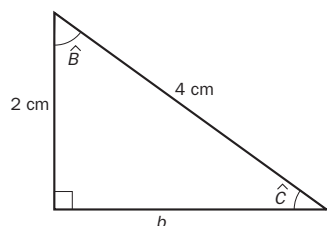


## 7 PROBLEMAS MÉTRICOS

### EJERCICIOS PROPUESTOS

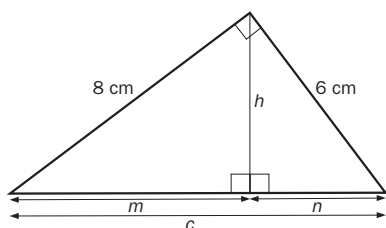
- 7.1 La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 2 centímetros, respectivamente. Halla las medidas de sus ángulos.



$$\widehat{C} = \arcsen \frac{2}{4} = 30^\circ$$

$$\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

- 7.2 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 6 y 8 centímetros. Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y la distancia desde su pie hasta los extremos.



$$c^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow c = 10 \text{ cm} \quad \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{10h}{2} \Rightarrow h = 4,8 \text{ cm}$$

$$8^2 = m \cdot 10 \Rightarrow m = 6,4 \text{ cm}$$

$$6^2 = n \cdot 10 \Rightarrow n = 3,6 \text{ cm}$$

- 7.3 Ana y Blanca se encuentran a ambos lados de la orilla de un río en los puntos A y B.



¿Qué anchura tiene el río?

$$\widehat{B} = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

$$\frac{100}{\sen 50^\circ} = \frac{d}{\sen 30^\circ} \Rightarrow d = \frac{100 \cdot \sen 30^\circ}{\sen 50^\circ} = 65,27 \text{ m}$$

- 7.4 Resuelve estos triángulos.

a)  $a = 25 \text{ m}$ ,  $b = 20 \text{ m}$ ,  $\widehat{A} = 90^\circ$

b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $\widehat{C} = 105^\circ$

c)  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $c = 7 \text{ mm}$ ,  $\widehat{B} = 30^\circ$

a) Triángulo rectángulo;  $c^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow c = 15 \text{ m}$

$$\widehat{B} = \arcsen \frac{20}{25} = 53^\circ 7' 48''$$

$$\widehat{C} = 36^\circ 52' 12''$$

b)  $\widehat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$

$$\frac{6}{\sen 30^\circ} = \frac{b}{\sen 45^\circ} = \frac{c}{\sen 105^\circ}$$

$$b = \frac{6 \sen 45^\circ}{\sen 30^\circ} = 8,49 \text{ cm} \quad c = \frac{6 \sen 105^\circ}{\sen 30^\circ} = 11,59 \text{ cm}$$

c)  $b^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow b^2 = 27,76 \Rightarrow b = 5,27 \text{ mm}$

$$10^2 = 7^2 + 5,27^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5,27 \cdot \cos \widehat{A} \Rightarrow \cos \widehat{A} = -0,315 \Rightarrow \widehat{A} = 108,35^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 108,35^\circ = 41,65^\circ$$

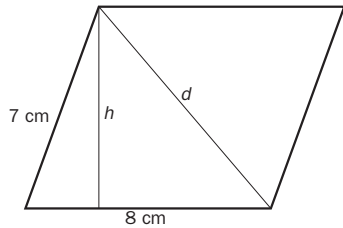
- 7.5 Los brazos de un compás miden 12 centímetros. ¿Qué ángulo forman cuando se traza un arco de 7 centímetros de radio?

$$7^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0,83 \Rightarrow \alpha = 33,92^\circ$$

- 7.6 Los lados de un paralelogramo forman un ángulo de  $70^\circ$ . Sus medidas son 7 y 8 centímetros.

a) Calcula la longitud de la diagonal menor.

b) Halla el área del paralelogramo.



a)  $d^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cos 70^\circ = 74,694 \Rightarrow d = 8,643 \text{ cm}$

b)  $\sin 70^\circ = \frac{h}{7} \Rightarrow h = 6,578 \text{ cm}$

$$A = 8 \cdot 6,578 = 52,624 \text{ cm}^2$$

- 7.7 El lado de un octógono regular mide 12 metros. Calcula la longitud de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.

El radio de la circunferencia inscrita se corresponde con la apotema:  $r$

El radio de la circunferencia circunscrita se corresponde con el radio del octógono:  $R$

$$\text{Ángulo central} = 360^\circ : 8 = 45^\circ \quad 2\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad \alpha = 67,5^\circ$$

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{R}{\sin 67,5^\circ} \Rightarrow R = 15,68 \text{ m} \quad r^2 = 15,68^2 - 6^2 = 209,86 \quad r = 14,49 \text{ m}$$

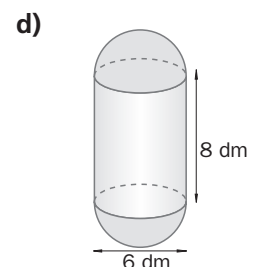
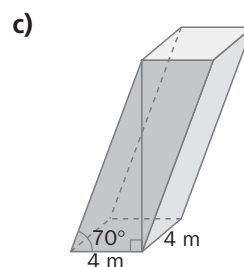
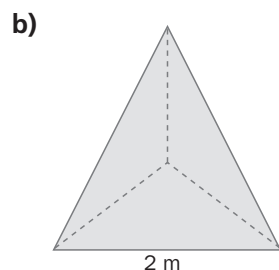
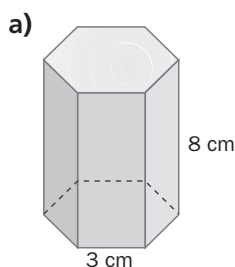
- 7.8 Halla el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 centímetros de radio.

$$\text{Ángulo central} = 360^\circ : 5 = 72^\circ \quad 2\alpha = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ \quad \alpha = 54^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 54^\circ} = \frac{x}{\sin 72^\circ} \Rightarrow x = 11,76 \text{ cm} \quad a^2 = 10^2 - 5,88^2 = 65,43 \Rightarrow a = 8,09 \text{ cm}$$

$$A = \frac{11,76 \cdot 5 \cdot 8,09}{2} = 237,85 \text{ cm}^2$$

- 7.9 Calcula el área lateral y el área total de estos cuerpos.



a)  $a^2 = 3^2 - 1,5^2 = 6,75 \Rightarrow a = 2,6 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2,6}{2} = 23,4 \text{ cm}^2; A_{\text{lateral}} = 3 \cdot 6 \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{total}} = 23,4 \cdot 2 + 144 = 190,8 \text{ cm}^2$$

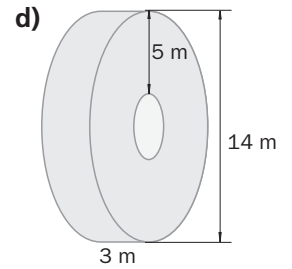
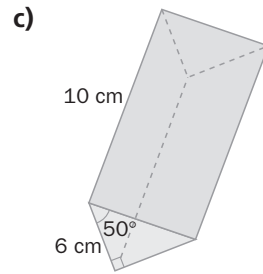
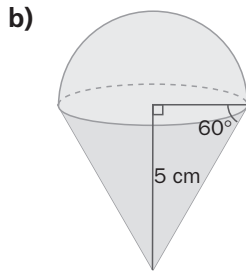
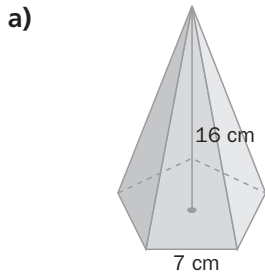
b)  $h^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow h = 1,73 \text{ m} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 1,73 \text{ m}^2 \Rightarrow A_{\text{tetraedro}} = 4 \cdot 1,73 = 6,92 \text{ m}^2$

c)  $\hat{A} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ \Rightarrow \frac{4}{\sin 20^\circ} = \frac{h}{\sin 70^\circ} \Rightarrow h = \frac{4 \sin 70^\circ}{\sin 20^\circ} = 10,99 \text{ m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{\text{lateral}} = 4 \cdot 4 \cdot 10,99 = 175,84 \text{ m}^2 \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 175,84 = 207,84 \text{ m}^2$$

d)  $A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 8 = 48\pi \text{ dm}^2; A_{2\text{semiesferas}} = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ dm}^2 \Rightarrow A_{\text{total}} = 48\pi + 36\pi \Rightarrow A_{\text{total}} = 84\pi \text{ dm}^2$

