3 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Algunos hitos en la resolución de ecuaciones...

El pionero: **Diofanto** (siglo III) propuso problemas algebraicos complejos y los resolvió por métodos originales y muy interesantes. Pero su aportación careció de método y tuvo poco valor pedagógico.

La sistematización: **Al-Jwarizmi** (siglo IX) fue quien, por primera vez, realizó un tratamiento sistemático y completo de la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala,* elemental, didáctico y exhaustivo, fue muy conocido y estudiado y, posteriormente, traducido a todos los idiomas.

Los italianos del siglo XVI: En el siglo XVI, varios algebristas italianos (**Tartaglia**, **Cardano**…) mantuvieron unas interesantísimas, agitadas y fecundas discusiones sobre la resolución de distintos tipos de ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Toda esta actividad sirvió para dar un gran impulso a la resolución de ecuaciones de grado superior.

Al-Jwarizmi se educó y trabajó en la Casa de la Sabiduría de Bagdag, un centro de investigación comparable con la Biblioteca de Alejandría.

Girolamo Cardano (1501-1576). Su libro "Ars Magna" contiene la primera solución publicada para las ecuaciones de tercer grado, basada en las investigaciones de Tartaglia y Scipione del Ferro.

...y en los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones se plantearon y resolvieron de forma simultánea a las ecuaciones, ya que el paso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita no supone ningún problema especial.

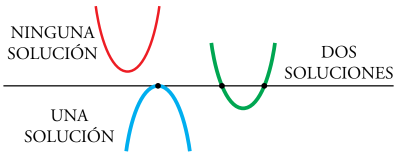
Históricamente, los sistemas de ecuaciones lineales no han sido un reto especialmente difícil. Ya en el siglo II a. C., los chinos resolvían sistemas lineales de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas, mediante un método elegante y potente, similar al que se usa en la actualidad.

La antigua matemática china destacó por su carácter práctico, obteniendo métodos excelentes tanto en aritmética como en álgebra.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

1 Ecuaciones



En la web

- Cómo se obtiene la fórmula para resolver la ecuación de 2.º grado.
- Ecuaciones de 2.º grado y problemas para reforzar sus mecanismos de resolución.

Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

- **Ecuaciones completas.** Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} \text{si } b^2 - 4ac > 0, & \text{hay dos soluciones.} \\ \text{si } b^2 - 4ac = 0, & \text{hay una solución.} \\ \text{si } b^2 - 4ac < 0, & \text{no hay ninguna solución.} \end{cases}$$

- **Ecuaciones incompletas.** Si $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación se llama incompleta y se puede resolver con mucha sencillez sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

$$b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:***

a) $5x^2 - 45 = 0$

b) $5x^2 + 45 = 0$

c) $3x^2 - 21x = 0$

a) $5x^2 - 45 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{45}{5} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $5x^2 + 45 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{45}{5} = -9$ No tiene solución.

c) $3x^2 - 21x = 0 \rightarrow x(3x - 21) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 21 = 0 \rightarrow x = 7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 7$

2. ***Resolver las siguientes ecuaciones completas:***

a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

a) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -3$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$

Solución única: $x = -\frac{1}{3}$

c) $5x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ Sin solución.

En la web Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Piensa y practica

1. Resuelve:

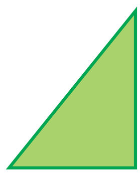
a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $3x^2 + 5 = 0$ c) $7x^2 + 5x = 0$

2. Resuelve: a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$

b) $x^2 - 20x + 100 = 0$ c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

3. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño.

¿Cuánto miden los lados?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
$$x^2 = z$$
$$x^4 = z^2$$
$$az^2 + bz + c = 0$$
$$x = \pm\sqrt{z}$$

Ecuaciones bicuadradas: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Son ecuaciones de 4.° grado sin términos de grado impar. Para resolverlas, realizamos el cambio de variable $x^2 = z$ y, por tanto, $x^4 = z^2$. Se obtiene así una ecuación de segundo grado cuya incógnita es z:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Una vez resuelta, se obtienen los correspondientes valores de x. Por cada valor positivo de z habrá dos valores de x, pues $x^2 = z \rightarrow x = \pm\sqrt{z}$.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ z = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones bicuadradas.

