2 Expresiones algebraicas

ANALIZA Y RESPONDE

¿Qué relación hay entre el pasatiempo *Une los puntos* y una película de animación?

Al igual que en el pasatiempo *Une los puntos*, en una película de animación se marcan los puntos clave de los personajes y, mediante un programa de ordenador, se enlazan dichos puntos para generar el movimiento de los personajes.

¿Qué es un *spline* cúbico?

Un *spline* cúbico es un polinomio de tercer grado.

REFLEXIONA Y SACA CONCLUSIONES

¿Por qué el autor afirma que *Todas las películas de animación modernas están llenas de polinomios*?

El autor afirma que *Todas las películas de animación modernas están llenas de polinomios* porque el movimiento de los personajes se generan dibujando *splines* cúbicos. Y los *splines* cúbicos son polinomios de tercer grado.

¿A qué crees que se refiere el autor cuando habla de curvas suaves?

Las curvas suaves son curvas que no poseen puntos angulosos.

Actividades propuestas

1. Encuentra la expresión algebraica que describe cada uno de los siguientes enunciados.

a) El perímetro de un rectángulo de base *b* y altura *h*.

b) El área de un rombo de diagonal mayor *D* y diagonal menor *d*.

c) El volumen de un prisma de base cuadrada de lado *x* y altura *h*.

d) La propiedad distributiva de tres números reales *a*, *b* y *c*.

e) El producto de potencias de base *a* y exponentes *n* y *m* es una potencia de base *a* cuyo exponente es la suma de los exponentes.

f) El logaritmo en base *a* de *x* es *y*.

a) $P = 2 \cdot (b + h)$ **c)** $V = x^2 \cdot h$ **e)** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

b) $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$ **d)** $a(b + c) = ab + ac$ **f)** $\log_a x = y$

2. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?

a) $\sqrt{12x}$ **b)** $\dfrac{4}{x}$ **c)** $3x^{-2}$ **d)** $x^2\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12x} = \sqrt{12}x^{\frac{1}{2}}$ no es un monomio porque el exponente de la variable x no es un número natural.

b) $\dfrac{4}{x} = 4x^{-1}$ no es un monomio porque el exponente de la variable x no es un número natural.

c) $3x^{-2}$ no es un monomio porque el exponente de la variable x no es un número natural.

d) $x^2\sqrt{3}$ sí es un monomio.

3. Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado *x* con los monomios de la columna derecha.

1. Perímetro $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

2. Área $3x$

3. Altura $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Perímetro: $3x$ Área: $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Altura: $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

4. Explica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios y cuáles no.

a) $A(x) = x + 15$

b) $B(x) = \frac{x^3}{5} - \sqrt{13}$

c) $C(x) = \frac{5}{x} + 23x$

d) $D(x) = \sqrt{x} - x + 3$

a) Sí es un polinomio porque es la suma de varios monomios no semejantes.

b) Sí es un polinomio porque es la suma de varios monomios no semejantes.

c) No es un polinomio porque no es la suma de varios monomios no semejantes, ya que $\frac{5}{x} = 5x^{-1}$ no es un monomio, al ser el exponente de la variable *x* un número no natural.

d) No es un polinomio porque no es la suma de varios monomios no semejantes, ya que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ no es un monomio, al ser el exponente de la variable *x* un número no natural.

5. Actividad resuelta.

6. Completa la tabla indicando los monomios, el grado y el valor numérico en $x = -2$, $y = -3$, $z = 2$ del polinomio $P(x, y) = x^2y^3 + 3xy - 2x + 2$.

Monomio	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●
Grado	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●
Valor numérico	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

Monomio	x^2y^3	$3xy$	$-2x$	2	P(*xyz*)
Grado	5	2	1	0	5
Valor numérico	–108	18	4	2	–84

7. Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 2x - 15$:

a) Calcula $P(1)$, $P(-1)$, $P(0)$ y $P(1000)$.

b) ¿Para qué valores de *x* el valor numérico de $P(x)$ se hace cero?

a) $P(1) = -16$, $P(-1) = -12$, $P(0) = -15$, $P(1000) = 997\,985$

b) $P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

8. La trayectoria de una pelota de tenis viene dada por la expresión algebraica $H = 2{,}2 + 7t - t^2$, donde *H* es la altura de la pelota en metros y *t* es el tiempo en segundos.

a) Indica el grado del polinomio y los monomios que lo forman.

b) Halla la altura a la que se encuentra la pelota, para cada uno de estos tiempos.

$t = 0$ s **$t = 3$ s** **$t = 5{,}5$ s** **$t = 7$ s**

a) Grado del polinomio: 2 Monomios: 2,2; $7t$; $-t^2$

b) $t = 0$: $H = 2{,}2$

$t = 3$: $H = 2{,}2 + 7 \cdot 3 - 3^2 = 14{,}2$

$t = 5{,}5$: $H = 2{,}2 + 7 \cdot 5{,}5 - 5{,}5^2 = 10{,}45$

$t = 7$: $H = 2{,}2 + 7 \cdot 7 - 7^2 = 2{,}2$

9. Considera un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide la mitad que uno de los lados iguales. Llama x al lado menor y encuentra la expresión algebraica del perímetro y del área.

Si el lado desigual mide x, cada uno de los otros dos lados medirá $2x$.

Calculamos la altura, h, mediante el teorema de Pitágoras: $(2x)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{15}x}{2}$

El área del triángulo es $A(x) = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{15}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{15}x^2}{4}$. El perímetro es $P(x) = 5x$.

10. Expresa con un polinomio la fórmula del volumen de los siguientes ortoedros.

a) Sus aristas miden x, $2xy$ y $3z + 1$, respectivamente.

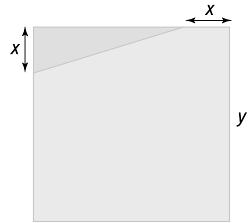
b) Sus dimensiones son números consecutivos, siendo x el mayor de ellos.

a) $V = x \cdot 2xy \cdot (3z + 1) = 6x^2yz + 2x^2y$

b) Las aristas medirán x, $x - 1$ y $x - 2$:

$V = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x \cdot (x^2 - 2x - x + 2) = x \cdot (x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

11. El cuadrado de la figura tiene lado y.



a) Escribe un polinomio que exprese el área del pentágono sombreado.

b) Si $x = 3$ cm e $y = 10$ cm, calcula el área sombreada.

a) $A(x,y) = y^2 - \frac{x(y-x)}{2} = y^2 - \frac{xy - x^2}{2} = \frac{2y^2 - xy + x^2}{2}$

b) $A(3,10) = \frac{2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 3^2}{2} = \frac{200 - 30 + 9}{2} = \frac{179}{2}$ cm^2

12. Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$ y $G(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5	***E*(3)**	**36 π**
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3	***G*(3)**	**15 π**
Volumen de una esfera de radio 3	***F*(3)**	**48 π**

$V_{cono} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 = 15\pi = G(3)$

$A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 10 \cdot \pi \cdot 3 = 48\pi = F(3)$

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi = E(3)$

13. Dados los polinomios $A(x) = 2x - 1$, $B(x) = -2x^2 + 3x - 5$ y $C(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$, calcula:

a) $A(x) - B(x)$

b) $A(x) \cdot B(x)$

c) $2x^2 \cdot A(x) - C(x)$

d) $[A(x) - C(x)]^2$

a) $A(x) - B(x) = 2x - 1 - (-2x^2 + 3x - 5) = 2x - 1 + 2x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - x + 4$

b) $A(x) \cdot B(x) = (2x - 1) \cdot (-2x^2 + 3x - 5) = -4x^3 + 6x^2 - 10x + 2x^2 - 3x + 5 = -4x^3 + 8x^2 - 13x + 5$

c) $2x^2 \cdot A(x) - C(x) = 2x^2 \cdot (2x - 1) - (4x^3 - 3x^2 + 1) = 4x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = x^2 - 1$

d) $[A(x) - C(x)]^2 = [2x - 1 - (4x^3 - 3x^2 + 1)]^2 = (-4x^3 + 3x^2 + 2x - 2)^2 = (-4x^3 + 3x^2 + 2x - 2) \cdot (-4x^3 + 3x^2 + 2x - 2) =$

$= 16x^6 - 12x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 12x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 8x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 4x + 8x^3 - 6x^2 - 4x + 4 = 16x^6 - 24x^5 -$

$7x^4 + 28x^3 - 8x^2 - 8x + 4$

14. Si el grado de $P(x)$ es 2 y el de $Q(x)$ es 3, ¿qué grado tienen los siguientes polinomios?

a) $P(x) \cdot Q(x)$

b) $P(x) + [Q(x)]^2$

a) El grado de $P(x) \cdot Q(x)$ es grado $(P(x))$ + grado $(Q(x))$; es decir, 2 + 3 =5.

b) El grado de $P(x) + [Q(x)]^2$ es el grado de $[Q(x)]^2$; es decir, 6.

15. Desarrolla aplicando las identidades notables.

a) $(3 - 4xy)^2$

b) $(-b + 7x^2)^2$

c) $\left(3a + 2\sqrt{b}\right)^2$

d) $(2x - 5y)(2x + 5y)$

a) $(3 - 4xy)^2 = 9 + 16x^2y^2 - 24xy$

b) $(-b + 7x^2)^2 = b^2 + 49x^4 - 14bx^2$

c) $\left(3a + 2\sqrt{b}\right)^2 = 9a^2 + 4b + 12a\sqrt{b}$

d) $(2x - 5y)(2x + 5y) = 4x^2 - 25y^2$

16. Actividad resuelta.

17. Extrae el factor común de mayor grado posible de los siguientes polinomios.

a) $16x^3 + 24x^2$

b) $3xy^3 - 27x^3y^2$

c) $-5x^2z^2 - 10xz^3 - 15x^2z^5$

d) $x^2zy^2 - 2yz^2 + 4xy^5$

a) $16x^3 + 24x^2 = 8x^2(2x + 3)$

b) $3xy^3 - 27x^3y^2 = 3xy^2(y - 9x^2)$

c) $-5x^2z^2 - 10xz^3 - 15x^2z^5 = -5xz^2\,(x + 2z + 3xz^3)$

d) $x^2zy^2 - 2yz^2 + 4xy^5 = y\,(x^2zy - 2z^2 + 4xy^4)$

18. Efectúa las siguientes divisiones.

a) $(3x^3 - 2x^2 - 14x + 15) : (3x - 5)$

b) $(x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 17x^2 + 2) : (x^3 - 5x + 2)$

c) $(6x^4 - 2x^3 + 15x - 5) : (3x - 1)$

a) $C(x) = x^2 + x - 3 \qquad R(x) = 0$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & -2x^2 & -14x & +15 & 3x-5 \\ \cline{5-5}
-\cancel{3x^3} & +5x^2 & & & x^2+x-3 \\ \hline
 & \cancel{3x^2} & -14x & +15 & \\
 & -\cancel{3x^2} & +5x & & \\ \hline
 & & -\cancel{9x} & +15 & \\
 & & \cancel{9x} & -15 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

c) $C(x) = 2x^3 + 5 \qquad R(x) = 0$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^4} & -\cancel{2x^3} & +15x & -5 & 3x-1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{6x^4} & +\cancel{2x^3} & & & 2x^3+5 \\ \hline
 & & +15x & -5 & \\
 & & -\cancel{15x} & +5 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

b) $C(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad R(x) = 11x$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
\cancel{x^5} & -3x^4 & -4x^3 & +17x^2 & & +2 & x^3-5x+2 \\ \cline{7-7}
-\cancel{x^5} & & +5x^3 & -2x^2 & & & x^2-3x+1 \\ \hline
 & -\cancel{3x^4} & +x^3 & +\cancel{15x^2} & & +2 & \\
 & +\cancel{3x^4} & & -\cancel{15x^2} & +6x & & \\ \hline
 & & x^3 & & +6x & +2 & \\
 & & -\cancel{x^3} & & +5x & -2 & \\ \hline
 & & & & 11x & &
\end{array}$$

19. Encuentra un polinomio que multiplicado por 3*x* – 1 dé como resultado 6*x*³ + *x*² – 7*x* + 2.

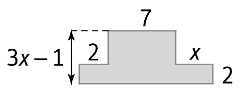
$$
\begin{array}{rl|l}
\cancel{6x^3} + x^2 - 7x + 2 & & 3x-1 \\
\cancel{-6x^3} + 2x^2 & & 2x^2 + x - 2 \\
\hline
\cancel{3x^2} - 7x + 2 & & \\
\cancel{-3x^2} + x & & \\
\hline
\cancel{-6x} + 2 & & \\
6x - 2 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

El polinomio buscado es $2x^2 + x - 2$.