**7.10** Halla el volumen de estos cuerpos.



$$a) \frac{7}{\sin 72^\circ} = \frac{R}{\sin 54^\circ} \Rightarrow R = 5,95 \text{ cm} \Rightarrow a^2 = 5,95^2 - 3,5^2 = 23,15 \Rightarrow a = 4,81 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4,81}{2} = 84,18 \text{ cm}^2 \quad V = \frac{84,18 \cdot 16}{3} = 448,96 \text{ cm}^3$$

$$b) \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{5}{r} \Rightarrow r = 2,89 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} + \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi 2,89^2 \cdot 5}{3} + \frac{4\pi 2,89^3}{2} = 94,24 \text{ cm}^3$$

$$c) \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{b}{6} \Rightarrow b = 7,15 \text{ cm}$$

$$A_{\text{base}} = \frac{6 \cdot 7,15}{2} = 21,45 \text{ cm}^2 \Rightarrow V = 21,45 \cdot 10 = 214,5 \text{ cm}^3$$

$$d) R = 14 : 2 = 7 \text{ m}$$

$$r = (14 - 5 \cdot 2) : 2 = 2 \text{ m}$$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi 7^2 3 - \pi 2^2 3 = 135\pi \text{ m}^3 = 423,9 \text{ m}^3$$

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

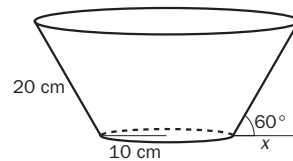
**7.11** Se quiere forrar una maceta con forma de tronco de cono. Si el diámetro de la base mide 20 centímetros y la generatriz, que tiene la misma longitud, forma un ángulo de  $60^\circ$  con el suelo, ¿qué cantidad de papel se necesita?

$$x = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ cm} \Rightarrow R = 10 + 5 = 15 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi(15 + 10) \cdot 20 = 500\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = \pi 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{maceta}} = 500\pi + 100\pi = 600\pi \text{ cm}^2$$



**7.12** ¿Qué volumen de tierra se necesita para llenar una maceta de interior que tiene la forma de un tronco de cono si los radios de las bases miden 10 y 20 centímetros, y la generatriz forma un ángulo de  $60^\circ$  con el suelo?

$$h^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow h = 17,32 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi 10^2 \cdot 17,32}{3} = 1812,83 \text{ cm}^3$$

$$H^2 = 40^2 - 20^2 = 1200 \Rightarrow H = 34,64 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi 20^2 \cdot 34,64}{3} = 14502,61 \text{ cm}^3$$

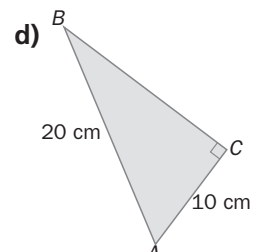
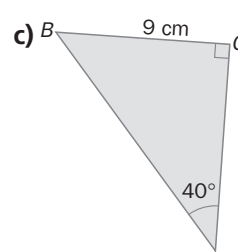
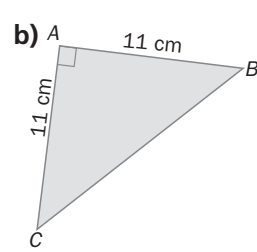
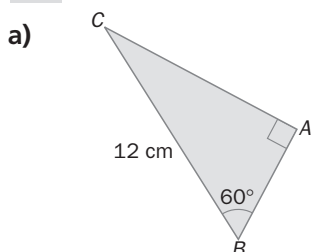
$$V_{\text{tronco}} = 14502,61 - 1812,83 = 12689,78 \text{ cm}^3$$

**ACTIVIDADES**

**EJERCICIOS PARA ENTRENARSE**

**Resolución de triángulos rectángulos**

**7.13** Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.



- a)  $\widehat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$      $\text{sen } 30^\circ = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 6 \text{ cm}$      $\text{sen } 60^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 6\sqrt{3} \text{ cm} = 10,39 \text{ cm}$
- b)  $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$      $a^2 = 11^2 + 11^2 \Rightarrow a = 11\sqrt{2} \text{ cm} = 15,56 \text{ cm}$
- c)  $\widehat{B} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$      $\text{sen } 40^\circ = \frac{9}{c} \Rightarrow c = 14 \text{ cm} \Rightarrow \text{tg } 50^\circ = \frac{b}{9} \Rightarrow b = 10,73 \text{ cm}$
- d)  $a^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow a = 10\sqrt{3} \text{ cm} = 17,32 \text{ cm} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{10}{20} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ; \widehat{A} = 60^\circ$

**7.14 Resuelve los triángulos sabiendo que  $\widehat{C}$  es un ángulo recto.**

- a)  $\widehat{A} = 55^\circ, a = 18 \text{ cm}$   
b)  $c = 10 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}$   
c)  $a = 18 \text{ cm}, b = 15 \text{ cm}$

- a)  $\widehat{B} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$      $\text{sen } 55^\circ = \frac{18}{c} \Rightarrow c = \frac{18}{\text{sen } 55^\circ} = 21,97 \text{ cm}$   
 $b = 21,97 \cdot \text{sen } 35^\circ = 12,6 \text{ cm}$
- b)  $a^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$      $\text{sen } \widehat{B} = \frac{6}{10} = 0,6$      $\widehat{B} = \arcsen 0,6 = 36,87^\circ$   
 $\widehat{A} = 90^\circ - 36,87^\circ = 53,13^\circ$
- c)  $c^2 = 18^2 + 15^2 = 549 \Rightarrow c = 23,43 \text{ cm}$      $\text{sen } \widehat{B} = \frac{15}{23,43} = 0,64$      $\widehat{B} = \arcsen 0,64 = 39,81^\circ$   
 $\widehat{A} = 90^\circ - 39,81^\circ = 50,19^\circ$

**7.15 Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.**

$$h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{108} = 10,39 \text{ cm}$$

**7.16 El lado desigual de un triángulo isósceles mide 16 metros, y el ángulo desigual,  $80^\circ$ . ¿Cuál es la medida de la altura sobre este lado?**

$$\text{tg } 40^\circ = \frac{8}{h} \Rightarrow h = \frac{8}{\text{tg } 40^\circ} = 9,53 \text{ m}$$

**7.17 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 6,4 y 3,6 centímetros. Halla la longitud de los lados.**

$c = 6,4 + 3,6 = 10 \text{ cm}$  mide la hipotenusa.  
 $a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 6,4 \cdot 10 = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$   
 $b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 3,6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow b = 6 \text{ cm}$