Ecuaciones con la x en el denominador

Los denominadores algebraicos, al igual que los numéricos, se suprimen multiplicando por el producto de todos ellos o, mejor, por su mínimo común múltiplo. La ecuación a la que así se llega puede ser de las que sabemos resolver.

En el proceso de multiplicar por expresiones polinómicas pueden aparecer soluciones falsas. Por tanto, siempre que lo hagamos, **deberemos comprobar todas las soluciones obtenidas.**

No lo olvides

En ecuaciones, para suprimir denominadores, se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de dichos denominadores.

Recuerda que, al terminar, has de comprobar todas las soluciones.

Ejercicio resuelto

Resolver $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{3}{10}$.

Multiplicamos los dos miembros por $10x(x + 3)$.

$$10(x + 3) - 10x = 3x(x + 3) \rightarrow 10x + 30 - 10x = 3x^2 + 9x \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 + 9x - 30 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -5$. Comprobadas en la ecuación inicial, constatamos que ambas son válidas:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10} \qquad \frac{1}{-5} - \frac{1}{-2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones con x en el denominador.

Piensa y practica

4. Resuelve.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$ b) $3x^4 + 75x^2 = 0$

c) $7x^4 - 112 = 0$ d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

e) $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$ f) $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$

5. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$ b) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{x+1}{x+5} + \dfrac{1-x}{x-4} = \dfrac{5}{2}$

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

No lo olvides

Es imprescindible comprobar todas las posibles soluciones.

En la web

Refuerza la resolución de ecuaciones con radicales.

Ecuaciones con radicales

Ocasionalmente, nos encontraremos con ecuaciones en las que la x se halla bajo una raíz cuadrada. Para resolver este tipo de ecuaciones, suele convenir eliminar la raíz aislándola primero en un miembro y, después, elevando ambos miembros al cuadrado. Pero, ¡atención!, en este proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones, pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar. Por eso, en este tipo de ecuaciones **es fundamental comprobar todas las soluciones.**

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación.

$$\sqrt{x^2+7}+2=2x$$

$\sqrt{x^2+7}+2=2x \rightarrow \sqrt{x^2+7}=2x-2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2+7=4x^2-8x+4 \rightarrow 3x^2-8x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\dfrac{8\pm 10}{6}$

Hay dos posibles soluciones: $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$. Las comprobamos:

- $\sqrt{3^2+7}+2=\sqrt{16}+2=6$; $2\cdot 3=6$. La primera, $x_1=3$, sí es solución.
- $\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+7}+2=\sqrt{\dfrac{64}{9}}+2=\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{14}{3}\\ 2\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right\}$ La segunda, $-\dfrac{1}{3}$, no es solución.

Por tanto, la solución es $x=3$.

Ecuaciones del tipo (...) · (...) · (...) = 0

Para que un producto sea igual a 0, es suficiente que lo sea alguno de sus factores. Por tanto, una ecuación de este tipo se puede resolver fácilmente siempre que cada paréntesis dé lugar a una ecuación que sepamos resolver.

Por ejemplo, $(x-2)\cdot(x^2-36)\cdot(x^2+5x)=0$. Igualamos a cero cada paréntesis:

$$x-2=0 \rightarrow x_1=2$$

$$x^2-36=0 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm 6 \begin{cases} x_2=-6 \\ x_3=6 \end{cases}$$

$$x^2+5x=0 \rightarrow x(x+5)=0 \begin{cases} x_4=0 \\ x+5=0 \rightarrow x_5=-5 \end{cases}$$

En la web

- Refuerza la resolución de ecuaciones mediante factorización.
- Refuerza la resolución de problemas con ecuaciones.