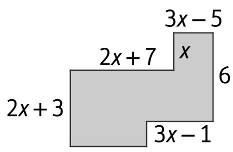
20. Actividad resuelta.

21. Expresa el perímetro y el área de estas figuras mediantes dos polinomios.

a)



b)



a) $P = 2 \cdot (2 + 7 + x) + 2 \cdot (3x - 1) = 4 + 14 + 2x + 6x - 2 = 8x + 16$

$A = 7 \cdot (3x - 1 - 2) + 2 \cdot (2 + 7 + x) = 21x - 7 - 14 + 4 + 14 + 2x = 23x - 3$

b) $P = 2 \cdot (2x + 7 + 3x - 5) + 2 \cdot (2x + 3 + x) = 4x + 14 + 6x - 10 + 4x + 6 + 2x = 16x + 10$

$A = (2x + 3)^2 + (3x - 1)(6 - x) + x(3x - 5) = 4x^2 + 9 + 12x + 18x - 3x^2 - 6 + x + 3x^2 - 5x = 4x^2 + 26x + 3$

22. Actividad resuelta.

23. Copia y completa estas expresiones para que se correspondan con el cuadrado de un binomio.

a) $\mathbf{4 + 6b + \bullet\bullet\bullet}$

b) $\mathbf{x^2 + 25y^2 + \bullet\bullet\bullet}$

c) $\mathbf{9x^6 - 18x^3y + \bullet\bullet\bullet}$

d) $\mathbf{x^2 + 9x^4 + \bullet\bullet\bullet}$

a) $4 + 6b + \frac{9}{4}b^2 = \left(2 + \frac{3}{2}b\right)^2$

b) $x^2 + 25y^2 + 10xy = (x + 5y)^2$

c) $9x^6 - 18x^3y + 9y^2 = (3x^3 - 3y)^2$

d) $x^2 + 9x^4 + 6x^3 = (x + 3x^2)^2$

24. Escribe estos polinomios como potencias de binomios utilizando las identidades notables.

a) $\mathbf{16x^2 - 8x + 1}$

b) $\mathbf{9x^2 - 42xy + 49y^2}$

c) $\mathbf{-4a^2 + 36b^2}$

d) $\mathbf{3x^2 - 9y^2}$

a) $16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$

b) $9x^2 - 42xy + 49y^2 = (3x - 7y)^2$

c) $-4a^2 + 36b^2 = (6b - 2a)(6b + 2a)$

d) $3x^2 - 9y^2 = \left(\sqrt{3}x - 3y\right)\left(\sqrt{3}x + 3y\right)$

25. Descompón estas expresiones en factores.

a) $\mathbf{z^2 - 169}$

b) $\mathbf{25x^2 - 10xy + y^2}$

c) $\mathbf{(2a - 7b)^2 - (2a + 7b)^2}$

d) $\mathbf{-x^2y^2 - 9y^2 - 6xy^2}$

a) $z^2 - 169 = (z - 13)(z + 13)$

c) $25x^2 - 10xy + y^2 = (5x - y)^2$

c) $(2a - 7b)^2 - (2a + 7b)^2 = -56ab$

d) $-x^2y^2 - 9y^2 - 6xy^2 = -(xy + 3y)^2$

26. Actividad interactiva.

27. Divide usando la regla de Ruffini.

a) $(3x^3 + 4x^2 - 8x) : (x + 3)$

b) $(x^4 + x^3 - 2x - 2) : (x + 1)$

c) $(x^4 - 2x^2 - x + 1) : (x + 2)$

d) $(3x^3 + 4x^2 - 3x - 7) : (x - 5)$

a) $C(x) = 3x^2 - 5x + 7$ $R(x) = -21$

	3	4	–8	0
–3		–9	15	–21
	3	–5	7	–21

b) $C(x) = x^3 - 2$ $R(x) = 0$

	1	1	0	–2	–2
–1		–1	0	0	2
	1	0	0	–2	0

c) $C(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ $R(x) = 11$

	1	0	–2	–1	1
–2		–2	4	–4	10
	1	–2	2	–5	11

d) $C(x) = 3x^2 + 19x + 92$ $R(x) = 453$

	3	4	–3	–7
5		15	95	460
	3	19	92	453

28. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto.

a) $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

d) $(x^4 + 3x^2 - 2x) : (x - 2)$

a) $C(x) = 3x^3 - 3x^2 + x$ $R(x) = -3$

	3	0	–2	1	–3
–1		–3	3	–1	0
	3	–3	1	0	–3

b) $C(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$ $R(x) = -1$

	1	0	–2	0	–1	1
1		1	1	–1	–1	–2
	1	1	–1	–1	–2	–1

c) $C(x) = 2x^2 - 5x + 13$ $R(x) = -27$

	2	–1	3	–1
–2		–4	10	–26
	2	–5	13	–27

d) $C(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + 12$ $R(x) = 24$

	1	0	3	–2	0
2		2	4	14	24
	1	2	7	12	24

29. Estudia cuál es el resto de estas divisiones sin realizarlas e indica si son exactas.

a) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x - 3) : (x + 2)$

b) $(2x^4 - 7x^3 + x^2 - 5x + 9) : (x - 1)$

c) $(x^3 + x^2 - 17x + 15) : (x + 5)$

d) $(x^3 + x^2 - 12x + 7) : (x - 7)$

¿Qué teorema has utilizado?

a) $R = 2 \cdot (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 3 = -133 \neq 0$. La división no es exacta.

b) $R = 2 \cdot 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 9 = 0$. La división es exacta.

c) $R = (-5)^3 + (-5)^2 - 17 \cdot (-5) + 15 = 0$. La división es exacta.

d) $R = 7^3 + 7^2 - 12 \cdot 7 + 7 = 315 \neq 0$. La división no es exacta.

Se ha utilizado el teorema del resto.

30. ¿Cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$? Justifica tu respuesta.

A. $(x + 1)$ **B.** $(x - 1)$ **C.** $(x + 3)$ **D.** $(x - 3)$ **E.** $(x + 5)$ **F.** $(x - 5)$

A. $P(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 25 \cdot (-1) - 100 = -72 \neq 0 \Rightarrow (x + 1)$ no es un factor.

B. $P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 25 \cdot 1 - 100 = -120 \neq 0. \Rightarrow (x - 1)$ no es un factor.

C. $P(-3) = (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 - 25 \cdot (-3) - 100 = -16 \neq 0 \Rightarrow (x + 3)$ no es un factor.

D. $P(3) = 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 25 \cdot 3 - 100 = -112 \neq 0 \Rightarrow (x - 3)$ no es un factor.

E. $P(-5) = (-5)^3 + 4 \cdot (-5)^2 - 25 \cdot (-5) - 100 = 0 \Rightarrow (x + 5)$ sí es un factor.

F. $P(5) = 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 25 \cdot 5 - 100 = 0 \Rightarrow (x - 5)$ sí es un factor.

31. Indica si los binomios $(x - 2)$ y $(x - 1)$ son factores del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$. ¿Cuál es el resto de las divisiones $P(x) : (x - 2)$ y $P(x) : (x - 1)$?

Por el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 2$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $R = P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 0$.

Por tanto, $x - 2$ sí es un factor de $P(x)$ y el resto de la división de $P(x) : (x - 2)$ es cero.

Por el teorema del factor, $x - 1$ es un factor de $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 1$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $R = P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = -4$.

Por tanto, $x - 1$ no es un factor de $P(x)$ y el resto de la división de $P(x) : (x - 1)$ es -4.

32. ¿El polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ tiene como factor al binomio $(x - 3)$? Realiza la división $P(x) : (x - 3)$ y comprueba si el cociente es divisible por el mismo factor. ¿Qué puedes decir de $P(x)$?

Por el teorema del factor, $x - 3$ es un factor de $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 3$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $R = P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$.

Por tanto, $x - 3$ sí es un factor de $P(x)$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^3} & -6x^2 & +9x & x-3 \\
\cline{4-4}
\cancel{-x^3} & +3x^2 & & x^2-3x \\
\cline{1-3}
 & \cancel{-3x^2} & +9x & \\
 & \cancel{3x^2} & -9x & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Por el teorema del factor, $x - 3$ es un factor de $C(x) = x^2 - 3x$ si el resto de la división de $C(x)$ entre $x - 3$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $R = C(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$.

Luego, $x - 3$ sí es un factor de $C(x)$ y entonces $P(x)$ es divisible ente $(x - 3)^2$.

33. Escribe un polinomio $P(x)$ de tercer grado que cumpla las siguientes condiciones.

a) Que tenga como factor el binomio $x + 7$.

b) Que su división entre $x + 1$ sea exacta.

c) $P(1) = 0$

d) $P(3) = 80$

Por las condiciones *a*), *b*) y *c*) el polinomio es de la forma $P(x) = a(x + 7)(x + 1)(x - 1)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Por la condición *d*), $P(3) = a(3 + 7)(3 + 1)(3 - 1) = 80 \Rightarrow 80a = 80 \Rightarrow a = 1$

Por tanto, el polinomio buscado es $P(x) = (x + 7)(x + 1)(x - 1) = (x + 7)(x^2 - 1) = x^3 - x + 7x^2 - 7 = x^3 + 7x^2 - x - 7$.

34. Actividad resuelta.

35. Halla el valor de *m* para que:

a) La división entre $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + m$ y $(x - 4)$ sea exacta.

b) La división entre $Q(x) = 5x^3 + 4x^2 - mx - 3$ y $(x + 2)$ tenga resto 3.

c) $(x + 1)$ sea divisor de $R(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + m$.

d) $S(x) = x^4 - (mx)^2 + x + 10$ sea múltiplo de $(x - 2)$.

a) Por el teorema del resto, $P(4) = 4^3 - 5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + m = -24 + m = 0 \Rightarrow m = 24$.

b) Por el teorema del resto, $Q(-2) = 5 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - m \cdot (-2) - 3 = -27 + 2m = 3 \Rightarrow m = 15$.

c) Por el teorema del resto, $R(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1) + m = m = 0 \Rightarrow m = 0$.

d) Por el teorema del resto, $S(2) = 2^4 - (2m)^2 + 2 + 10 = 28 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{7}$

36. ¿Cuánto debe valer *k* para que $x - 2$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 7x + k$?