**7.18 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4 centímetros.**

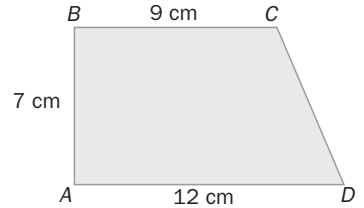
**Resuelve el triángulo.**

$c = m + n \Rightarrow m = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$   
 $a^2 = m \cdot c \Rightarrow a^2 = 16 \cdot 20 = 320 \Rightarrow a = 17,89 \text{ cm}$   
 $b^2 = n \cdot c \Rightarrow b^2 = 4 \cdot 20 = 80 \Rightarrow b = 8,94 \text{ cm}$   
 $\text{tg } \widehat{A} = \frac{17,89}{8,94} \Rightarrow \widehat{A} = 63,45^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 63,45^\circ = 26,55^\circ$

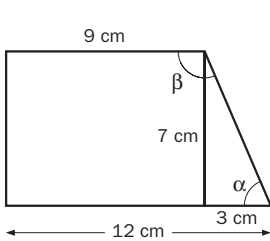
**7.19 La diagonal mayor de un rombo mide 8 centímetros y forma con cada lado contiguo un ángulo de  $26^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado del rombo?**

$$\cos 26^\circ = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{4}{\cos 26^\circ} = 4,45 \text{ cm mide el lado.}$$

**7.20** Halla la medida de los ángulos de este trapecio rectángulo.



Trazando la altura desde el vértice superior derecho se obtiene un triángulo rectángulo.

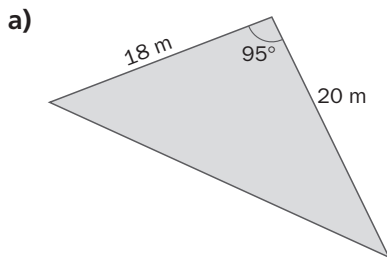


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{3} \Rightarrow \alpha = 66,80^\circ$$

$$\beta = 360^\circ - 90^\circ \cdot 2 - 66,80^\circ = 113,20^\circ$$

**Resolución de triángulos cualesquiera**

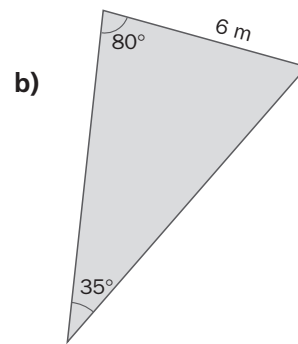
**7.21** Resuelve estos triángulos.



$$a^2 = 18^2 + 20^2 - 2 \cdot 18 \cdot 20 \cdot \cos 95^\circ = 786,75 \Rightarrow a = 28,05 \text{ m}$$

$$\frac{28,05}{\operatorname{sen} 95^\circ} = \frac{18}{\operatorname{sen} \hat{A}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 95^\circ}{28,05} \Rightarrow \hat{A} = 39,74^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 95^\circ - 39,74^\circ = 45,60^\circ$$



$$\hat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 35^\circ = 65^\circ$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 80^\circ} \Rightarrow c = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 10,30 \text{ m}$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 65^\circ} \Rightarrow b = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 9,48 \text{ m}$$

**7.22** Halla la medida de los ángulos y los lados desconocidos en cada caso.

a)  $\hat{A} = 56^\circ$ ,  $b = 14 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$

c)  $a = 38 \text{ cm}$ ,  $b = 46 \text{ cm}$ ,  $c = 22 \text{ cm}$

b)  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $\hat{C} = 75^\circ$ ,  $a = 25 \text{ cm}$

d)  $\hat{A} = 42^\circ$ ,  $\hat{C} = 65^\circ$ ,  $b = 14 \text{ cm}$

a)  $a^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \cos 56^\circ = 134,74 \Rightarrow a = 11,61 \text{ cm}$

$$\frac{11,61}{\operatorname{sen} 56^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 56^\circ}{11,61} \Rightarrow \hat{B} = 34,84^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 56^\circ - 34,84^\circ = 89,16^\circ$$

b)  $\hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$

$$\frac{25}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow b = \frac{25 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 20,41 \text{ cm}$$

$$c^2 = 25^2 + 20,41^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20,41 \cdot \cos 75^\circ = 777,44 \Rightarrow c = 27,88 \text{ cm}$$

c)  $38^2 = 46^2 + 22^2 - 2 \cdot 46 \cdot 22 \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{38^2 - 46^2 - 22^2}{-2 \cdot 46 \cdot 22} \Rightarrow \hat{A} = 55,17^\circ$

$$\frac{38}{\operatorname{sen} 55,17^\circ} = \frac{46}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{46 \cdot \operatorname{sen} 55,17^\circ}{38} \Rightarrow \hat{B} = 83,54^\circ$$

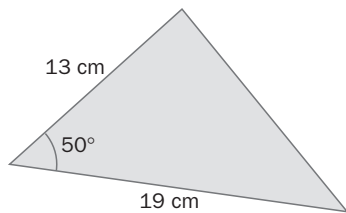
$$\hat{C} = 180^\circ - 55,17^\circ - 83,54^\circ = 41,29^\circ$$

d)  $\hat{B} = 180^\circ - 42^\circ - 65^\circ = 73^\circ$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 42^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 73^\circ} \Rightarrow a = \frac{14 \cdot \operatorname{sen} 42^\circ}{\operatorname{sen} 73^\circ} = 9,80 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{14}{\operatorname{sen} 73^\circ} \Rightarrow c = \frac{14 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 73^\circ} = 13,27 \text{ cm}$$

**7.23 Resuelve el triángulo. ¿De qué tipo es?**



$$c^2 = 19^2 + 13^2 - 2 \cdot 19 \cdot 13 \cdot \cos 50^\circ = 212,46 \Rightarrow c = 14,58 \text{ cm}$$

Es escaleno.

**7.24 Resuelve los siguientes triángulos.**

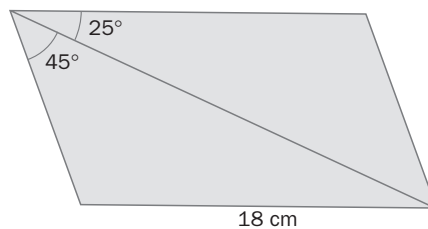
a)  $a = 3 \text{ cm}, c = 2 \text{ cm}, \widehat{C} = 140^\circ$

b)  $a = 19 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}, \widehat{B} = 62^\circ$

a)  $\frac{2}{\sin 140^\circ} = \frac{3}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{3 \cdot \sin 140^\circ}{2} = 0,96 \Rightarrow \widehat{A} = 74,62^\circ$ . No es posible.

b)  $\frac{8}{\sin 62^\circ} = \frac{19}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{19 \cdot \sin 62^\circ}{8} = 2,1$ . No es posible.

**7.25 Halla la medida de la diagonal del paralelogramo.**

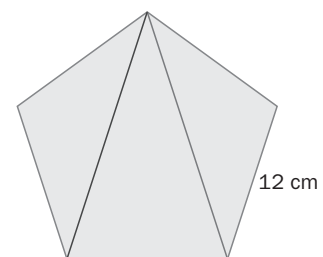


La diagonal divide el paralelogramo en dos triángulos de los que se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

El tercer ángulo es  $\widehat{C} = 180^\circ - 25^\circ - 95^\circ = 60^\circ$ .

Por el teorema del seno:  $\frac{18}{\sin 95^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \Rightarrow c = \frac{18 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 95^\circ} = 15,65 \text{ cm}$  mide la diagonal.

**7.26 Calcula la medida de las diagonales dibujadas en el pentágono regular de la figura.**



La suma de los ángulos interiores de un pentágono es  $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$ .

Cada uno de ellos mide:  $540^\circ : 5 = 108^\circ$ .