Piensa y practica

6. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x(x+1)(x-5)=0$ b) $(3x+1)(2x-3)=0$

c) $x(x^2-64)=0$ d) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

7. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{x}-3=0$ b) $\sqrt{x}+2=x$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$ d) $\sqrt{x+1}=x-8$

e) $\sqrt{2x^2-2}=1-x$ f) $\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{5x+6}$

8. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $7x^4=63x^2$ b) $x^4-10x^2+9=0$

c) $4x^4-5x^2+1=0$ d) $x^4+5x^2+4=0$

9. Resuelve.

a) $\dfrac{x+7}{x+3}+\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2x}+\dfrac{x-1}{x}=2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Vamos a recordar qué son los sistemas de ecuaciones y cómo se resuelven.

Dos ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Si ambas ecuaciones son lineales, se dice que el sistema es lineal.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolución de un sistema lineal

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene, así, una ecuación con una incógnita. Se resuelve. Su solución se sustituye en la primera ecuación. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\} \to x = 15 - 2y \to 3(15 - 2y) - 5y = 1 \to \dots \to y = 4 \to$$

$$\to x = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

Solución: $x = 7, \; y = 4$

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los resultados. Al igual que en el método anterior, también en este se obtiene una ecuación con una incógnita. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to x = \frac{1+5y}{3} \\ &\to x = 15 - 2y \end{aligned}\Bigg\} \to \frac{1+5y}{3} = 15 - 2y \to y = 4$$

$$x = 15 - 2 \cdot 4 = 7$$

Solución: $x = 7, \; y = 4$

Método de reducción

Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convenga) *para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Al restarlas se obtiene una ecuación sin esa incógnita*. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 76 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{1.^a \cdot 4} 12x + 20y = 304 \\ &\xrightarrow{2.^a \cdot 3} 12x - \;\; 6y = 18 \end{aligned}$$

Restando: $26y = 286 \to y = 11$

$$3x + 5 \cdot 11 = 76 \to x = 7$$

Solución: $x = 7, \; y = 11$

Entrénate

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando los tres métodos que conoces: sustitución, igualación y reducción:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - 3y = -15 \\ x - y = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - y = 1/6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - \frac{2}{2}y = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 6x + 3y = -15 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Ten en cuenta

Los sistemas de ecuaciones no lineales se resuelven de forma esencialmente igual a los sistemas lineales.

Son aquellos en los que una de las dos ecuaciones, o ambas, son no lineales, es decir, tienen monomios de segundo grado (x^2, y^2, $x \cdot y$) o de grado superior, o radicales, o alguna incógnita en el denominador…

Para resolverlos, podemos despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en la otra (método de sustitución) o eliminar una incógnita simplificando entre las dos ecuaciones (método de reducción) o cualquier otro método por el que podamos pasar a una ecuación con una incógnita.

No lo olvides

Si hay raíces o incógnitas en el denominador, al resolver la ecuación puede aparecer alguna solución falsa. Por eso, en tales casos, es necesario comprobar todas las soluciones sobre el sistema inicial.

Ejercicio resuelto

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

a) Aplicamos el método de sustitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 & \rightarrow\ y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 & \rightarrow\ x^2 + (1+x)^2 = 5 \ \rightarrow\ x^2 + 1 + x^2 + 2x = 5 \ \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow\ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \ 8 \ \ x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \rightarrow\ y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 & \rightarrow\ y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$x_2 = -2,\ y_2 = -1$

b) Aplicamos el método de reducción:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

Sumando: $2x^2 \quad = 98 \ \rightarrow\ x^2 = 49 \ \rightarrow\ x = \pm 7$

Si $x = 7 \ \rightarrow\ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow\ y^2 = 9 \ \rightarrow\ y = \pm 3$

Si $x = -7 \ \rightarrow\ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow\ y^2 = 9 \ \rightarrow\ y = \pm 3$

Hay cuatro soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 3$

$x_2 = 7,\ y_2 = -3$

$x_3 = -7,\ y_3 = 3$

$x_4 = -7,\ y_4 = -3$

Piensa y practica

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

4 Inecuaciones de primer grado

A veces, los enunciados que dan lugar a una expresión algebraica no dicen "es igual a", sino "es mayor que" o "es menor que". Estos enunciados dan lugar a expresiones como estas, llamadas **inecuaciones:**

$$2x + 4 > 0 \qquad 10 - 5x \le 15$$

Recuerda

$a < b$ a es menor que b.
$a \le b$ a es menor que b o igual a b.
$a > b$ a es mayor que b.
$a \ge b$ a es mayor que b o igual a b.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica. Tiene dos miembros entre los cuales aparece uno de estos signos: $<$, $\le$, $>$, $\ge$.