Por el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 2$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $R = P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + k = -6 + k = 0 \Rightarrow k = 6$.

37. Actividad interactiva.

38. ¿Es $x = 5$ raíz de $5x^{98} + 5x^{49} + 44$?

$x = 5$ no puede ser raíz del polinomio $5x^{98} + 5x^{49} + 44$ porque no es divisor del término independiente.

39. Determina las raíces enteras de estos polinomios.

a) $P(x) = x^4 - 100$

b) $Q(x) = x^4 - 1$

c) $R(x) = x^2 - 3x - 4$

d) $S(x) = 2x^2 - 8$

a) $P(x) = x^4 - 100 = (x^2 - 10)(x^2 + 10) = \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right)\left(x^2 + 100\right) \Rightarrow$ Raíces: $\sqrt{10}$ y $-\sqrt{10}$

b) $Q(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \Rightarrow$ Raíces: 1 y –1

c) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow R(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) \Rightarrow$ Raíces: 4 y –1

d) $S(x) = 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2) \Rightarrow$ Raíces: 2 y –2

40. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $A(x) = 4x^2 - 4x - 3$

b) $B(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

c) $C(x) = 2x^3 + 8x^2 - 2x - 8$

d) $D(x) = x^3 + 7x^2 - 49x - 55$

a) $A(x) = 4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-4}{8} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

b) $B(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$

	1	0	2	0	–3
1		1	1	3	3
	1	1	3	3	0
–1		–1	0	–3	
	1	0	3	0	

c) $C(x) = 2(x^3 + 4x^2 - x - 4) = 2(x - 1)(x + 1)(x + 4)$

	1	4	–1	–4
1		1	5	4
	1	5	4	0
–1		–1	–4	
	1	4	0	

d) $D(x) = (x - 5)(x + 1)(x + 11)$

	1	7	–49	–55
5		5	60	55
	1	12	11	0
–1		–1	–11	
	1	11	0	

41. Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -4$. ¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

Un polinomio de tercer grado cuyas raíces son –1, 2 y –4, puede ser:

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 4) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Existen infinitos polinomios de tercer grado cuyas raíces sean –1, 2 y –4.

Todos los polinomios de la forma $P(x) = a \cdot (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$, con $a \in \mathbb{R}$, son polinomios de tercer grado cuyas raíces son –1, 2 y –4.

42. Descompón en factores irreducibles estos polinomios e indica si son primos entre sí.

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$

b) $B(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x$

c) $C(x) = x^3 + x^2 - 6x - 6$

d) $D(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$

a) $A(x) = (x - 5)(x^2 + 1)$

	1	–5	1	–5
5		5	0	5
	1	0	1	0

b) $B(x) = x(3x^2 + 5x - 2) = 3x(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

c) $C(x) = (x + 1)(x^2 - 6) = (x+1)\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$

	1	1	–6	–6
–1		–1	0	6
	1	0	–6	0

d) $D(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3)(x - 4)$

	1	–4	–7	22	24
–2		–2	12	–10	–24
	1	–6	5	12	
–1		–1	7	–12	
	1	–7	12	0	
3		3	–12		
	1	–4	0		

Todos los polinomios son primos entre sí.

43. Factoriza estos polinomios.

a) $P(x) = x^4 - 9x^2$

b) $Q(x) = x^2 - 49$

c) $R(x) = 2x^3 - 2x$

d) $S(x) = x^8 - 16x^4$

e) $T(x) = 4x^{200} + 12x^{100} + 9$

f) $V(x) = x^{17} - 2x^{16}$

a) $P(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9) = x^2(x - 3)(x + 3)$

b) $Q(x) = x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$

c) $R(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x-1)(x+1)$

d) $S(x) = x^8 - 16x^4 = x^4(x^4 - 16) = x^4(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

e) $T(x) = 4x^{200} + 12x^{100} + 9 = (2x^{100} + 3)^2$

f) $V(x) = x^{17} - 2x^{16} = x^{16}(x - 2)$

44. Expresa los siguientes polinomios como producto de factores irreducibles sin hacer ninguna división.

a) $P(x) = x(3x - 4) + 3x - 4$

b) $Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$

c) $R(x) = (x - 2)(x + 3) + x^2 + 6x + 9$

d) $S(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

a) $P(x) = x(3x - 4) + 3x - 4 = x(3x - 4) + (3x - 4) \cdot 1 = (3x - 4)(x + 1) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 1)$

b) $Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

c) $R(x) = (x - 2)(x + 3) + x^2 + 6x + 9 = (x - 2)(x + 3) + (x + 3)^2 = (x + 3)(x - 2 + x + 3) = 2(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $S(x) = x^3 + 7x^2 + 12x = x(x^2 + 7x + 12) = x(x + 4)(x + 3)$

45. Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $P(-2) = 0$ y $P(-3) = 0$.

El polinomio se factoriza como $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2)(x+3)$.

46. Actividad resuelta.

47. Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ **y** $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ **y** $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 16x + 24$

a) Factorizamos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

$$\begin{cases} P(x) = (x-3)(x-2)(x+1) \\ Q(x) = (x+1)(x-1)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mcm(P(x),Q(x)) = (x-3)(x-2)(x+1)(x-1) \\ mcd(P(x),Q(x)) = (x-2)(x+1) \end{cases}$$

b) Factorizamos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)(x-2)(x+4) \\ Q(x) = (x+2)(x^2+2x+12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mcm(P(x),Q(x)) = (x-1)(x-2)(x+4)(x+2)(x^2+2x+12) = P(x)\cdot Q(x) \\ mcd(P(x),Q(x)) = 1 \end{cases}$$

48. Averigua si $x = 3$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$. ¿Tiene más raíces reales? ¿Por qué?

$x = 3$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$ porque la división $P(x) : (x - 3)$ es exacta.

	1	–4	8	–15
3		3	–3	15
	1	–1	5	0

Factorizamos el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15 = (x - 3)(x^2 - x + 5)$

$x^2 - x + 5$ es un polinomio irreducible porque $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$ no existe.

Por tanto la única raíz real del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15 = (x - 3)(x^2 - x + 5)$ es $x = 3$.

49. Sin multiplicar los binomios, halla el valor de k para que $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + k)(x - 2)$ sea la descomposición factorial de $P(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$.

Como $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + k)(x - 2)$ y $P(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$, el producto de los términos sin x de $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + k)(x - 2)$ tiene que ser – 4.

$(-1)^2 \cdot 1^2 \cdot k \cdot (-2) = -4 \Rightarrow k = 2$

50. Factoriza el polinomio $P(x) = 4x^4 - 1$. Para ello, suma y resta $4x^2$ y luego aplica las identidades notables.

$P(x) = 4x^4 - 1 = 4x^4 - 1 + 4x^2 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)$

51. Actividad interactiva.

52. ¿Son equivalentes estos pares de fracciones algebraicas?

a) $A(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$ **y** $B(x) = \frac{x+1}{x^2+x-20}$ **b)** $C(x) = \frac{x^2-1}{2x+3}$ **y** $D(x) = \frac{2x^2+5x+3}{x+1}$

a) $\frac{x+5}{x^2-3x-4} \neq \frac{x+1}{x^2+x-20} \Rightarrow (x^2 + x - 20)(x + 5) = x^3 + 6x^2 - 15x - 100 \neq x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = (x^2 - 3x - 4)(x + 1)$

b) $\frac{x^2-1}{2x+3} \neq \frac{2x^2+5x+3}{x+1} \Rightarrow (x^2 - 1)\cdot(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 \neq 4x^3 + 16x^2 + 21x + 9 = (2x^2 + 5x + 3)\cdot(2x + 3)$

53. Factoriza el numerador y el denominador para simplificar la fracción algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si $L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4$ y $R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$.

$L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4 = (x-1)(3x^2 - 13x + 4) = 3(x-1)(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

	3	–16	17	–4
1		3	–13	4
	3	–13	4	0

$3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{13 \pm 11}{6}\begin{cases} 4 \\ \frac{1}{3}\end{cases}$

$R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12 = (x-1)(2x^2 - 11x + 12) = 2(x-1)(x-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

	2	–13	23	–12
1		2	–11	12
	2	–11	12	0

$2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4}\begin{cases} 4 \\ \frac{3}{2}\end{cases}$

$$\frac{L(x)}{R(x)} = \frac{3x^3 - 16x^2 + 17x - 4}{2x^3 - 13x^2 + 23x - 12} = \frac{3\cancel{(x-1)}\cancel{(x-4)}\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2\cancel{(x-1)}\cancel{(x-4)}\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3x-1}{2x-3}$$

54. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y escríbelas como fracciones irreducibles.

a) $A(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

b) $B(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$

c) $C(x) = \frac{x^5 - x^3}{2x^3 + 4x^2 - 6x}$

d) $D(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{4x^3 + 16x^2}$

a) $A(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \frac{x+3}{x-3}$

b) $B(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{x+1}{x-1}$

c) $C(x) = \frac{x^5 - x^3}{2x^3 + 4x^2 - 6x} = \frac{x^{\cancel{3}}\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{x}(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{x^2(x+1)}{2(x+3)}$

d) $D(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{4x^3 + 16x^2} = \frac{\cancel{x^2}(x-2)^2}{4\cancel{x^2}(x+4)} = \frac{x^2 - 4x + 4}{4x + 16}$

55. Realiza las operaciones y expresa el resultado en forma de fracción algebraica irreducible.

a) $\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$

b) $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\frac{1}{x-3} + \frac{x}{x-2} - \frac{x^2 - 6}{x^2 - 5x + 6}$

d) $\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3}$

a) $\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{3 + x(x-1) - (x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x^2 - 1}$

b) $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{x - 2 + (x-1)x}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

c) $\frac{1}{x-3} + \frac{x}{x-2} - \frac{x^2 - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 2 + x(x-3) - x^2 + 6}{(x-2)(x-3)} = \frac{-2x + 4}{(x-2)(x-3)} = \frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{-2}{(x-3)}$

d) $\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} + \frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{1 + x(x+3) - (x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{7x - 2}{x^2 - 9}$

56. Realiza estas operaciones y expresa el resultado como una fracción algebraica irreducible.

a) $\frac{x^2+6x}{x^2+3x}\cdot\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}:\frac{x-2}{2x}$

a) $\frac{x^2+6x}{x^2+3x}\cdot\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{\cancel{x}(x+6)}{\cancel{x}(x+3)}\cdot\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\frac{x^2+5x-6}{x+3}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}:\frac{x-2}{2x}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}}:\frac{x-2}{2x}=2$

57. Dadas las fracciones $A(x)=\frac{3x-6}{x^2-5x+6}$ y $B(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}$ calcula:

a) $A(x)\cdot B(x)$ c) $A(x):B(x)$

b) $[A(x)-B(x)]:[A(x)+B(x)]$ d) $[A(x)]^2$

$A(x)=\frac{3x-6}{x^2-5x+6}=\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{3}{x-3}$ $B(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\frac{x}{x+3}$

a) $A(x)\cdot B(x)=\frac{3}{x-3}\cdot\frac{x}{x+3}=\frac{3x}{(x-3)(x+3)}=\frac{3x}{x^2-9}$

b) $[A(x)-B(x)]:[A(x)+B(x)]=\left(\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right):\left(\frac{3}{x-3}+\frac{x}{x+3}\right)==\frac{-x^2+6x+9}{x^2-9}:\frac{x^2+9}{x^2-9}=\frac{-x^2+6x+9}{x^2+9}$

c) $A(x):B(x)=\frac{3}{x-3}:\frac{x}{x+3}=\frac{3(x+3)}{x(x-3)}=\frac{3x+9}{x^2-3x}$

d) $[A(x)]^2=\left(\frac{3}{x-3}\right)^2=\frac{3^2}{(x-3)^2}=\frac{9}{x^2-6x+9}$