En los triángulos de la izquierda o derecha que se obtienen al trazar las diagonales se conocen dos de sus lados, 12 cm, y el ángulo comprendido entre ellos,  $108^\circ$ .

$$d^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 108^\circ = 199 \Rightarrow d = 14,11 \text{ cm}$$

**Longitudes y áreas de figuras planas**

**7.27 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo miden 14,4 y 25,6 centímetros. Calcula el área del triángulo.**

Hipotenusa:  $c = 14,4 + 25,6 = 40 \text{ cm}$

Altura sobre la hipotenusa:  $h^2 = m \cdot n = 14,4 \cdot 25,6 = 368,64 \Rightarrow h = 19,2 \text{ cm}$

$$A = \frac{40 \cdot 19,2}{2} = 384 \text{ cm}^2$$

**7.28** La diagonal de un rectángulo mide 28,84 decímetros y forma con la base un ángulo de  $33^\circ 41' 24''$ . Halla su perímetro y su área.

$$33^\circ 41' 24'' = 33,69^\circ$$

Si  $b$  es la base del rectángulo, y  $a$ , la altura:

$$\cos 33,69^\circ = \frac{b}{28,84} \Rightarrow b = 28,84 \cdot \cos 33,69^\circ = 24 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 33,69^\circ = \frac{a}{28,84} \Rightarrow a = 28,84 \cdot \operatorname{sen} 33,69^\circ = 16 \text{ cm}$$

$$p = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 16 = 80 \text{ cm}$$

$$A = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2$$

**7.29** El lado de un octógono regular mide 20 centímetros. Calcula la medida de la apotema y el área del octógono.

La apotema y un radio, junto con la mitad del lado del octógono, forman un triángulo rectángulo.

Un ángulo es la mitad del ángulo central formado por dos radios consecutivos.

$$\text{Ángulo central} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

El ángulo opuesto a la mitad del lado del octógono mide  $22,5^\circ$ .

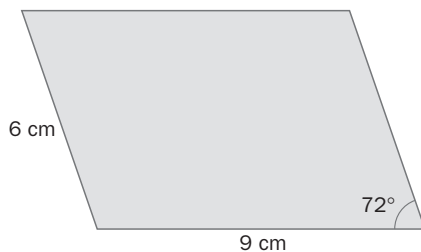
$$\text{Si } a \text{ es la apotema, } \operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{\operatorname{tg} 22,5^\circ} = 24,14 \text{ cm.}$$

$$A = \frac{8 \cdot 20 \cdot 24,14}{2} = 1931,2 \text{ cm}^2$$

**7.30** Calcula la longitud de la circunferencia que se traza con un compás cuyos brazos miden 7 centímetros y forman un ángulo de  $70^\circ$ .

$$\text{Sea } r \text{ el radio de la circunferencia: } r^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos 70^\circ = 64,48 \Rightarrow r = 8,03 \text{ cm} \Rightarrow l = 2\pi r = 50,43 \text{ cm}$$

**7.31** Halla el área de este paralelogramo.

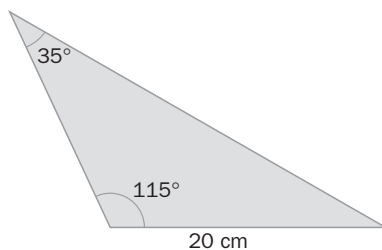


$$\text{Altura} = h$$

$$\operatorname{sen} 72^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 5,71 \text{ cm}$$

$$A = 9 \cdot 5,71 = 51,39 \text{ cm}^2$$

**7.32** Calcula el perímetro de este triángulo.



$$\frac{20}{\operatorname{sen} 35^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 115^\circ} \Rightarrow c = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 115^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = 31,60 \text{ cm}$$

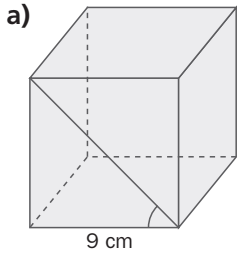
$$\widehat{A} = 180^\circ - 35^\circ - 115^\circ = 30^\circ$$

$$A^2 = 20^2 + 31,60^2 - 2 \cdot 20 \cdot 31,6 \cdot \cos 30^\circ = 303,9 \Rightarrow a = 17,43 \text{ cm}$$

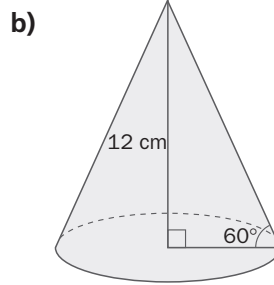
$$p = 20 + 17,43 + 31,60 = 69,03 \text{ cm}$$

## Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

7.33 Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.

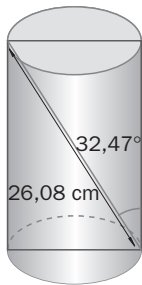


a)  $A_b = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$   
 Altura:  $h = 9 \cdot \text{tg } 60^\circ = 15,59 \text{ cm}$   
 $A_r = 4 \cdot 9 \cdot 15,59 + 2 \cdot 81 = 723,24 \text{ cm}^2$   
 $V = 81 \cdot 15,59 = 1262,79 \text{ cm}^3$



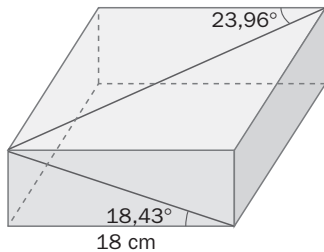
b) El radio:  $r = \frac{12}{\text{tg } 60^\circ} = 6,93 \text{ cm}$       $A_b = \pi \cdot 6,93^2 = 150,80 \text{ cm}^2$   
 La generatriz :  $g = \frac{12}{\text{sen } 60^\circ} = 13,86 \text{ cm}$   
 $A_r = 150,80 + 2 \cdot \pi \cdot 6,93 \cdot 13,86 = 753,99 \text{ cm}^2$   
 $V = \frac{1}{3} \cdot 150,8 \cdot 12 = 603,2 \text{ cm}^3$

7.34 Calcula el volumen del cilindro.



$h = 26,08 \cdot \cos 32,47^\circ = 22 \text{ cm}$   
 Diámetro:  $d = 26,08 \cdot \text{sen } 32,47^\circ = 14 \Rightarrow r = 7 \text{ cm}$   
 $V = \pi 7^2 \cdot 22 = 3386,64 \text{ cm}^3$

7.35 Halla el área total y el volumen del ortoedro.



Altura del ortoedro:  $h = 18 \cdot \text{tg } 18,43^\circ = 6 \text{ cm}$   
 Lado de la base:  $18 \cdot \text{tg } 23,96^\circ = 8 \text{ cm}$   
 $A_r = 2 \cdot 18 \cdot 8 + 2 \cdot 18 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 600 \text{ cm}^2$   
 $V = 18 \cdot 8 \cdot 6 = 864 \text{ cm}^3$

### CUESTIONES PARA ACLARARSE

7.36 Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida, ¿cómo es el triángulo? ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

Isósceles. Sus ángulos agudos miden  $45^\circ$ .

7.37 Responde a las siguientes preguntas.

- a) ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?  
 b) ¿Y de un triángulo cualquiera?

- a) Dos: dos lados, o un ángulo agudo y un lado.  
 b) Tres: los tres lados, o dos lados y un ángulo, o dos ángulos y un lado.

7.38 ¿Se pueden utilizar los teoremas del seno y del coseno para resolver un triángulo rectángulo? Razona tu respuesta.

Es más rápido utilizar las razones trigonométricas, pero también se pueden utilizar esos teoremas.



7.39 Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos, y al trazar una diagonal, dos triángulos.

