancia de la farola?

Para contestar a estas cuestiones pueden ayudarte estas indicaciones:



1. **Realiza un gráfico que represente la situación. Incluye la distancia a la que estaba el hombre de la farola cuando hizo la primera y segunda observación, el tiempo que había transcurrido desde que pasó junto a la farola en la primera y en la segunda observación, la longitud de su sombra en la segunda observación…**

2. **Si llamas *x* a la distancia del hombre a la farola y *s* a la longitud de la sombra, expresa ambas en función del tiempo *t*.**

   $x(t) = 3 + vt = 3 + 1 \cdot t = 3 + t$

   Como los triángulos FGC' y $A'B'C'$ son semejantes por estar en posición de Tales, entonces $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{FC'}{FG}$.

   Es decir, $\dfrac{s(t)}{2} = \dfrac{x(t)+s(t)}{5} \Rightarrow 5s(t) = 2x(t) + 2s(t) \Rightarrow 3s(t) = 2x(t) \Rightarrow 3s(t) = 2(3 + t) \Rightarrow s(t) = 2 + \dfrac{2}{3}t$

3. **Si *z* es la distancia del extremo de la sombra del sombrero a la farola, expresa *z* también como una función del tiempo *t*.**

   $z(t) = x(t) + s(t) = 3 + t + 2 + \dfrac{2}{3}t = 5 + \dfrac{5}{3}t$

4. **Halla la velocidad a la que crece la longitud de la sombra y la velocidad con la que la sombra del sombrero se va alejando de la farola.**

   $s'(t) = \dfrac{2}{3}$ m/s crece la sombra y $z'(t) = \dfrac{5}{3}$ m/s se aleja la sombra del sombrero de la farola.

5. **Si se supone que la luz de la farola sea suficientemente intensa, ¿cuánto tiempo tardará en llegar la sombra del sombrero a un punto situado a 150 m de la farola?**

   Si $z(t) = 150$ m entonces $z(t) = 5 + \dfrac{5}{3}t = 150 \Rightarrow t = 87$ segundos.

AUTOEVALUACIÓN

1. La siguiente tabla muestra las temperaturas de una ciudad desde las 6 hasta las 12 h.

Hora	6	7	8	9	10	11	12
Temp. ºC	4	4,5	5	7,5	8,6	10	13

Calcula la tasa de variación media de la temperatura en los intervalos [6, 12] y [9, 10].

$TVM\ f[6, 12] = \dfrac{f(12)-f(6)}{12-6} = \dfrac{13-4}{6} = \dfrac{9}{6} = 1{,}5$ $\qquad TVM\ f[9, 10] = \dfrac{f(10)-f(9)}{10-9} = \dfrac{8{,}6-7{,}5}{1} = \dfrac{1{,}1}{1} = 1{,}1$

2. Halla la *TVI* de las funciones:

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2}$ **en** $\boldsymbol{x = 5}$ $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{8}{3-x}}$ **en** $\boldsymbol{x = -7}$

b) $TVI\ f(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3+16h^2+85h}{h} = 85$ $\qquad$ b) $TVI\ f(-7) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{8h}{10h(10-h)} = \dfrac{8}{100}$

3. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}}$ $\qquad$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = (3x^2 - x)^3}$ $\qquad$ **e)** $\boldsymbol{f(x) = \cos(\pi - 4x)}$

b) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x+3}}$ $\qquad$ **d)** $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+3}\right)}$ $\qquad$ **f)** $\boldsymbol{f(x) = x^2e^x}$

a) $f'(x) = = \dfrac{-(x+3)-(1-x)}{(x+3)^2} = \dfrac{-4}{(x+3)^2}$ $\qquad$ c) $f'(x) = 3(3x^2 - x)^2(6x - 1)$ $\qquad$ e) $f'(x) = 4\text{sen}(\pi - 4x)$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ $\qquad$ d) $f'(x) = \dfrac{x+3}{1-x}\cdot\dfrac{-4}{(x+3)^2} = \dfrac{-4}{(1-x)(x+3)}$ $\qquad$ f) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

4. Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 2}$ **calcula** $\boldsymbol{f'(0), f'(4), f'(-1)}$**.**

$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(0) = -5,\ f'(4) = 3$ y $f'(-1) = -7$.

5. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x - 4}$ **en uno de los puntos en los que la función corta al eje *X*.**

$0 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow$ Los puntos de tangencia son $A(4, 0)$ y $B(-1, 0)$. Además como $f'(x) = 2x - 3$, entonces la pendiente de la recta tangente en A es $f'(4) = 5$ y la de la recta tangente en B es $f'(-1) = -5$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en A es $y = 5(x - 4)$, y la de la recta tangente en B es $y = -5(x + 1)$.

6. Determina los extremos relativos de la función $\boldsymbol{f(x) = 3x(x-4)^2}$**. Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

$f'(x) = 3(x - 4)^2 + 6x(x - 4) = 3(x - 4)[(x - 4) + 2x] = 3(x - 4)(3x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$ o $x = \dfrac{4}{3}$

La función es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 4\right)$ y creciente en $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$. Como en $x = \dfrac{4}{3}$ la función cambia de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Como en $x = 4$ la función cambia de ser decreciente a creciente, es un mínimo relativo.

7. Desde la ventana del edificio, se lanza una pelota verticalmente. Su altura, en metros, viene determinada por la función: $h(t) = -4,9t^2 + 14,63t + 30,5$ donde t es el tiempo en segundos, y su velocidad se halla calculando la derivada de la posición respecto del tiempo.

a) ¿A qué altura está la ventana?

b) ¿Con qué velocidad se lanzó la pelota?

c) ¿Cuándo alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es la altura que alcanza?

d) ¿Cuánto tiempo tardará en caer el objeto?

a) $h(0) = 30,5$ m está la ventana.

b) $v(t) = h'(t) = -9,8t + 14,63 \Rightarrow v(0) = 14,63$ m/s se lanzó la pelota.

c) $v(t) = h'(t) = -9,8t + 14,63 = 0 \Rightarrow t = 1,5$ s.

A los 1,5 segundos el objeto alcanzó su altura máxima. La altura máxima alcanzada fue $h(1,5) = 41,42$ m.

d) $h(t) = -4,9t^2 + 14,63t + 30,5 = 0 \Rightarrow t = 4,4$. Tardará 4,4 s en caer el objeto al suelo.