58. Actividad resuelta.

59. Descompón en suma de fracciones simples las siguientes fracciones algebraicas.

a) $F(x)=\frac{5x+1}{x^2-5x+6}$ c) $H(x)=\frac{9x+23}{x^2+4x+3}$

b) $G(x)=\frac{-2x+13}{x^2+x-2}$ d) $I(x)=\frac{4x^2-2x}{2x^2+7x-4}$

a) $F(x)=\frac{5x+1}{x^2-5x+6}=\frac{5x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}$

$\left.\begin{array}{l}x=3\Rightarrow B=16\\ x=2\Rightarrow A=-11\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)=\frac{5x+1}{x^2-5x+6}=\frac{5x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{-11}{x-2}+\frac{16}{x-3}$

b) $G(x)=\frac{-2x+13}{x^2+x-2}=\frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}$

$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow 11=3A\Rightarrow A=\frac{11}{3}\\ x=-2\Rightarrow 17=-3B\Rightarrow B=\frac{-17}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow G(x)=\frac{-2x+13}{x^2+x-2}=\frac{11}{3(x-1)}-\frac{17}{3(x+2)}$

c) $H(x)=\frac{9x+23}{x^2+4x+3}=\frac{9x+23}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{x^2+4x+3}$

$\left.\begin{array}{l}x=-3\Rightarrow -4=-2B\Rightarrow B=2\\ x=-1\Rightarrow 14=2A\Rightarrow A=7\end{array}\right\}\Rightarrow H(x)=\frac{9x+23}{x^2+4x+3}=\frac{9x+23}{(x+1)(x+3)}=\frac{7}{x+1}+\frac{2}{x+3}$

d) $I(x)=\frac{4x^2-2x}{2x^2+7x-4}=\frac{2x\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}(x+4)}=\frac{2x}{x+4}=2-\frac{8}{x+4}$

60. Descompón en suma de fracciones simples las siguientes fracciones algebraicas.

a) $F(x)=\dfrac{-7x-23}{6x^2+11x+4}$ c) $H(x)=\dfrac{x^2-3x-25}{x^2-x-6}$ e) $J(x)=\dfrac{3x^2-44x+17}{x^3-7x^2-x+7}$

b) $G(x)=\dfrac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}$ d) $I(x)=\dfrac{6x^2+12x+16}{x^3+7x^2-x-7}$ f) $K(x)=\dfrac{2x^3-9x^2+8x+7}{x^3-5x^2-x+5}$

a) $$F(x)=\frac{-7x-23}{6x^2+11x+4}=\frac{-7x-23}{(3x+4)(2x+1)}=\frac{A}{3x+4}+\frac{B}{2x+1}=\frac{A(2x+1)+B(3x+4)}{6x^2+11x+4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{-1}{2}\Rightarrow\frac{-39}{2}=\frac{5}{2}B\Rightarrow B=\frac{-39}{5}\\ x=\frac{-4}{3}\Rightarrow\frac{-41}{3}=\frac{-5}{3}A\Rightarrow A=\frac{41}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)=\frac{-7x-23}{6x^2+11x+4}=\frac{-7x-23}{(3x+4)(2x+1)}=\frac{41}{5(3x+4)}+\frac{-39}{5(2x+1)}$$

b) $$G(x)=\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x+1)(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)(x+1)}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow-9=3A\Rightarrow A=-3\\ x=1\Rightarrow 6=6C\Rightarrow C=1\\ x=-1\Rightarrow-4=-2B\Rightarrow B=2\end{array}\right\}\Rightarrow G(x)=\frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{5x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{-3}{x+2}+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

c) $$H(x)=\frac{x^2-3x-25}{x^2-x-6}=1-\frac{2x+19}{x^2-x-6}=1-\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}\right)=1-\frac{A(x-3)+B(x+2)}{x^2-x-6}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\Rightarrow 25=5B\Rightarrow B=5\\ x=-2\Rightarrow 15=-5A\Rightarrow A=-3\end{array}\right\}\Rightarrow H(x)=\frac{x^2-3x-25}{x^2-x-6}=1-\frac{2x+19}{x^2-x-6}=1-\left(\frac{-3}{x+2}+\frac{5}{x-3}\right)=1+\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-3}$$

d) $$I(x)=\frac{6x^2+12x+16}{x^3+7x^2-x-7}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x+1)(x-1)+B(x+7)(x-1)+C(x+7)(x+1)}{x^3+7x^2-x-7}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow 10=-12B\Rightarrow B=\frac{-5}{6}\\ x=1\Rightarrow 34=16C\Rightarrow C=\frac{17}{8}\\ x=-7\Rightarrow 226=48A\Rightarrow A=\frac{113}{24}\end{array}\right\}\Rightarrow I(x)=\frac{6x^2+12x+16}{x^3+7x^2-x-7}=\frac{113}{24(x+7)}-\frac{5}{6(x+1)}+\frac{17}{8(x-1)}$$

e) $$J(x)=\frac{3x^2-44x+17}{x^3-7x^2-x+7}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-7}=\frac{A(x+1)(x-7)+B(x-1)(x-7)+C(x-1)(x+1)}{x^3-7x^2-x+7}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow 64=16B\Rightarrow B=4\\ x=1\Rightarrow-24=-12A\Rightarrow A=2\\ x=7\Rightarrow-144=48C\Rightarrow C=-3\end{array}\right\}\Rightarrow J(x)=\frac{3x^2-44x+17}{x^3-7x^2-x+7}=\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-7}$$

f) $$K(x)=2+\frac{x^2+10x-3}{x^3-5x^2-x+5}=2+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-5}=2+\frac{A(x+1)(x-5)+B(x-1)(x-5)+C(x-1)(x+1)}{x^3-5x^2-x+5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow-12=12B\Rightarrow B=-1\\ x=1\Rightarrow 8=-8A\Rightarrow A=-1\\ x=5\Rightarrow 72=24C\Rightarrow C=3\end{array}\right\}\Rightarrow I(x)=K(x)=\frac{2x^3-9x^2+8x+7}{x^3-5x^2-x+5}=2+\frac{x^2+10x-3}{x^3-5x^2-x+5}=2-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-5}$$

61. Expresa las siguientes cantidades en lenguaje algebraico.

a) El área de un rectángulo de base *b* y altura *h*.

b) El área de un cuadrado de lado *l*.

c) El espacio recorrido en un tiempo *t* por un móvil que lleva una velocidad constante *v*.

d) El volumen de un cubo de arista *x*.

e) El volumen de un cilindro de radio *r* y altura *h*.

f) El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales *x* y lado desigual *y*.

a) $A=b\cdot h$ c) $e=vt$ e) $V=\pi r^2h$

b) $A=l^2$ d) $V=x^3$ f) $P=2x+y$

62. En estas columnas están desordenados cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de *x*.

Polinomios
$x^4 - 2x^2 + x - 1$
$x^2 - 3(x + 1)$
$\frac{x^3}{2} + 1$
$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1$

x
$x = 2$
$x = 0$
$x = 1$
$x = -2$

Valor numérico
–1
–3
–5
1

Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de *x* correspondiente.

$x^4 - 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Valor numérico –1

$\frac{x^3}{2} + 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$ Valor numérico –3

$x^2 - 3(x + 1) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ Valor numérico –5

$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Valor numérico 1

63. Dados los monomios $A(x) = 6x^2$, $B(x) = 3x^4$, $C(x) = \frac{1}{2}x^4$ y $D(x) = -2x$, realiza estas operaciones.

a) $A(x) + D(x)$ **c)** $A(x) - B(x) + C(x)$ **e)** $B(x) : C(x)$ **g)** $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$

b) $B(x) - C(x)$ **d)** $A(x) \cdot D(x)$ **f)** $D(x) \cdot B(x)$ **h)** $A(x) : [D(x) \cdot B(x)]$

a) $A(x) + D(x) = 6x^2 - 2x$

b) $B(x) - C(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $A(x) - B(x) + C(x) = \frac{-5}{2}x^4 + 6x^2$

d) $A(x) \cdot D(x) = 6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $B(x) : C(x) = 3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $D(x) \cdot B(x) = -2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 6x^2 \cdot 3x^4 \cdot \frac{1}{2}x^4 = 9x^{10}$

h) $A(x) : [D(x) \cdot B(x)] = 6x^2 : (-2x \cdot 3x^4) = -x^{-3}$

64. Realiza las operaciones indicadas con los siguientes polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $Q(x) - R(x)$ **c)** $R(x) - Q(x) + P(x)$ **d)** $P(x) + Q(x) + R(x)$

Indica el grado de los polinomios resultantes.

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = (2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1) + (3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2) + (-4x^4 + x^2 - 4) =$

$= -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

Todos los polinomios resultantes son de grado 4.

65. Realiza estas operaciones con los polinomios $P(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^3+1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$ **b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$** **c) $P(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$**

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4+2x^3+1\right) \cdot (3x^3 - 4x - 2 + 4x^2 - 5x + 3) = \left(\frac{1}{2}x^4+2x^3+1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) =$

$=\frac{3}{2}x^7 + 2x^6 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^6 + 8x^5 - 18x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 4x^2 - 9x + 1 = \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 -$
$9x + 1$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = (3x^3 - 4x - 2) \cdot (4x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 1) = -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 2x^5 + 8x^4$

$- 16x^3 + 20x^2 - 8x + x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2x - 4$

c) $P(x) \cdot [P(x) + Q(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4+2x^3+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^4+2x^3+1+3x^3-4x-2\right) = \left(\frac{1}{2}x^4+2x^3+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^4+5x^3-4x-1\right)=$

$=\frac{1}{4}x^8+\frac{5}{2}x^7-2x^5-\frac{1}{2}x^4+x^7+10x^6-8x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^4+5x^3-4x-1=\frac{1}{4}x^8+\frac{7}{2}x^7+10x^6-2x^5-8x^4+3x^3-4x-1$

66. Calcula estas potencias.

a) $(x + y - 2z)^2$ **b) $(3a - 2b + c)^2$**

a) $(x + y - 2z)^2 = x^2 + xy - 2zx + xy + y^2 - 2yz - 2xz - 2yz + 4z^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$

b) $(3a - 2b + c)^2 = 9a^2 - 6ab + 3ac - 6ab + 4b^2 - 2bc + 3ac - 2bc + c^2 = = 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

67. Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 = x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1 - x^6 +$
$+ 2x^3 = 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

68. Completa en tu cuaderno con el coeficiente adecuado.

a) $(2x^2 + \bullet x - 1) - (-3x^2 - 5x + \bullet) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(5x^3 + \bullet x^2 + \bullet) + (\bullet x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

a) $(2x^2 + (-3)x - 1) - (-3x^2 - 5x + (-5)) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(5x^3 + (-4)x^2 + (-1)) + ((-3)x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

69. Calcula los valores de *a* y *b* necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 = x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3$
$+ (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

- $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
- $b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 = x^6 + (a - 1)x^5 -$
$(a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

- $a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$
- $b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$