¿Cuál es la relación entre las áreas de los rectángulos y los triángulos obtenidos?

Son iguales.

En los dos casos, el área es  $\frac{a^2}{2}$ .

7.40 Al resolver un triángulo, los resultados son los siguientes:  $a = 30$  cm,  $b = 42$  cm,  $c = 23$  cm,  $\widehat{A} = 58^\circ$ ,  $\widehat{B} = 35^\circ$  y  $\widehat{C} = 87^\circ$ .

¿Es correcta la solución?

No, porque al lado  $b$ , que es el mayor, le debe corresponder el ángulo mayor, y no es así.

7.41 De un triángulo se conocen los tres lados y un ángulo. Si se quiere calcular uno de los ángulos desconocidos, ¿se puede utilizar el teorema del seno? ¿Y el del coseno?

En caso de poder utilizar los dos, ¿cuál es el más conveniente?

Se pueden usar los dos teoremas. Es más conveniente el del coseno porque al ser un ángulo de entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , si resulta positivo, es del primer cuadrante, y si resulta negativo, es del segundo, de modo que solo hay un ángulo en cada uno de los casos.

Si por el contrario se utiliza el teorema del seno, solo se obtiene un valor del seno positivo que puede corresponder a un ángulo del primer cuadrante o del segundo y, por tanto, no queda totalmente determinado.

7.42 ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo sus ángulos? Razona tu respuesta.

No, porque los triángulos semejantes tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y si no se conoce uno de los lados, es imposible determinar de cuál de todos los triángulos semejantes se trata.

7.43 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre la misma.

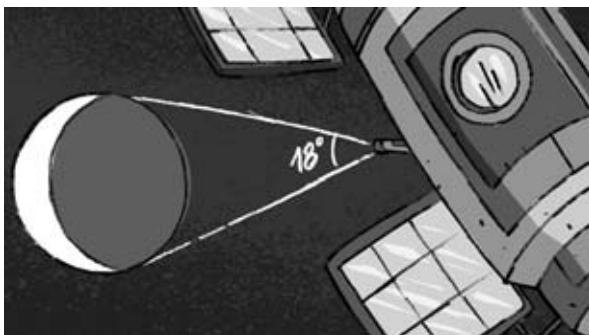
Con esos datos se puede calcular la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa y esta, al sumar las dos proyecciones.

Luego, se calculan los catetos con el teorema del cateto, y con los tres lados se pueden hallar los ángulos del triángulo.

Por tanto, sí es posible resolverlo.

#### PROBLEMAS PARA APLICAR

7.44 El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6378 kilómetros. Desde un satélite se dirigen las visuales a dos puntos como muestra el dibujo.



¿A qué distancia del centro se encuentra el satélite? ¿Y de los puntos determinados por las visuales?

Se forma un triángulo isósceles, de modo que la medida del lado desigual es el diámetro de la Tierra:

La distancia a la Tierra es la altura de ese triángulo.

$$h = \frac{6378}{\operatorname{tg} 9^\circ} = 40\,269,11 \text{ km del centro}$$

$$d = \frac{6378}{\operatorname{sen} 9^\circ} = 40\,711,07 \text{ km de los puntos determinados por las visuales}$$

- 7.45 Juan ha decidido donar sus muebles. Como tiene una mesa muy grande y vive en un cuarto piso, antes de trasladarla quiere comprobar si la puede bajar en el ascensor una vez quitadas las patas.



¿Tendrá que utilizar las escaleras o podrá bajar la mesa en el ascensor?

Las medidas de la mesa son:  $a = 144,22 \cdot \cos 33,69^\circ = 120$  cm un lado.

$b = 144,22 \cdot \sin 33,69^\circ = 80$  cm el otro lado.

Se puede bajar en el ascensor.

- 7.46 Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En ese intervalo de tiempo, el avión ha cambiado ligeramente de posición.



Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?

La distancia entre las dos posiciones del avión es:  $s = 600 \text{ km/h} \cdot 6 \text{ seg} = \frac{600\,000}{3600} \text{ m/seg} \cdot 6 \text{ seg} = 1000$  m.

El ángulo que diferencia las visuales es  $\alpha$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{1350} \Rightarrow \alpha = 2'32,79''$ .

- 7.47 Cuando se hace una fotografía con una cámara compacta se produce lo que se denomina paralaje: la imagen que captura el visor no coincide con la del objetivo porque no están situados a la misma distancia.

Calcula el ángulo  $a$  que mide la paralaje.



$$\text{sen } a = \frac{17,5}{2000} = 0,00875 \Rightarrow a = 30'4,84''$$

7.48 Una balda se va a sujetar con unas piezas que tienen forma de triángulo rectángulo para colocar un objeto pesado.

Al situarlas en la pared se observa que ha habido un error y que las piezas no tienen ningún ángulo recto.



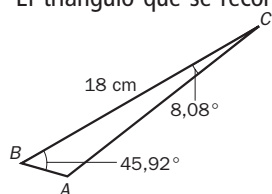
Si el lado de 22 centímetros es el que sujetará la balda, ¿qué dimensiones tendrá el triángulo que hay que cortar para que se obtenga el ángulo recto necesario?

$$\frac{22}{\widehat{A}} = \frac{18}{\widehat{C}} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{22 \cdot \widehat{C}}{18} \Rightarrow \widehat{A} = 45,92^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 36^\circ - 45,92^\circ = 98,08^\circ$$

Hay que cortar  $8,08^\circ$  del ángulo  $\widehat{C}$ .

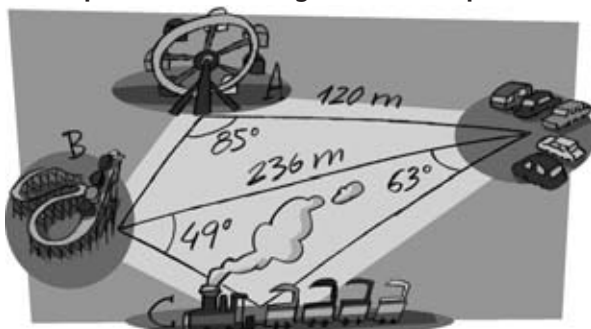
El triángulo que se recorta es:



$$\widehat{A} = 180^\circ - 8,08^\circ - 45,92^\circ = 126^\circ$$

$$\frac{c}{\widehat{B}} = \frac{18}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{C}} \Rightarrow c = 3,13 \quad b = 15,98$$

7.49 Para conocer la distancia entre varios puntos se realiza una triangulación, esto es, se unen los puntos de modo que formen triángulos no solapados.