Se llama **solución** de una inecuación a cualquier valor de la incógnita que hace cierta la desigualdad. Las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones.

Resolución de una inecuación de primer grado

No lo olvides

$2 < 5 \rightarrow -2 > -5$
$-x > 3 \rightarrow x < -3$
$-2x \ge 1 \rightarrow x \le \frac{-1}{2}$

Para resolver una ecuación, seguíamos una serie de pasos: quitar paréntesis, quitar denominadores, pasar las x a un miembro y los números al otro…

Todos ellos son válidos, exactamente igual, para las inecuaciones, salvo uno:

Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ejercicio resuelto

Resolver estas inecuaciones:

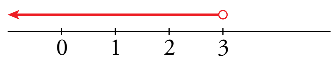
a) $2x + 1 < 7$

b) $7 - 5x \le 12$

a) $2x + 1 < 7 \rightarrow 2x < 6 \rightarrow x < 6 : 2 \rightarrow x < 3$

Solución: x puede ser cualquier número menor que 3.

Conjunto de soluciones: $(-\infty, 3)$

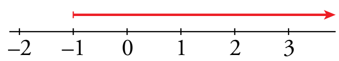


b) $7 - 5x \le 12 \rightarrow -5x \le 12 - 7 \rightarrow -x \le 5 : 5 \rightarrow -x \le 1 \rightarrow x \ge -1$

(Al cambiar de signo, cambia el sentido de la desigualdad).

Solución: x puede ser -1 o cualquier número mayor que él.

Conjunto de soluciones: $[-1, +\infty)$



Piensa y practica

1. Traduce a lenguaje algebraico.

a) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20.

b) El doble del número de personas de mi clase no supera a 70.

2. Di dos soluciones enteras de cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $3x < 50$ b) $2x + 5 \ge 25$

c) $7x + 4 < 19$ d) $x^2 + x < 50$

3. ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la inecuación $x^2 - 8x < 12$?

a) -5 b) 0 c) 1,1 d) 2

e) $\frac{5}{2}$ f) 3,2 g) 5,3 h) 10

4. Resuelve y representa gráficamente las soluciones.

a) $5x < -5$ b) $2x + 3 \ge 7$

c) $104 - 9x \le 4(5x - 3)$ d) $3(4 - x) > 18x + 5$

e) $\frac{x}{4} - x \ge \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$ f) $\frac{4 - 2x}{3} > 2(x - 3)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

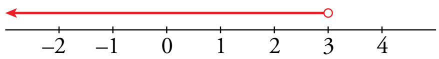
© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Sistemas de inecuaciones

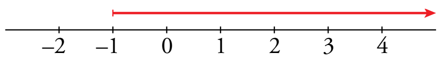
Si deseamos encontrar las soluciones comunes a varias inecuaciones, decimos que estas forman un sistema de inecuaciones.

Por ejemplo:

- Las soluciones de $2x + 1 < 7$ son $x < 3$

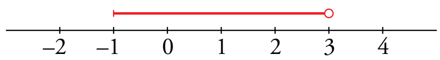


- Las soluciones de $7 - 5x \leq 12$ son $x \geq -1$



Por tanto, las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones:

$\begin{cases} 2x + 1 < 7 \\ 7 - 5x \leq 12 \end{cases}$ son $-1 \leq x < 3$



Observa

Cuando decimos "las soluciones *son* $x < 3$" queremos decir "las soluciones *son* todos los números menores que 3".

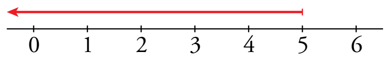
Análogamente, $x \geq -1$ significa "el número -1 y todos los números mayores que él".