70. Efectúa estas operaciones.

a) $(2x^2 - 3y)^2$

b) $(3x - 2y)^3$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2$

d) $(2x^4 + x^2)^2$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$

b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$

d) $(2x^4 + x^2)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

71. Completa las siguientes igualdades.

a) $9 + \bullet\bullet\bullet - 30x = (3 - \bullet\bullet\bullet)^2$

b) $b^2 + a^4 + \bullet\bullet\bullet = (b + \bullet\bullet\bullet)^2$

c) $x^2 + 4 - \bullet\bullet\bullet = (\bullet\bullet\bullet - \bullet\bullet\bullet)^2$

a) $9 + 25x^2 - 30x = (3 - 5x)^2$

b) $b^2 + a^4 + 2ba^2 = (b + a^2)^2$

c) $x^2 + 4 - 4x = (x - 2)^2$

72. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

a) $C(x) = 6x - 8 \qquad R(x) = -4x + 15$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & -2x^2 & & -1 & x^2+x+2 \\
\cancel{-6x^3} & -6x^2 & -12x & & 6x-8 \\ \hline
 & \cancel{-8x^2} & -12x & -1 & \\
 & \cancel{8x^2} & +8x & +16 & \\ \hline
 & & -4x & +15 &
\end{array}
$$

c) $C(x) = \dfrac{-1}{2}x^3 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2} \qquad R(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + x$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\cancel{x^6} & & -2x^3 & & +3x & -3 & -2x^3+x-2 \\
\cancel{-x^6} & +\frac{1}{2}x^4 & -x^3 & & & & -\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \\ \hline
 & \cancel{\frac{1}{2}x^4} & -3x^3 & & +3x & -3 & \\
 & \cancel{-\frac{1}{2}x^4} & & +\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}x & & \\ \hline
 & & \cancel{-3x^3} & +\frac{1}{4}x^2 & +\frac{5}{2}x & -3 & \\
 & & \cancel{3x^3} & & -\frac{3}{2}x & +3 & \\ \hline
 & & & \frac{1}{4}x^2 & +x & &
\end{array}
$$

b) $C(x) = -x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{9} \qquad R(x) = \dfrac{-8}{9}x + \dfrac{25}{9}$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{-3x^4} & & +x^2 & -2x & +3 & 3x^2-2x+1 \\
\cancel{3x^4} & -2x^3 & +x^2 & & & -x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9} \\ \hline
 & \cancel{-2x^3} & +2x^2 & -2x & +3 & \\
 & \cancel{2x^3} & -\frac{4}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x & & \\ \hline
 & & \cancel{\frac{2}{3}x^2} & -\frac{4}{3}x & +3 & \\
 & & \cancel{-\frac{2}{3}x^2} & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & \\ \hline
 & & & -\frac{8}{9}x & +\frac{25}{9} &
\end{array}
$$

73. Expresa las siguientes divisiones en la forma $\dfrac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{d(x)}$.

a) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3}$

b) $\dfrac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

c) $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

d) $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2 + 3}$

a) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3} = x - 1 + \dfrac{-3x + 1}{x^2 - x + 3}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} - 2x^2 + x - 2 & x^2 - x + 3 \\ \cancel{-x^3} + x^2 - 3x & x - 1 \\ \hline \cancel{-x^2} - 2x - 2 & \\ \cancel{x^2} - x + 3 & \\ \hline -3x + 1 & \end{array}$$

c) $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1} = 2 + \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x^3 + 2x - 1}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3} + x^2 - x + 3 & x^3 + 2x - 1 \\ \cancel{-2x^3} - 4x + 2 & 2 \\ \hline x^2 - 5x + 5 & \end{array}$$

b) $\dfrac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = 3 + \dfrac{-9x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^2} - 3x + 1 & x^2 + 2x - 1 \\ \cancel{-3x^2} - 6x + 3 & 3 \\ \hline -9x + 4 & \end{array}$$

d) $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2 + 3} = 4 + \dfrac{-13}{x^2 + 3}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4x^2} - 1 & x^2 + 3 \\ \cancel{-4x^2} - 12 & 4 \\ \hline -13 & \end{array}$$

74. Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6.

a) ¿De qué grado es el polinomio suma?

b) ¿De qué grado es el polinomio producto?

c) ¿De qué grado es el cubo del segundo?

a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.

b) El producto tendrá grado 7 + 6 = 13.

c) El cubo del segundo tendrá grado 3 · 6 = 18.

75. ¿Puede la suma de dos polinomios de grado 3 ser de grado 2?

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado 2 no lo son.

76. El divisor es $x^2 - 1$, el cociente es $x^3 + 2$ y el resto es $3x$. ¿Cuál es el dividendo?

$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2) + 3x = x^5 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

77. Desarrolla estas expresiones.

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$

c) $(5x^3z + 7y^2t)\,(5x^3z - 7y^2t)$

d) $\left[(4x + y)^2 - x\right] \cdot \left[(4x + y)^2 + x\right]$

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2 = 16x^4y^6 + 25y^4t^2 - 40x^2y^5t$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2 = 9 + 36b^6c^8 - 36b^3c^4$

c) $(5x^3z + 7y^2t)\,(5x^3z - 7y^2t) = 25x^6z^2 - 49y^4t^2$

d) $\left[(4x + y)^2 - x\right] \cdot \left[(4x + y)^2 + x\right] = (4x + y)^4 - x^2 = \left(16x^2 + y^2 + 8xy\right)^2 - x^2 = 256x^4 + y^4 + 64x^2y^2 + 32x^2y^2 + 256x^3y + 16xy^3 - x^2$

78. Comprueba estas dos nuevas identidades.

a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ **b)** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

a) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

79. Encuentra una fórmula para calcular el cubo de una suma y de una diferencia, $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a + b) = a^3 + a^2b + b^2a + b^3 + 2a^2b + 2ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 + b^2 - 2ab)(a - b) = a^3 - a^2b + b^2a - b^3 - 2a^2b + 2ab^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

80. Divide usando la regla de Ruffini:

a) $(2x^2 - 3)^2 : (x - 1)$

b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

c) $(5x^6 - 1) : (x - 1)$

a) $C(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x - 8 \quad R = 1$

	4	0	–12	0	9
1		4	4	–8	–8
	4	4	–8	–8	1

c) $C(x) = 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 5 \quad R = 4$

	5	0	0	0	0	0	–1
1		5	5	5	5	5	5
	5	5	5	5	5	5	4

b) $C(x) = x^4 + x^2 + 1 \quad R = 0$

	1	1	1	1	1	1
–1		–1	0	–1	0	–1
	1	0	1	0	1	0

81. Calcula el resto de las siguientes divisiones sin realizarlas.

a) $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$ **b)** $(x^{101} - 2) : (x + 1)$ **c)** $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$

¿Qué teorema has utilizado?

a) $R = 1^7 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$ **b)** $R = (-1)^{101} - 2 = -3$ **c)** $R = 3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3 = 192$

En todos los casos se ha utilizado el Teorema del Resto.

82. Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

Por el teorema del resto, $R = M(6) = 3$.

83. Calcula el resto de las divisiones.

a) $(x^{157} - 49x^{38} + 17) : (x + 1)$

b) $(x^{30} + x^{29} + x^{28} + \ldots + x^2 + x + 1) : (x - 1)$

c) $(x^{2011} - 2012x^{2013} + 2014) : (x - 1)$

Aplicando el teorema del resto.

a) $R = (-1)^{157} - 49 \cdot (-1)^{38} + 17 = -33$

b) $R = 1^{30} + 1^{29} + 1^{28} + \ldots + 1^2 + 1 + 1 = 31$

c) $R = 1^{2011} - 2012 \cdot 1^{2013} + 2014 = 1 - 2012 + 2014 = 3$

84. Actividad resuelta.

85. Halla el valor de *k* en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ **es divisible entre** $(x + 1)$.

b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ **tiene de resto –4.**

Aplicando el teorema del resto:

a) $R = (-1)^3 + (k + 2)\cdot(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$

b) $R = 1^4 + k\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 1 = -4 \Rightarrow 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$

86. Actividad resuelta.

87. Halla los valores de *a* y *b* para que el resto de la división de $(ax^2 + bx - 3)$ **entre** $(x - 2)$ **sea 5 y entre** $(x + 1)$ **sea 2.**

Aplicando el teorema del resto:

$$\begin{cases} 4a + 2b - 3 = 5 \\ a - b - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 5 = b \end{cases} \Rightarrow 2a + a - 5 = 4 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -2$$

88. Halla un polinomio de segundo grado, $R(x)$, que cumpla $R(1) = 5$, $R(-1) = 9$ y $R(0) = 4$.

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} R(1) = a + b + c = 5 \\ R(-1) = a - b + c = 9 \\ R(0) = c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a - 5 = b \end{cases} \Rightarrow 1 - a = a - 5 \Rightarrow 6 = 2a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -2$$

El polinomio es $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

89. Comprueba que al dividir un polinomio de segundo grado, $A(x) = ax^2 + bx + c$, entre $B(x) = x - 1$, el resto es justamente la suma de los coeficientes del polinomio $A(x)$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{ax^2} + bx \quad + c & x - 1 \\ \hline -\cancel{ax^2} + ax & ax + b + a \\ \hline \quad (b + a)x \quad + c & \\ -(b + a)x + b + a & \\ \hline \qquad a + b + c & \end{array}$$

90. El resto de dividir un polinomio entre $x - 5$ es 2, y el resto de dividirlo entre $x - 2$ es 5. ¿Cuál será el resto de dividirlo entre $x^2 - 7x + 10$?

$(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$

Como el resto al dividir entre $x - 5$ es 2, entonces: $P(x) = (x - 5)\cdot A(x) + 2$

Como el resto al dividir entre $x - 2$ es 5, entonces: $P(x) = (x - 2)\cdot B(x) + 5$

Multiplicando la primera igualdad por $x - 2$ y la segunda por $x - 5$, obtenemos:

$(x - 2)\,P(x) = (x - 2)(x - 5)A(x) + 2(x - 2)$

$(x - 5)\,P(x) = (x - 5)(x - 2)B(x) + 5(x - 5)$

Restando miembro a miembro estas dos igualdades y operando:

$3P(x) = (x - 2)(x - 5)[A(x) - B(x)] + (-3x + 21)$

$3P(x) = (x^2 - 7x + 10)[A(x) - B(x)] + (-3x + 21)$

Dividiendo la igualdad entre 3, concluimos:

$P(x) = (x^2 - 7x + 10)C(x) + (-x + 7)$

El resto es $R(x) = -x + 7$.

91. Indica razonadamente cuáles son las raíces de los polinomios que se indican a continuación.

a) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ **b)** $P(x) = (3x - 7)(x + 1)(x^2 - 5)$ **c)** $P(x) = (x + 1)(x^2 + 9)(4x^3 - 3)$

a) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ **b)** $x = \frac{7}{3}$, $x = -1$, $x = \pm\sqrt{5}$ **c)** $x = -1$, $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

92. Actividad resuelta.

93. Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$

b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

c) $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$

a) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3, y ±6. El polinomio, por ser de grado 3, tendrá a lo sumo 3 raíces enteras.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -2 & -6 \\ 1 & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 2 & 8 & 6 & 0 \end{array}$$

Los factores son $P(x) = (x - 1)(2x^2 + 8x + 6)$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Raíces enteras de $P(x)$: 1, –1 y –3

b) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12. El polinomio, por ser de grado 4, tendrá a lo sumo 4 raíces enteras.

$Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$

$Q(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ -1 & & -1 & 3 & 4 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 12 & 0 \\ 2 & & 2 & -2 & -12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Los factores son $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x - 6)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Raíces enteras de $Q(x)$: –1, 2, –2 y 3

c) Posibles raíces enteras: ±1, ±3 y ±9. El polinomio, por ser de grado 4, tendrá a lo sumo 4 raíces enteras.

$R(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$

$R(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -9 & -9 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & & -3 & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Los factores son $P(x) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + x + 1)$

Como $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, las raíces enteras de $R(x)$: 3 y –3

94. Halla las raíces de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $B(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

c) $C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x + 15$

d) $D(x) = x^3 - 4x^2 - 13x + 40$

a) $A(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$ Raíces: 1 y $\frac{1}{3}$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) $B(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x+1)(x^2 - 6x + 9) = (x+1)(x-3)^2 \Rightarrow$ Raíces: –1 y 3 (doble)

	1	–5	3	9
–1		–1	6	–9
	1	–6	9	0

c) $C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x + 15 = (x+1)(2x^2 - 11x + 15) = 2(x+1)(x-3)\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ Raíces: –1, 3 y $\frac{5}{2}$

	2	–9	4	15
–1		–2	11	–15
	2	–11	15	0

$$2x^2 - 11x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

d) $D(x) = x^3 - 4x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x^2 + x - 8) \Rightarrow$ Raíces: 5, $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$

	1	–4	–13	40
5		5	5	–40
	1	1	–8	0

$$x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{4} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

95. Calcula las raíces de estos polinomios.

a) $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ **b)** $B(x) = 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x$ **c)** $C(x) = x^6 - 1$

a) $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x+3)(x-3) \Rightarrow$ Raíces: –1, 1, –3 y 3.

	1	0	–10	0	9
1		1	1	–9	–9
	1	1	–9	–9	0
–1		–1	0	9	
	1	0	–9	0	

b) $B(x) = 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = x(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) = x(x-1)(x-3)(2x+1) \Rightarrow$ Raíces: 0, 1, 3 y $\frac{-1}{2}$

	2	–7	2	3
1		2	–5	–3
	2	–5	–3	0
3		6	3	
	2	1	0	

c) $C(x) = x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) \Rightarrow$ Raíces: 1 y –1

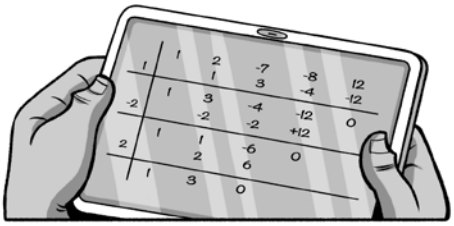
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

	1	0	0	1
–1		–1	1	–1
	1	–1	1	0

96. Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



$P(x) = (x – 1)(x + 2)(x – 2)(x + 3) = x^4 + 2x^3 – 7x^2 – 8x + 12$

97. Expresa los siguientes polinomios como producto de factores irreducibles.

a) $R(x) = x^5 – x^4 – x^3 – 2x^2$

b) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 – 3x – 2$

c) $T(x) = x^4 – 2x^3 – 8x^2 + 21x$

d) $U(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$

a) $R(x) = x^5 – x^4 – x^3 – 2x^2 = x^2(x^3 – x^2 – x – 2) = x^2(x – 2)(x^2 + x + 1)$

	1	–1	–1	–2
2		2	2	2
	1	1	1	0

b) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 – 3x – 2 = (x + 1)(6x^2 – x – 2) = 6\cdot(x + 1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

	6	5	–3	–2
–1		–6	1	2
	6	–1	–2	0

$$6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-2)\cdot 6}}{12} = \frac{1\pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

c) $T(x) = x^4 – 2x^3 – 8x^2 + 21x = x(x + 3)(x^2 – 5x + 7) \Rightarrow$ Raíces: 0 y –3

	1	–2	–8	21
–3		–3	15	–21
	1	–5	7	0

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-28}}{12}$$ Sin solución

d) $U(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x = x\,(2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) = x(x + 1)(2x^2 + 5x + 3) = 2x(x + 1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

	2	7	8	3
–1		–2	–5	–3
	2	5	3	0

$$2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 3}}{12} = \frac{-5\pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} \end{cases}$$

98. Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = –2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.

$P(x) = 3(x – 1)^2(x + 2)(x – 4) = 3(x^2 – 2x + 1)(x^2 – 2x – 8) = 3(x^4 – 2x^3 – 8x^2 – 2x^3 + 4x^2 + 16x + x^2 – 2x – 8) =$

$= 3(x^4 – 4x^3 – 3x^2 + 14x – 8) = 3x^4 – 12x^3 – 9x^2 + 42x – 24$

99. La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, –3. ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?

El polinomio será de la forma $(x – a)(x – b) = x^2 – ax – bx + ab = x^2 – (a + b)x + ab$.

Como $a + b = 2$, y $a \cdot b = –3$, el polinomio buscado es $x^2 – 2x – 3$.

100. Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.

- **Su coeficiente principal es 8.**
- **Es divisible por $2x^2 + 1$.**
- **El resto de su división entre $x + 2$ es 56.**

$P(x) = 4(2x^2 + 1)(x - a)$ porque es de tercer grado, es divisible por $2x^2 + 1$ y su coeficiente director es 8.

Como el resto de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es 56, entonces $P(-2) = 56$.

$P(-2) = 4(8 + 1)(-2 - a) = 56 \Rightarrow -2 - a = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} \Rightarrow -a = \frac{14}{9} + 2 \Rightarrow -a = \frac{32}{9} \Rightarrow a = -\frac{32}{9}$

El polinomio buscado es $P(x) = 4(2x^2 + 1)\left(x + \frac{32}{9}\right)$.

101. Demuestra que un polinomio es divisible entre $x - 1$ si la suma de sus coeficientes es cero.

Consideramos el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Como el polinomio es divisible entre $x - 1$, entonces $P(1) = 0$.

$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

102. En el polinomio de coeficientes enteros $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ comprueba que si g es una raíz entera, entonces $g + 1$ es un divisor de $P(-1)$ y $g - 1$ es un divisor de $P(1)$.

Si g es raíz de $P(x)$, entonces $a \cdot g^5 + b \cdot g^4 + c \cdot g^3 + d \cdot g^2 + e \cdot g + f = 0 \Rightarrow f = -a \cdot g^5 - b \cdot g^4 - c \cdot g^3 - d \cdot g^2 - e \cdot g$

$P(-1) = -a + b - c + d - e + f = -a + b - c + d - e - a \cdot g^5 - b \cdot g^4 - c \cdot g^3 - d \cdot g^2 - e \cdot g = -a \cdot (1 + g^5) + b(1 - g^4) - c \cdot (1 + g^3) + d \cdot (1 - g^2) - e \cdot (1 + g) = -a \cdot (1 + g)(1 - g + g^2 - g^3 + g^4) + b(1 + g)(1 - g + g^2 - g^3) - c \cdot (1 + g)(1 - g + g^2) + d \cdot (1 + g)(1 - g) - e \cdot (1 + g) = (1 + g) \cdot [-a(1 - g + g^2 - g^3 + g^4) + b(1 - g + g^2 - g^3) - c(1 - g + g^2) + d(1 - g) - e]$.

Como $P(-1) = (1 + g) \cdot k$, $k \in \mathbb{R}$, entonces $1 + g$ es divisor de $P(-1)$.

$P(1) = a + b + c + d + e + f = a + b + c + d + e - a \cdot g^5 - b \cdot g^4 - c \cdot g^3 - d \cdot g^2 - e \cdot g = -a \cdot (g^5 - 1) - b(g^4 - 1) - c \cdot (g^3 - 1) - d \cdot (g^2 - 1) - e \cdot (g - 1) = -a \cdot (g - 1)(1 + g + g^2 + g^3 + g^4) - b(g - 1)(1 + g + g^2 + g^3) - c \cdot (g - 1)(1 + g + g^2) + d \cdot (g - 1)(g + 1) - e \cdot (g - 1) = (g - 1)[-a(1 + g + g^2 + g^3 + g^4) - b(1 + g + g^2 + g^3) - c(1 + g + g^2) + d(g + 1) - e]$.

Como $P(1) = (g - 1) \cdot k$, $k \in \mathbb{R}$, entonces $(g - 1)$ es divisor de $P(1)$.

103. Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $A(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x^3 + 7x^2 + 10x}$ c) $C(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^3 - x^2 + x - 1}$ e) $E(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

b) $B(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^5 + 4x^4 + 4x^3}$ d) $D(x) = \dfrac{5x^2 - 20x + 15}{10x^2 - 10x - 60}$ f) $F(x) = \dfrac{4x^2 - 2x}{2x^2 + 7x - 4}$

a) $A(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x^3 + 7x^2 + 10x} = \dfrac{x(x^2 + 4x - 5)}{x(x^2 + 7x + 10)} = \dfrac{\cancel{x}\,\cancel{(x+5)}\,(x-1)}{\cancel{x}\,\cancel{(x+5)}\,(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+2}$

b) $B(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^5 + 4x^4 + 4x^3} = \dfrac{x^2(x^2 - 4)}{x^3(x^2 + 4x + 4)} = \dfrac{\cancel{x^2}\,(x-2)\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{x^3}\,(x+2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x-2}{x(x+2)} = \dfrac{x-2}{x^2 + 2x}$

c) $C(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^3 - x^2 + x - 1} = \dfrac{(x-1)(x^2+4)}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

d) $D(x) = \dfrac{5x^2 - 20x + 15}{10x^2 - 10x - 60} = \dfrac{5(x^2 - 4x + 3)}{10(x^2 - x - 6)} = \dfrac{\cancel{5}\,\cancel{(x-3)}\,(x-1)}{2 \cdot \cancel{5}\,\cancel{(x-3)}\,(x+2)} = \dfrac{x-1}{2(x+2)} = \dfrac{x-1}{2x+4}$

e) $E(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{(x-1)\,\cancel{(x^2 - 2x + 1)}}{x\,\cancel{(x^2 - 2x + 1)}} = \dfrac{x-1}{x}$

f) $F(x) = \dfrac{4x^2 - 2x}{2x^2 + 7x - 4} = \dfrac{2x(2x-1)}{2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2x\,\cancel{(2x-1)}}{(x+4)\,\cancel{(2x-1)}} = \dfrac{2x}{x+4}$

104. Realiza estas sumas y restas y expresa el resultado como una fracción algebraica irreducible.

a) $\dfrac{3}{x^2-3x+2}+\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}$ b) $\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{7}{(x-1)^2}$ c) $\dfrac{5x}{x-1}-\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

a) $\dfrac{3}{x^2-3x+2}+\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{3+(2x-3)(x-1)-x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{3+2x^2-2x-3x+3-x^2+2x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-3x+2}$

b) $\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{7}{(x-1)^2}=\dfrac{-2x^2+12x-10+3x^2+3-6x-7x+35}{(x-5)(x-1)^2}=\dfrac{x^2-x+28}{(x-5)(x-1)^2}$

c) $\dfrac{5x}{x-1}-\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{5x(x+1)(x-5)-(x-1)(x+1)-2x(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+1)}=\dfrac{5x^3-23x^2-15x+1}{(x-5)(x-1)(x+1)}$