Calcula las distancias que faltan en el dibujo.

$$\frac{236}{\widehat{A}} = \frac{120}{\widehat{B}} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{120 \cdot \widehat{A}}{236} \Rightarrow \widehat{B} = 30,53^\circ$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - 85^\circ - 30,53^\circ = 64,47^\circ$$

$$\frac{236}{\widehat{A}} = \frac{AB}{\widehat{D}} \Rightarrow AB = \frac{236 \cdot \widehat{D}}{\widehat{A}} = 213,67 \text{ m}$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 49^\circ - 63^\circ = 68^\circ$$

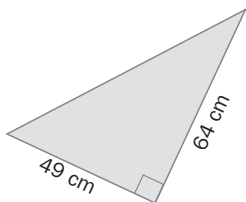
$$\frac{236}{\widehat{C}} = \frac{BC}{\widehat{D}} \Rightarrow BC = \frac{236 \cdot \widehat{D}}{\widehat{C}} = 226,79 \text{ m}$$

$$\frac{236}{\widehat{C}} = \frac{DC}{\widehat{B}} \Rightarrow DC = \frac{236 \cdot \widehat{B}}{\widehat{C}} = 192,1 \text{ m}$$

## Resolución de triángulos

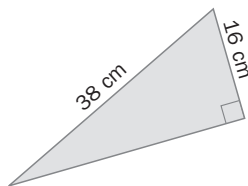
7.50 Calcula las medidas de los ángulos y de los lados desconocidos de estos triángulos.

a)



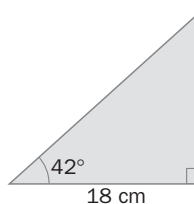
$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{tg} \widehat{B} &= \frac{64}{49} \Rightarrow \widehat{B} = 52,56^\circ \\ \widehat{A} &= 90^\circ - 52,56^\circ = 37,44^\circ \\ c &= \sqrt{49^2 + 64^2} = 80,60 \text{ cm} \end{aligned}$$

b)



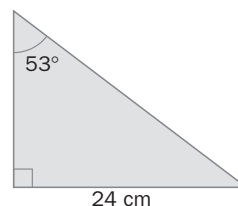
$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \widehat{A} &= \frac{16}{38} \Rightarrow \widehat{A} = 65,09^\circ \\ \widehat{B} &= 180^\circ - 90^\circ - 65,09^\circ = 24,91^\circ \\ a &= \sqrt{38^2 - 16^2} = 34,46 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} \text{c) } c &= \frac{18}{\cos 42^\circ} = 24,22 \text{ cm} \\ \widehat{B} &= 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ \\ b &= 24,22 \cdot \operatorname{sen} 42^\circ = 16,20 \text{ cm} \end{aligned}$$

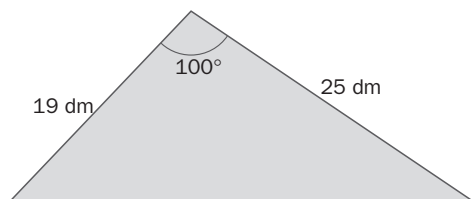
d)



$$\begin{aligned} \text{d) } c &= \frac{24}{\operatorname{sen} 53^\circ} = 30,05 \text{ cm} \\ \widehat{B} &= 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ \\ a &= \sqrt{30,05^2 - 24^2} = 18,08 \text{ cm} \end{aligned}$$

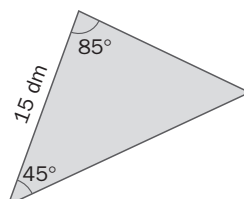
7.51 Resuelve estos triángulos.

a)



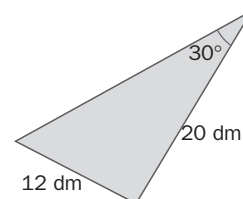
$$\begin{aligned} \text{a) } a^2 &= 19^2 + 25^2 - 2 \cdot 19 \cdot 25 \cdot \cos 100^\circ = 1150,97 \Rightarrow a = 33,93 \text{ dm} \\ \frac{19}{\operatorname{sen} \widehat{B}} &= \frac{33,93}{\operatorname{sen} 100^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{19 \cdot \operatorname{sen} 100^\circ}{33,93} \Rightarrow \widehat{B} = 33,47^\circ \\ \widehat{C} &= 180^\circ - 100^\circ - 33,47^\circ = 46,53^\circ \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \text{b) } \widehat{C} &= 180^\circ - 85^\circ - 45^\circ = 50^\circ \\ \frac{15}{\operatorname{sen} 50^\circ} &= \frac{b}{\operatorname{sen} 85^\circ} \Rightarrow b = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 85^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow b = 19,51 \text{ dm} \\ \frac{15}{\operatorname{sen} 50^\circ} &= \frac{a}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ} \Rightarrow a = 13,85 \text{ dm} \end{aligned}$$

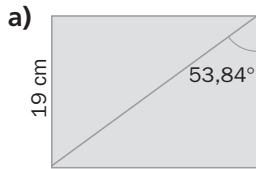
c)



$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{20}{\operatorname{sen} \widehat{B}} &= \frac{12}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{12} \Rightarrow \widehat{B} = 56,44^\circ \\ \widehat{C} &= 180^\circ - 30^\circ - 56,44^\circ = 93,56^\circ \\ \frac{12}{\operatorname{sen} 30^\circ} &= \frac{c}{\operatorname{sen} 93,56^\circ} \Rightarrow c = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 93,56^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Rightarrow c = 23,95 \text{ dm} \end{aligned}$$

## Longitudes y áreas de figuras planas

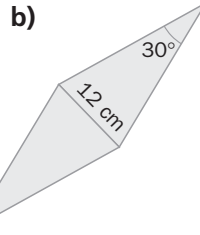
7.52 Calcula el perímetro y el área de estas figuras.



$$a) b = 19 \cdot \operatorname{tg} 53,84^\circ = 26 \text{ cm}$$

$$p = 2 \cdot 26 + 2 \cdot 19 = 90 \text{ cm}$$

$$A = 26 \cdot 19 = 494 \text{ cm}^2$$



$$b) \text{ Lado del rombo: } l = \frac{6}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 23,18 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal mayor: } \frac{D}{2} = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 22,39 \text{ cm} \Rightarrow D = 44,78 \text{ cm}$$

$$p = 4 \cdot 23,18 = 92,72 \text{ cm}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{44,78 \cdot 12}{2} = 268,68 \text{ cm}^2$$

7.53 Halla el área y el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 20 centímetros, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 9,6 centímetros.

$$\text{El cateto cuya proyección es } 9,6, b: b^2 = 9,6 \cdot 20 \Rightarrow b = 13,86 \text{ cm}$$

$$\text{La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa, } m: m = 20 - 9,6 = 10,4 \text{ cm}$$

$$\text{El cateto, } c: c^2 = 10,4 \cdot 20 \Rightarrow c = 14,42 \text{ cm}$$

$$p = 14,42 + 13,86 + 20 = 48,28 \text{ cm}$$

$$A = \frac{13,86 \cdot 14,42}{2} = 99,93 \text{ cm}^2$$

## Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

7.54 La generatriz de un cono mide 10 decímetros y el ángulo que forma esta con la altura del cono es de  $36^\circ$ . Calcula el área total y el volumen del cono.

$$\text{El radio, } r = 10 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ = 5,88 \text{ dm}$$

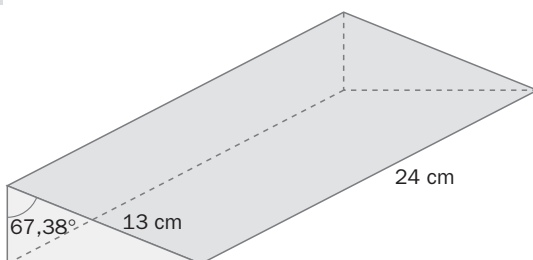
$$\text{Altura, } h = 10 \cdot \operatorname{cos} 36^\circ = 8,09 \text{ dm}$$

$$A_l = \pi \cdot 5,88 \cdot 10 = 184,63 \text{ dm}^2$$

$$A_T = \pi \cdot 5,88^2 + 184,63 = 293,19 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot 5,88^2 \cdot 8,09}{3} = 292,76 \text{ dm}^3$$

7.55 Calcula el volumen del prisma.



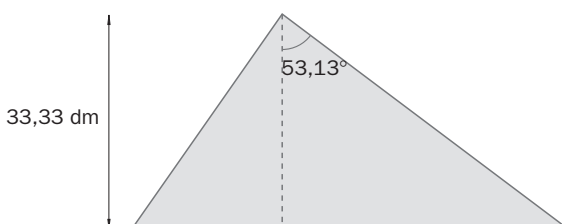
$$b = 13 \cdot \operatorname{sen} 67,38^\circ = 12 \text{ cm}$$

$$c = 13 \cdot \operatorname{cos} 67,38^\circ = 5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 24 = 720 \text{ cm}^3$$