Problemas resueltos

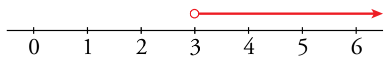
1. ***Resolver este sistema de inecuaciones:***

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

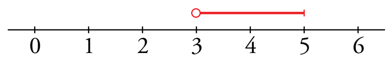
1.ª inecuación: $3x + 2 \leq 17 \rightarrow 3x \leq 15 \rightarrow x \leq 5$



2.ª inecuación: $5 - x < 2 \rightarrow -x < -3 \rightarrow x > 3$



Sistema: *Solución:* $3 < x \leq 5$



La solución del sistema es cualquier número mayor que 3, que no supere al 5.

2. ***La longitud de una mesa es 141 cm. La mido mediante palmos y con 6 me quedo corto. ¿Qué puedo decir de la longitud de mi palmo?***

Llamando x *a la longitud de mi palmo*, el enunciado anterior se expresó algebraicamente así: $6x < 141$. Su solución es $x < 23,5$.

Pero si prestamos más atención, observamos que, aunque no se diga explícitamente, se supone que con 7 palmos se supera la longitud de la mesa.

Es decir, $7x > 141$. La solución de esta inecuación es $x > 20,1$.

De la longitud, x, de un palmo podemos decir que: $\begin{cases} 6x < 141 \\ 7x > 141 \end{cases}$

Su solución es $\begin{cases} x < 23,5 \\ x > 20,1 \end{cases}$. Es decir, $x \in (20,1; 23,5)$.

Conclusión: mi palmo tiene una longitud comprnedida entre 20,1 cm y 23,5 cm.

Piensa y practica

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3 < 7 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3 < 3x + 5 \\ 7x + 1 \geq 13 + 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 7 > 23 \\ 3 - 2x > x - 30 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x - 1 \geq 14 - 8x \\ 5x + 8 > 6x + 5/2 \end{cases}$

6. Tres amigos contratan tres viajes a Praga. Les cuesta algo menos de 2 200 € en total. Cinco amigos contratan el mismo viaje. Por ser cinco, les hacen una bonificación de 500 €, y pagan algo más de 3 000 €.

¿Cuánto vale ese viaje a Praga, si sabemos que es múltiplo de 10 €?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3-x}{2} - \dfrac{2(x-2)}{3} = 4 - \dfrac{7(2x-1)}{9}$

b) $\dfrac{1+12x}{4} + \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\dfrac{3x-2}{6} - \dfrac{4x+1}{10} = \dfrac{-2}{15} - \dfrac{2(x-3)}{4}$

d) $\dfrac{2x-3}{6} - \dfrac{3(x-1)}{4} - \dfrac{2(3-x)}{6} + \dfrac{5}{8} = 0$

2. Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $(3x+1)(3x-1) + \dfrac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$

b) $\dfrac{x^2+2}{3} - \dfrac{x^2+1}{4} = \dfrac{x+5}{12}$

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3} = \dfrac{3x-2}{6} + \dfrac{x^2}{3}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones. Las que sean de 2.º grado incompletas, resuélvelas sin aplicar la fórmula general.

a) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{x-3}{3} = 1 + \dfrac{(x+1)(x-2)}{6}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\dfrac{x(x-2)}{4} - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-4}{3}$

d) $x\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x^2-1}{3} = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

c) $(x+1)^2 = \dfrac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$

d) $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25x}{2} = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)(7x+1) - 4$

5. Resuelve.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(2x^2+1)^2 - 5 = (x^2+2)(x^2-2)$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x-5)(x+7) = 0$

b) $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$

d) $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

7. Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3)(2x-5) = 0$

b) $x^2(x-6)(3x-1) = 0$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9) = 0$

d) $x(x^2+1)(6x-3) = 0$

8. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3x}{2}$

b) $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{3-x}{3x^2}$

d) $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$

9. Resuelve.

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$

d) $\dfrac{2-x}{2} + \dfrac{4}{2+x} = 1$

10. Resuelve.

a) $x - \sqrt{x} = 2$

b) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

c) $x - \sqrt{169-x^2} = 17$

d) $x + \sqrt{5x+10} = 8$

e) $\sqrt{2x^2+7} = \sqrt{5-4x}$

f) $\sqrt{x+2} + 3 = x - 1$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - 3 = \dfrac{2-x}{x}$

b) $\dfrac{3x+1}{4x+3} - \dfrac{1}{x} = 3$

c) $\dfrac{3x+4}{x+3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x+19}{4x+6}$

d) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

12. Resuelve.

a) $x + \sqrt{25-x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x+10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x+1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2+7x-2} = x + 2$

13. Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.

a) $x - 17 = \sqrt{169-x^2}$

b) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

c) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

d) $2\sqrt{5-4x} + 4x = 5$

14. Descompón en factores y resuelve.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

d) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

Ejercicios y problemas

Sistemas de ecuaciones

15. Resuelve.

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x+2) = y + 7 \\ x + 2(y+1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x+y) = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y + 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{-x+7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

16. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

17. Halla las soluciones de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

18. Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

20. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x-y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

21. Halla el conjunto de soluciones de cada inecuación y represéntalo.

a) $3x - 7 < 5$ b) $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$ d) $1 - 5x \leq -8$

e) $6 < 3x - 2$ f) $-4 \geq 1 - 10x$

22. Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases}$

23. Resuelve.

a) $\dfrac{7 - 3x}{2} < x + 1$ b) $\dfrac{x+4}{3} + 3 \geq \dfrac{x+10}{6}$

c) $2x - 2(3x - 5) < x$ d) $x - 1 - \dfrac{x-1}{2} < 0$

Aplica lo aprendido

24. La suma de dos números consecutivos es menor que 27. ¿Cuáles pueden ser esos números si sabemos que son de dos cifras?

25. Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.

26. Una tostada cuesta el doble que un café. Por tres cafés y dos tostadas hemos pagado 9,80 €. ¿Cuánto cuesta el café y cuánto la tostada?

27. En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.

28. Se mezclan 8 *l* de aceite de 4 €/*l* con otro más barato para obtener 20 *l* a 2,50 €/*l*. ¿Cuál es el precio del aceite barato?

29. Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

30. Hoy, la edad de Alberto cuadruplica la de su hija Marta, pero dentro de cinco años solo la triplicará. ¿Cuántos años tiene cada uno?

31. Una persona compra un reproductor de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,50 €. Con el reproductor de música perdió el 10 % de su valor, y con el ordenador, el 15 %. ¿Cuánto le costó cada uno?

32. En un aparcamiento cobran un fijo por entrar y un tanto a la hora. Hoy, por hora y media, he pagado 2,60 € y ayer pagué 3,40 € por dos horas y diez minutos. ¿Cuál es el fijo y cuál es el coste por hora?

33. Andrés tiene dos cuentas en el banco. Si pasara 600 € de la primera a la segunda, esta quedaría con saldo doble. Pero si la transferencia fuera de 300 € en sentido contrario, sería la primera la que tendría el doble. ¿Cuánto hay en cada una?

34. En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Cuál puede ser la media de la base?

35. La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.

36. Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.

37. Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.

38. El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

39. Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?

40. Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.

41. El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y uno de sus catetos mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.

Autoevaluación

1. Resuelve.

a) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

b) $(x+3)(2x-5) = 0$

c) $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{x+1}{8}$

2. Resuelve y representa las soluciones.

a) $\dfrac{2(x-5)}{3} \le 2x - 6$ b) $\begin{cases} 5x - 3 > x + 5 \\ x - 6 \le 0 \end{cases}$

3. Resuelve.

a) $\begin{cases} y + 1 = 6 - x \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{5}{2} \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 34 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$

4. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5,35 €; tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8,60 €. Calcula el precio de un bocadillo y el de un refresco.

5. Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

6. En una empresa alquilan bicicletas a 3 € la hora y motocicletas por 5 € fijos más 2 € por hora. ¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una motocicleta que una bicicleta?

7. Las diagonales de un rombo suman 42 m y su área es 216 m^2. ¿Cuánto mide el perímetro del rombo?

8. En una clase hay 5 chicos más que chicas. Sabemos que en total son algo más de 20 estudiantes, pero no llegan a 25.

¿Cuál puede ser la composición de la clase?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.