105. Realiza estas operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{x+2}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x-1}{2x^2+5x+2}$ b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}:\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-2}$ c) $\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{8x}$

a) $\dfrac{x+2}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x-1}{2x^2+5x+2}=\dfrac{x+2}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\dfrac{2x-1}{(x+2)(2x+1)}=\dfrac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}\,(2x+1)\,\cancel{(x+2)}\,(2x+1)}=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}:\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}:\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x-2)\,\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x+1)}\,(x-2)}{(x-1)\,\cancel{(x+1)}\,(x-1)(x+2)^{\cancel{2}}}=\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-3x+2}$

c) $\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{8x}=\dfrac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{8x}=\dfrac{8x}{8x}=1$

106. Actividad resuelta.

107. Descompón en fracciones simples estas fracciones.

a) $\dfrac{5x+2}{x^2+2x+1}$ b) $\dfrac{4x^2-5x+2}{x^3-x^2}$ c) $\dfrac{-x+3}{x^3-x}$

a) $\dfrac{5x+2}{x^2+2x+1}=\dfrac{5x+2}{(x+1)(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}=\dfrac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}=\dfrac{Ax+A+B}{x^2+2x+1}$

$\left.\begin{array}{l}A=5\\A+B=2\end{array}\right\}\Rightarrow B=-3\Rightarrow\dfrac{5x+2}{x^2+2x+1}=\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{4x^2-5x+2}{x^3-x^2}=\dfrac{4x^2-5x+2}{x^2(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2+x-2}=\dfrac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^2+x-2}$

$\left.\begin{array}{l}A+C=4\\-A+B=-5\\-B=2\end{array}\right\}\Rightarrow B=-2,\ A=3,\ C=1\Rightarrow\dfrac{4x^2-5x+2}{x^3-x^2}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x-1}$

c) $\dfrac{-x+3}{x^3-x}=\dfrac{-x+3}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x^3-x}$

$\left.\begin{array}{l}x=1\Rightarrow 2=2B\Rightarrow B=1\\x=-1\Rightarrow 4=2C\Rightarrow C=2\\x=0\Rightarrow 3=-A\Rightarrow A=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{-x+3}{x^3-x}=\dfrac{-3}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

108. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a) Si $x + 6$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.

b) Si $G(–5) = 0$, $x + 5$ es un factor de $G(x)$.

c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor real $x = a$ para el que $B(a) = 0$.

d) Un polinomio de grado 5 no puede tener 6 raíces.

e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz real.

f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz real $x = –1$.

a) Falso, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces –6 es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadero, por el teorema del factor.

c) Falso, ya que si existiese un valor tal que $B(a) = 0$, entonces $(x – a)$ dividiría a $B(x)$, y $B(x)$ no sería irreducible.

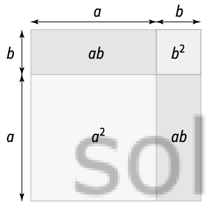
d) Verdadero, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

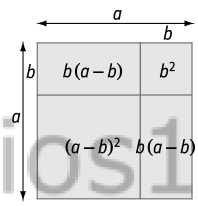
e) Verdadero, ya que $x = 0$ será una raíz.

f) Verdadero, ya que

Si n es par, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = –1$ no tiene raíces reales. Si n es impar, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = –1 \Rightarrow x = –1$.

109. La representación adjunta demuestra geométricamente la identidad notable obtenida para el cuadrado de una suma. Justifica por qué. Trata de encontrar otra representación gráfica para justificar el cuadrado de una diferencia.





$(a + b)^2 = ab + b^2 + a^2 + ab$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$a^2 = b(a – b) + b^2 + (a – b)^2 + b(a – b)$

$a^2 = ab – b^2 + b^2 + (a – b)^2 + ba – b^2 = 2ab + (a – b)^2 – b^2$

$(a - b)^2 = a^2 – ab – ba + b^2 = a^2 – 2ab + b^2$

110. Realiza la división $\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$.

	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{-3}{2}$		$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	1	–1	$\frac{5}{2}$

$C(x) = x + 1$ $\quad R(x) = \frac{5}{2}$

111. Calcula a, b y c sabiendo que $x^3 – 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.

$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$

Igualando los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$–6 = 3c \Rightarrow c = –2$; $a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (–2)^2 \Rightarrow a = 12$; $b = c^3 \Rightarrow b = (–2)^3 \Rightarrow b = –8$

112. Si el polinomio $P(x) = x^2 – kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen k y t?

Como $P(x)$ es un polinomio de segundo grado y tiene una raíz doble en $x = 2$, entonces $P(x) = (x – 2)^2 = x^2 – 4x + 4$. Igualando los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado, se obtienen $k = 4$, $t = 4$.

113. Realiza la división $(3x^3 - 4x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini.

No se puede usar la regla de Ruffini porque el divisor es de grado 2.

114. Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación:

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

a) Encuentra sus raíces.

b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos dichas raíces.

c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el de $Q(x)$ en todo el intervalo.

a) Ceros en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$

b) Intervalos $x \le -2$, $-2 < x \le 1$, $1 < x \le 3$, $x > 3$.

c) Aunque el punto elegido y el valor obtenido en cada intervalo no tienen por qué coincidir, el signo sí.

$x = -3 \Rightarrow Q(-3) = (-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow$ para $x \le -2$. $Q(x)$ es negativo.

$x = 0 \Rightarrow Q(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \Rightarrow$ para $-2 < x \le 1$. $Q(x)$ es positivo.

$x = 2 \Rightarrow Q(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ para $1 < x \le 3$. $Q(x)$ es negativo.

$x = 4 \Rightarrow Q(4) = (4 + 2)(4 - 1)(4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ para $x > 3$. $Q(x)$ es positivo.

115. Al caer en una casilla del Matempoly a Inés le ha tocado esta tarjeta:

a) Llama x al dinero que tenías al caer en esa casilla y encuentra una expresión algebraica que represente el dinero que tendrás después de cumplir con la tarjeta.

b) Si a Anita le tocó la misma tarjeta teniendo 200 €, ¿con cuánto dinero saldrá?

c) Al pobre Tomás también le tocó esa tarjeta y se quedó justo con 0 €. ¿Cuánto dinero tenía al llegar a esa casilla?

a) $x^2 - 240 \cdot (x - 60) = x^2 - 240x + 14\,400$

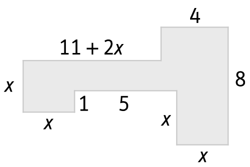
b) $200^2 - 240 \cdot 200 + 14\,400 = 6400$ €

c) $x^2 - 240x + 14\,400 = 0$

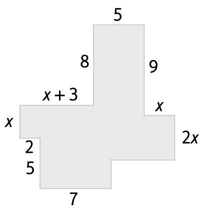
$$x = \frac{240 \pm \sqrt{57\,600 - 57\,600}}{2} = \frac{240 \pm 0}{2} = 120 \text{ €}$$

116. Encuentra los polinomios que nos dan el perímetro y el área de estas figuras.

a)



b)



a) $P(x) = 11 + 2x + 8 - (x - 1) + 4 + 8 + x + 5 + 1 + x + x = 4x + 38$

$A(x) = x^2 + (x - 1) \cdot (5 + x) + x^2 + 4 \cdot (8 - x - x + 1) = x^2 + x^2 + 4x - 5 + x^2 + 32 - 4x - 4x + 4 = 3x^2 - 4x - 1$

b) $P(x) = 2 + x + (x + 3) + 8 + 5 + 9 + x + 2x + (x + 3 + 5 + x - (2 + 7)) + (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + 7 + 5 = 6x + 42$

$A(x) = 5 \cdot (9 + 2x) + 2x \cdot x + 7 \cdot (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + (x + 3)(5 - (5 + x + 8 - (9 + 2x)) + 2 \cdot x = x^2 + 6x + 85$

117. Demuestra que si n es un entero positivo, entonces se puede construir un triángulo rectángulo de catetos $a = 2n + 1$ y $b = 2n^2 + 2n$ cuya hipotenusa es también un número entero.

$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = 4n^2 + 1 + 4n + 4n^4 + 4n^2 + 8n^3 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2$

La hipotenusa será $2n^2 + 2n + 1$, que es un número entero porque n lo es.

118. La expresión que da la posición, s, de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$ donde a es la aceleración, v_o, la velocidad inicial, s_o, la posición inicial, y t, el tiempo.

a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica en caso afirmativo los valores de a, v_o y s_o.

b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4{,}9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de a en este caso?

a) $M(t)$ puede identificar un movimiento uniformemente acelerado donde $a = 10$; $v_0 = 6$; $s_0 = 3$.

b) Identificamos los valores: $\frac{1}{2}a = 4{,}9 \Rightarrow a = 9{,}8$ (valor correspondiente a la gravedad), $v_0 = 0$ (parte de velocidad inicial nula) y $s_0 = 0$ (cuando comienza a caer no ha recorrido ningún espacio).

119. Halla la suma de todas las raíces del siguiente polinomio:

$$(2x + 3)(x - 4) + (2x + 3)(x - 6)$$

A. 3,5 **B. 4** **C. 5** **D. 7**

$(2x + 3)(x - 4) + (2x + 3)(x - 6) = (2x + 3)(x - 4 + x - 6) = (2x + 3)(2x - 10) = 0 \Rightarrow$ Raíces $\frac{-3}{2}$ y $5 \Rightarrow \frac{-3}{2} + 5 = 3{,}5$

La respuesta correcta es la A.

120. El polinomio $ax^3 - 60x^2 + bx - 125$ es el cubo de un binomio. El producto de a y b es:

A. 150 **B. 300** **C. 750** **D. 1200**

El binomio es $\left(\sqrt[3]{a}\,x - 5\right)^3 = ax^3 - 15\sqrt[3]{a^2}\,x^2 + 75\sqrt[3]{a}\,x - 125$, por lo que $-15\sqrt[3]{a^2} = -60$ y $75\sqrt[3]{a} = b$.

Luego $a = 8$ y $b = 150$. Por tanto, $a \cdot b = 1200$.

La respuesta correcta es la D.

121. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $(x^2 - 1)$, el resto que se obtiene es $4x + 4$. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - 1)$?

A. 0 **B. $-4x - 4$** **C. -4** **D. 8**

$P(x) = C(x)(x^2 - 1) + (4x + 4)$ porque al dividir $P(x)$ entre el binomio $(x^2 - 1)$, el resto que se obtiene es $4x + 4$.

El resto de la división de $P(x)$ entre $x - 1$ coincidirá, por el teorema del resto, con $P(1)$: $P(1) = C(1) \cdot 0 + (4 + 4) = 8$.

La respuesta correcta es la D.

122. ¿Cuántos de los siguientes polinomios tienen al menos una raíz real?

$P(x) = x^4 + x^2 + 16$ **$Q(x) = x^8 + x^4 + 16x$**

$R(x) = x^2 + 10x + 20$ **$S(x) = (2x^2 + 6x + 1)^2 - (2x^2 - x + 1)^2$**

A. 5 **B. 3** **C. 2** **D. 1**

$P(x)$ no tiene raíces reales porque $P(x) = x^4 + x^2 + 16 > 0$ para cualquier valor de x, $Q(x) = x(x^8 + x^4 + 16x)$ y $x = 0$ es raíz de este polinomio, $R(x)$ tiene dos raíces reales porque $b^2 - 4ac = 20 > 0$ y $S(x)$ tiene como mínimo una raíz real, $x = 0$, porque $S(0) = 1 - 1 = 0$.

La respuesta correcta es la B.

123. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene la propiedad de que la media aritmética de sus raíces, el producto de sus raíces y la suma de sus coeficientes son iguales. Si $P(0) = 2$, ¿cuál es el valor de b?