### AMPLIACIÓN

7.56 Resuelve este triángulo.



Si  $H$  es el punto de corte de la altura con la hipotenusa,

$$HB = 33,33 \cdot \operatorname{tg} 53,13^\circ = 44,44 \text{ dm.}$$

$$a = CB = \frac{33,33}{\operatorname{cos} 53,13^\circ} = 55,55 \text{ dm}$$

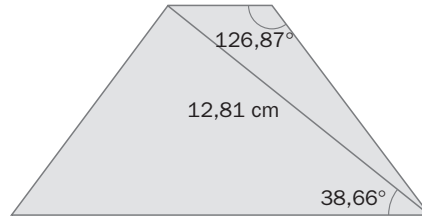
$$\hat{A} = 90^\circ - 36,87^\circ = 53,13^\circ$$

$$c = \sqrt{41,66^2 + 55,55^2} = 69,44 \text{ dm}$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ$$

$$b = \frac{33,33}{\operatorname{sen} 53,13^\circ} = 41,66 \text{ dm}$$

**7.57** Halla la medida de los lados de este trapezio isósceles.



$$\widehat{A} = \widehat{B} = 126,87^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ. \text{ Como } \widehat{A} = \widehat{B} \text{ y } \widehat{D} = \widehat{C}, \text{ entonces } \widehat{D} = \widehat{C} = \frac{360^\circ - 2 \cdot 126,87^\circ}{2} = 53,13^\circ$$

$$\text{En el triángulo } ABC, \widehat{C} = 53,13^\circ - 38,66^\circ = 14,47^\circ \text{ y } \widehat{A} = 180^\circ - 126,87^\circ - 14,47^\circ = 38,66^\circ$$

$$\text{Por el teorema del seno, } \frac{12,81}{\text{sen } 126,87^\circ} = \frac{AB}{\text{sen } 14,47^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12,81 \cdot \text{sen } 14,47^\circ}{\text{sen } 126,87^\circ} \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

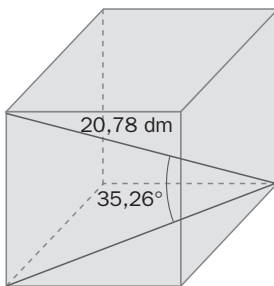
$$\frac{12,81}{\text{sen } 126,87^\circ} = \frac{BC}{\text{sen } 38,66^\circ} \Rightarrow BC = \frac{12,81 \cdot \text{sen } 38,66^\circ}{\text{sen } 126,87^\circ} \Rightarrow BC = 10 \text{ cm} = AD$$

$$\text{En el triángulo } ACD, \widehat{A} = 180^\circ - 53,13^\circ - 38,66^\circ = 88,21^\circ$$

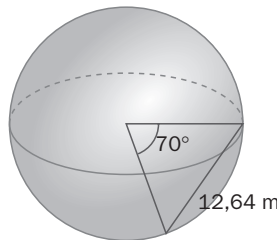
$$\text{Por el teorema del seno, } \frac{12,81}{\text{sen } 53,13^\circ} = \frac{DC}{\text{sen } 88,21^\circ} \Rightarrow DC = \frac{12,81 \cdot \text{sen } 88,21^\circ}{\text{sen } 53,23^\circ} \Rightarrow DC = 16 \text{ cm}$$

**7.58** Calcula el área y el volumen de estos cuerpos geométricos.

a)



b)



a) El lado del cubo forma con la diagonal de la base un ángulo de  $90^\circ$ . Por tanto, la diagonal del cubo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman las dos diagonales y el lado.

$$\text{Si } l \text{ es la medida del lado, } l = 20,78 \cdot \text{sen } 35,26^\circ = 12 \text{ dm.}$$

$$V = 12^3 = 1728 \text{ dm}^3$$

b) Los lados desconocidos del triángulo son los radios de la esfera,  $R$ .

Por el teorema del coseno,

$$12,64^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 70^\circ \Rightarrow 159,77 = 2R^2 - 0,68R^2 \Rightarrow R^2 = 121,04 \Rightarrow R = 11 \text{ m}$$

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 11^2 = 1520,53 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 11^3 = 5575,28 \text{ m}^3$$

**7.59** Unos módulos para guardar ropa debajo de la cama tienen la base con forma de sector circular. La amplitud de la misma es de  $80^\circ$  y su radio mide 60 centímetros.

Si la altura de los módulos es de 20 centímetros, ¿qué capacidad tienen?

Si la base fuera un círculo completo, la figura sería un cilindro, de modo que es una parte de él.

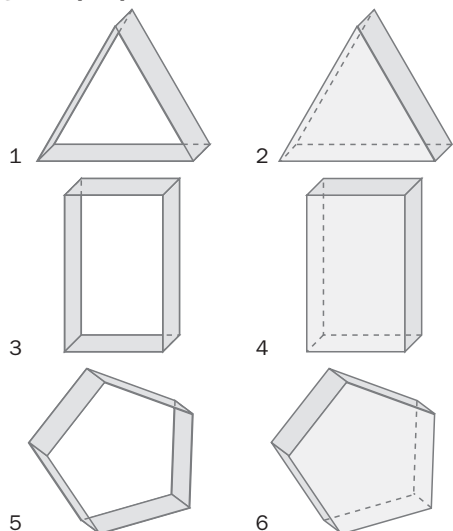
$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi \cdot 60^2 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2512 \text{ cm}^2$$

$$V = 2512 \cdot 20 = 50240 \text{ cm}^3$$

7.60 Característica de Euler

Para cada una de las siguientes figuras calcula el número  $E = C + V - A$ , siendo  $C$  el número de caras,  $V$  el número de vértices y  $A$  el número de aristas.

¿Qué propiedad observas?



1:  $E = C + V - A = 3 + 6 - 9 = 0$

2:  $E = C + V - A = 4 + 8 - 12 = 0$

3:  $E = C + V - A = 6 + 8 - 12 = 2$

4:  $E = C + V - A = 7 + 10 - 15 = 2$

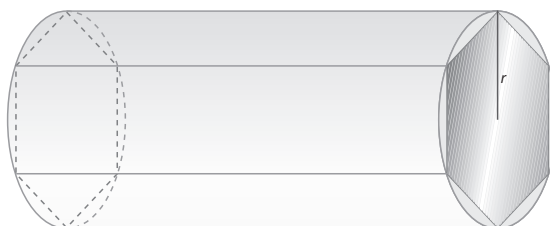
5:  $E = C + V - A = 7 + 10 - 15 = 2$

6:  $E = C + V - A = 7 + 10 - 15 = 2$

Las figuras con un agujero tienen  $E = 0$ ; las que carecen de agujero tienen  $E = 2$ .

7.61 Conservar el frío

Una empresa está diseñando un tipo de conducto formado por un prisma hexagonal recubierto por un envoltorio de forma cilíndrica de material aislante capaz de conservar el frío.



El resultado es un prisma metálico, de base un hexágono regular, inscrito en un cilindro de material aislante.

La empresa cuenta con 10 metros cuadrados de plancha metálica para fabricar una cierta longitud del prisma que forma el conducto.

- a) Halla la relación entre las áreas laterales del prisma y del cilindro. ¿Depende de la altura?
- b) Calcula la superficie de material aislante que deberá adquirir la empresa para recubrir la pieza metálica construida.

a) El lado de la base del prisma mide  $r$ .

Para una longitud  $h$  del conducto:

Área lateral del prisma hexagonal:  $A_{l_1} = 6 \cdot r \cdot h$

Área lateral del cilindro:  $A_{l_2} = 2\pi r \cdot h$

Relación entre las áreas laterales:  $\frac{A_{l_1}}{A_{l_2}} = \frac{6 \cdot r \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h} = \frac{3}{\pi}$ , que no depende de  $h$ .

b)  $\frac{3}{\pi} = \frac{10}{S} \Rightarrow S = 10,47 \text{ m}^2$  de material aislante.

7.A1 Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 5 y 8 centímetros.

a) Calcula la altura sobre la hipotenusa.

b) Resuelve el triángulo.

$$a) h^2 = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow h = 6,32 \text{ cm}$$

$$a = 5 + 8 = 13 \text{ cm}$$

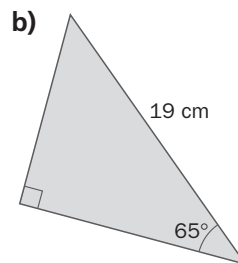
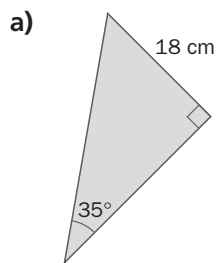
$$b^2 = 5 \cdot 13 = 65 \Rightarrow b = 8,06 \text{ cm}$$

$$c^2 = 8 \cdot 13 = 104 \Rightarrow c = 10,20 \text{ cm}$$

$$b) \text{sen } \widehat{B} = \frac{8,06}{13} = 0,62 \Rightarrow \widehat{B} = \text{arcsen } 0,62 = 38,32^\circ$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - 38,32^\circ = 51,68^\circ$$

7.A2 Calcula la medida de los lados y de los ángulos desconocidos.



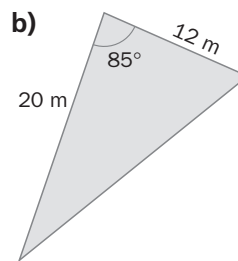
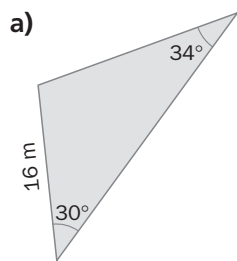
$$a) \widehat{B} = 55^\circ \quad \text{sen } 35^\circ = \frac{18}{a} \Rightarrow a = \frac{18}{\text{sen } 35^\circ} = 31,38 \text{ cm}$$

$$\text{tg } 35^\circ = \frac{18}{b} \Rightarrow b = \frac{18}{\text{tg } 35^\circ} = 25,71 \text{ cm}$$

$$b) \widehat{B} = 25^\circ \quad \text{sen } 65^\circ = \frac{a}{19} \Rightarrow a = 19 \cdot \text{sen } 65^\circ = 17,22 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 65^\circ = \frac{b}{19} \Rightarrow b = 19 \cdot \text{cos } 65^\circ = 8,03 \text{ cm}$$

7.A3 Resuelve los siguientes triángulos.



$$a) \widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 34^\circ = 116^\circ$$

$$\frac{16}{\text{sen } 34^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 30^\circ} \Rightarrow b = \frac{16 \cdot \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 34^\circ} \Rightarrow b = 14,31 \text{ m}$$

$$\frac{16}{\text{sen } 34^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 116^\circ} \Rightarrow a = \frac{16 \cdot \text{sen } 116^\circ}{\text{sen } 34^\circ} \Rightarrow a = 25,72 \text{ m}$$

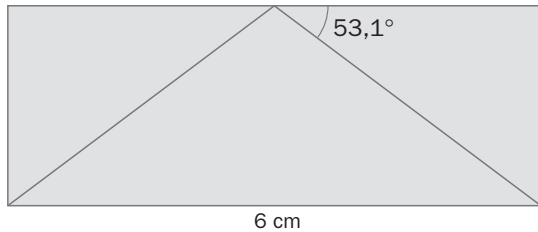
$$b) a^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \text{cos } 85^\circ = 502,16 \Rightarrow a = 22,41 \text{ m}$$

$$\frac{20}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{22,41}{\text{sen } 85^\circ} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{20 \cdot \text{sen } 85^\circ}{22,41} \Rightarrow \widehat{B} = 62,76^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 85^\circ - 62,76^\circ = 32,24^\circ$$



- 7.A4 En un rectángulo se han unido los vértices de la base con el punto medio del lado opuesto formando tres triángulos.



Calcula el perímetro y el área del rectángulo y del triángulo sombreado.

El lado contiguo a  $53,13^\circ$  es la mitad de la base del rectángulo, 3 cm.

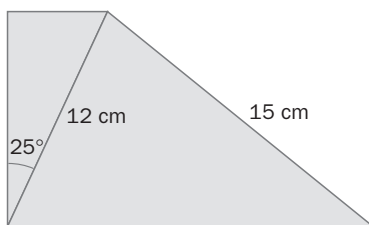
La altura:  $a = 3 \cdot \operatorname{tg} 53,13 = 4$  cm.

$$p_{\text{rectángulo}} = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 20 \text{ cm}$$

$$A_{\text{rectángulo}} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = 24 : 2 = 12 \text{ cm}^2$$

- 7.A5 Halla la medida de los lados desconocidos de este trapecio rectángulo.



$$h = 5 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ = 2,33 \text{ cm}$$

En el triángulo de la derecha, el ángulo inferior izquierdo es:  $\widehat{A} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ .

$$\text{Por el teorema del seno, } \frac{15}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{12}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \Rightarrow \widehat{B} = 46,47^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 46,47^\circ = 68,53^\circ$$

$$\frac{15}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68,53^\circ} \Rightarrow c = 15,4 \text{ cm}$$

- 7.A6 La generatriz de un cono mide 26 centímetros y forma un ángulo de  $67,38^\circ$  con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cono.

El radio,  $r = 26 \cdot \cos 67,38^\circ = 10$  cm

Altura,  $h = 26 \cdot \operatorname{sen} 67,38^\circ = 24$  cm

$$A_l = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 816,81 \text{ cm}^2$$

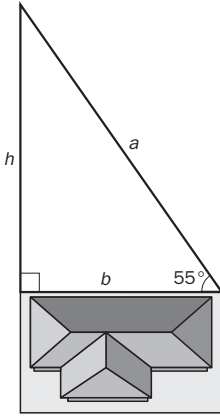
$$A_T = \pi \cdot 10^2 + 816,81 = 1130,97 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 24}{3} = 2512 \text{ cm}^3$$

MATETIEMPOS

La parcela de mi abuelo

Mi padre ha heredado una parcela triangular de 400 metros cuadrados. Uno de sus lados está limitado por la casa de un vecino y los otros dos forman con ella ángulos de  $55^\circ$  y  $90^\circ$  de amplitud, respectivamente. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?



El terreno forma un triángulo rectángulo. Si llamo  $b$  a uno de los catetos y  $h$  al otro me queda el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b \cdot h}{2} = 400 \\ \operatorname{tg} 55^\circ = \frac{h}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = \frac{800}{b} \\ \operatorname{tg} 55^\circ = \frac{800}{b} \end{array} \right\} \operatorname{tg} 55^\circ = \frac{800}{b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{800}{\operatorname{tg} 55^\circ} \Rightarrow b^2 = 560,17 \Rightarrow \begin{cases} b = 23,67 \text{ m} \\ h = 33,8 \text{ m} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{23,67^2 + 33,8^2} = 41,26 \text{ m}$$