A. –11 **B. –10** **C. –9** **D. 1**

Llamando x_1, x_2 y x_3 a las raíces de $P(x)$.

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$.

Igualando coeficientes: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$ y $x_1x_2x_3 = -c$.

$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = x_1x_2x_3 = 1 + a + b + c \Rightarrow \frac{-a}{3} = -c = 1 + a + b + c$ y $P(0) = c = 2 \Rightarrow a = 6$ y $b = -11$

La respuesta correcta es la A.

Encuentra el error

124. A un estudiante le han pedido que efectúe la división $(8x^3 - 22x^2 - 10) : (2x - 6)$ y él observa hábilmente que simplificando ambos términos entre 2, puede aplicar el algoritmo de Ruffini que tanto le gusta.

Divide entonces $(4x^3 - 11x^2 - 5) : (x - 3)$ y obtiene cociente $4x^2 + x + 3$ y resto 4. Otro estudiante no tan osado, divide directamente los polinomios iniciales y obtiene cociente $4x^2 + x + 3$ y resto 8.

¿Cuál de los dos obtiene el resultado correcto? Convence al que se ha equivocado de su error.

$$D(x) = d(x)C(x) + R(x) \Rightarrow \frac{D(x)}{2} = \frac{d(x)}{2} \cdot C(x) + \frac{R(x)}{2} \Rightarrow 4x^3 - 11x^2 - 5 = (x-3)C(x) + \frac{R(x)}{2}$$

El primer estudiante está equivocado, pues al dividir $D(x) = 4x^3 - 11x^2 - 5$ y $d(x) = 2x - 6$ entre 2, el cociente permanece invariante pero el resto también queda dividido entre 2. Por tanto, el resto de la división inicial es 8.

PONTE A PRUEBA

Decorando la pared

Actividad resuelta

Codifica y descodifica

El proceso de codificar un mensaje se llama "encriptación", y hay muchos sistemas para llevarlo a cabo. Vamos a utilizar los polinomios para encriptar mensajes. En primer lugar, se establece una equivalencia para convertir cada letra en un número.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	¿	?
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Se emplea un sistema de sustitución cuya clave es el polinomio que asigna a cada letra del alfabeto otra letra.

1. El cifrado César consiste en sustituir cada letra por la que ocupa 3 posiciones más adelante en el alfabeto. Es decir, su clave es el polinomio $P(x) = x + 3$. Si al aplicar $P(x)$ al número asociado a una letra obtienes un número mayor que 28, continúa por el comienzo de la tabla; es decir, divide entre 29 y toma el resto. Utilizando el cifrado César:

a) Encripta el mensaje "La suerte está echada"

b) Desencripta "Glñh d wx dor txh hp Fhvdu vrñr odpgd Fhvdu".

a) "Ñd vxhuwh hvwd hfkdgd".

b) "Dile a tu amo que en César solo manda César".

2. Prueba con una clave más compleja, como el polinomio $P(x) = x^3 + 2$. Por ejemplo, para cifrar la letra *E*:

- **Como *E* equivale a 4, se calcula $P(4) = 4^3 + 2 = 66$.**
- **Como 66 es un número mayor que 28, se divide entre las 29 posiciones que tienen la tabla $66 = 2 \cdot 29 + 8$.**
- **Como 8, que es el resto de dividir 66 entre 29, equivale a *I*, se sustituye la letra *E* por la *I*.**

a) Encripta la frase de Woody Allen: "El eco siempre dice la última palabra".

b) Desencripta otra frase del mismo autor: "?nq snqñmu¿nq smifix ix¿fi cj?cmqnq".

a) "I? ikn quisjfi auki ?c m?¿usc jc?cdfc"

b) "Los mosquitos mueren entre aplausos".

3. Algunos polinomios sirven como claves para encriptar con este método, como $P(x) = 3x + 1$, y otros en cambio no, como $Q(x) = x^2 + 1$. ¿A qué se debe?

Se debe a que a letras diferentes les correspondería en la encriptación el mismo signo.

Por ejemplo: *N* y *P* tienen la misma encriptación porque $N \leftrightarrow 13$, $P(13) = 13^2 + 1 = 170 = 6 \cdot 29 + 25$ y $25 \leftrightarrow Y$.

$P \leftrightarrow 16$, $P(16) = 16^2 + 1 = 257 = 8 \cdot 29 + 25$ y $25 \leftrightarrow Y$.

Cuenta con los polinomios.

Los sistemas de numeración utilizan símbolos para representar diferentes cantidades. Hoy en día, en casi todo el mundo son posicionales, es decir, que el valor de cada símbolo depende de su posición dentro del número. Así, el 9 de 195 significa "noventa", o 9 decenas, pero el 9 de 9341 significa "nueve mil", o 9 millares.

En los sistemas de numeración posicional se utilizan diferentes bases. Las más comunes son:

Decimal: base 10	**Consta de 10 cifras o guarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.**
Binario: base 2	**Solo hay dos cifras: 0 y 1.**
Octal: base 8	**Consta de 8 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.**
Hexadecimal: base 16	**Consta de 16 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* (donde *A* tiene el valor de 10, *B* el de 11, … , y *F* el de 15).**

Cualquier número natural *N* escrito en una base *k* se puede representar mediante una expresión polinómica.

Así, por ejemplo, el número 319 en las bases 10, 8 y 16 es:

- $319_{10} = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$
- $477_8 = 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 = 319$
- $13F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 319$

1. El número 1 110101$_2$ está escrito en base 2. ¿A qué número equivale en base 10?

A. 101 **B.** 113 **C.** 117 **D.** 121

$1\,110\,101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117$

La respuesta correcta es la C.

2. ¿Y el número 13 422$_5$ escrito en base 5?

A. 1212 **B.** 1221 **C.** 1112 **D.** 2122

$13\,422_5 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = 625 + 375 + 100 + 10 + 2 = 1112$

La respuesta correcta es la C.

3. Expresa el número 1348$_{10}$ en las bases 5, 8 y 16.

$1348_{10} = 1250 + 75 + 20 + 3 = 2 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = 20\,343_5$

$1348_{10} = 1024 + 320 + 4 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4 = 2504_8$

$1348_{10} = 1280 + 64 + 4 = 5 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16 + 4 = 544_{16}$

4. El sistema decimal no siempre ha sido el más común en Europa. En francés, 99 todavía se dice *quatre-vingt- dix- neuf*, es decir, "cuatro veinte diecinueve". ¿Qué base utilizaban? Expresa este número en la base adecuada inventando los símbolos que necesites. ¿Cuántas cifras ocupa?

La base es 20. Las cifras, o símbolos, son: 0, 1, 2, …, 9, *A*, *B*,…, *I*, *J* $\Rightarrow$ $99_{10} = 4J_{20}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x)=\dfrac{x^3}{2}-2(x^2-1)$ para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

$P(2)=\dfrac{2^3}{2}-2(2^2-1)=4-8+2=-2$ $\qquad$ $P(-1)=\dfrac{(-1)^3}{2}-2((-1)^2-1)=\dfrac{-1}{2}$

2. Realiza las operaciones indicadas dados los polinomios.

- **$P(x) = 3x^2 - 2x + 4$**
- **$Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$**
- **$R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$**

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$ $\qquad$ **b) $P(x) \cdot Q(x) + R(x)$**

¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) \cdot (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) = -6x^5 - 3x^4 + 15x^3 - 3x^2 + 4x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2x - 8x^3 - 4x^2 + 20x - 4 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = -6x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 25x - 6 \Rightarrow$ Grado 5

3. Justifica cuáles de las siguientes expresiones son correctas.

a) $9a^2b^2 - c^2 = (3ab - c)^2$

b) $9a^2b^2 - 6abc + c^2 = (3ab - c)^2$

c) $4x^2y + 9y^2z = (2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$

d) $4x^4y^2 - 9y^4z^2 = (2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$

e) $16x^2y^2 - 8xy + 4x^2 = (4xy - 2x)^2$

Corrige en tu cuaderno las igualdades incorrectas.

a) Incorrecta porque $(3ab - c)^2 = 9a^2b^2 + c^2 - 6abc$

b) Correcta

c) Incorrecta porque $(2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z) = 4x^4y^2 - 9y^4z^2$

d) Correcta

e) Incorrecta porque $(4xy - 2x)^2 = 16x^2y^2 - 16x^2y + 4x^2$

4. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$ $\qquad$ **b) $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$**

a) $C(x) = 5x \quad R(x) = 2x^2 + 6x - 1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{5x^4} & -3x^2 & +x & -1 & x^3-x-1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{5x^4} & +5x^2 & +5x & & 5x \\ \cline{1-4}
& 2x^2 & +6x & -1 &
\end{array}$$

b) $C(x) = 4x - 4 \quad R(x) = -2x + 6$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{4x^3} & & -2x & +2 & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{4x^3} & -4x^2 & -4x & & 4x-4 \\ \cline{1-4}
& -\cancel{4x^2} & -6x & +2 & \\
& \cancel{4x^2} & +4x & +4 & \\ \cline{2-4}
& & -2x & +6 &
\end{array}$$

5. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini e indica el cociente y el resto.

a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$ $\qquad$ **b) $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$**

a) $C(x) = 2x^2 + 8x + 11 \qquad R(x) = 19$

	2	4	–5	–3
2		4	16	22
	2	8	11	19

b) $C(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 14 \qquad R(x) = 40$

	1	0	–3	4	–2
–3		–3	9	–18	42
	1	–3	6	–14	40

6. Calcula el valor que debe tener *k* para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ sea divisible entre $x - 4$.

- Para que el polinomio $P(x)$ sea divisible entre $x - 4$, el resto de la división de $P(x) : (x - 4)$ debe ser 0.
- Por el teorema del resto, $P(4) = 4^5 + k \cdot 4^4 + 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 1024 + 256k = 0 \Rightarrow k = -4$.

7. ¿Es $x + 1$ un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.

Por el teorema del factor, $x + 1$ es un factor de $x^{71} - 1$ si el resto de la división $(x^{71} - 1) : (x + 1)$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $P(-1) = (-1)^{71} - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Por tanto, $x + 1$ no es un factor de $x^{71} - 1$.

8. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20$

b) $Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6$

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20 = (x + 1)(6x^2 + 7x - 20) = 6(x + 1)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$

	6	13	–13	–20
–1		–6	–7	20
	6	7	–20	0

$$6x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 6 \cdot 20}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm 23}{12}\begin{cases} \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2} \\ \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

b) $Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6 = (x + 1)(x^4 - 5x - 6) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + x + 3)$

	1	1	0	–5	–11	–6
–1		–1	0	0	5	6
	1	0	0	–5	–6	0
–1		–1	1	–1	6	
	1	–1	1	–6	0	
2		2	2	6		
	1	1	3	0		

$$x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

9. Opera y simplifica.

$$\frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6} - \frac{5x + 1}{x - 2}$$

Factorizamos el primer denominador:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Por tanto:

$$\frac{3x^2 - 4x - 15}{x^2 - 5x + 6} - \frac{5x + 1}{x - 2} = \frac{3x^2 - 4x - 15 - (5x + 1)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{3x^2 - 4x - 15 - 5x^2 + 15x - x + 3}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{-2x^2 + 10x - 12}{(x - 2)(x - 3)} =$$

$$= \frac{-2\cancel{\left(x^2 + 5x - 6\right)}}{\cancel{x^2 - 5x + 6}} = -2$$