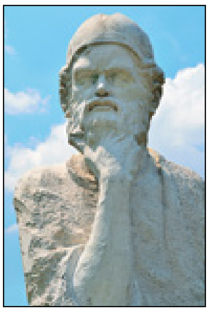
2 Polinomios y fracciones algebraicas

Tres grandes fases en la evolución del lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico actual es sencillo, cómodo y operativo. En el largo camino para llegar a él, cabe considerar tres grandes etapas.

Álgebra primitiva o retórica. En ella, todo se describe con lenguaje ordinario. Babilonios, egipcios y griegos antiguos la practicaban; y también los árabes, quienes, entrado ya el siglo IX, retornaron a ella.



Estatua de Omar Jayyam en Bucarest. Este matemático persa estudió las ecuaciones cúbicas aportando una solución geométrica para algunas de ellas en el siglo XI.

Álgebra sincopada. **Diofanto** (siglo III) fue el pionero, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos.

Durante el Renacimiento (siglos XV y XVI), el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias...

Álgebra simbólica. Consiste en una simbolización completa. **Vieta**, a finales del XVI, mejoró lo que ya había, de modo que su lenguaje algebraico fue predecesor del actual. Y **Descartes,** en el siglo XVII, lo acabó de perfeccionar.

François Vieta (1540-1603). Matemático francés que publicó en 1591 la obra "In Artem Analyticam Isagoge", donde introdujo el uso habitual de letras en fórmulas matemáticas.

El álgebra geométrica

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener o demostrar relaciones algebraicas. Muchos de ellos (griegos, árabes, …) se valieron, para ello, de figuras geométricas, dando lugar al *álgebra geométrica*.

Detalle de La Escuela de Atenas, de Rafael, donde destaca la imagen de Hipatia de Alejandría. Considerada la primera científica de la historia, comentó extensamente los trabajos algebraicos de Diofanto en el siglo IV.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Operaciones con polinomios

Recuerda

- Para sumar dos polinomios, se reducen los términos semejantes.
- Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Suma y resta de polinomios

Observa cómo sumamos y restamos los polinomios $A = x^4 - 7x^3 + 4x + 5$ y $B = 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1$:

$$\begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ +\,B \rightarrow & 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 \\ \hline A + B \rightarrow & x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} A \rightarrow & x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 4x + 5 \\ -\,B \rightarrow & -\,2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 \\ \hline A - B \rightarrow & x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4 \end{array}$$

También podemos operar directamente, quitando paréntesis y agrupando los términos semejantes:

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) + (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 6x + 5 + 1 = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6$$

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 - 2x^3 + 8x^2 - 6x - 1 =$$
$$= x^4 - 7x^3 - 2x^3 + 8x^2 + 4x - 6x + 5 - 1 = x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

Recuerda

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Producto de un polinomio por un monomio

Multiplicamos el polinomio $M = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ por 3 y por $N = 4x^3$:

$$\begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times\,3 \rightarrow & \times\,3 \\ \hline 3M \rightarrow & 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} M \rightarrow & 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \\ \times\,N \rightarrow & \times\,4x^3 \\ \hline M \cdot N \rightarrow & 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3 \end{array}$$

También podemos multiplicar directamente:

$$3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 3 = 6x^3 - 15x^2 + 12x - 9$$

$$4x^3 \cdot (2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) = 4x^3 \cdot 2x^3 - 4x^3 \cdot 5x^2 + 4x^3 \cdot 4x - 4x^3 \cdot 3 =$$
$$= 8x^6 - 20x^5 + 16x^4 - 12x^3$$

Piensa y practica

1. Quita paréntesis y reduce.

a) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x) + (4x^3 - 9x^2 + 7x - 1)$

b) $(5x^4 - 5x^2 - 3x) - (x^3 + 3x^2 + 6x - 11)$

c) $(7x^2 - 9x + 1) - (x^3 - 5x^2 - 4) + (x^3 - 4x^2)$

2. Efectúa.

a) $2 \cdot (3x^2 - 4x)$ b) $-5 \cdot (x^3 - 3x)$

c) $x \cdot (-2x + 3)$ d) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

3. Sean $P = x^5 - 3x^4 + 5x + 9$, $Q = 5x^2 + 3x - 11$.

Halla: a) $P + Q$ b) $P - Q$ c) $2P - 3Q$

4. Halla los productos siguientes:

a) $3x \cdot (2x + y + 1)$ b) $3a \cdot (a^2 + 2a^4)$

c) $ab^2 \cdot (a - b)$ d) $-5x^3 \cdot (3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y \cdot (2x - y + 2)$ f) $7x^2y \cdot (3x + y)$

g) $5x^3y^3 \cdot (x^2 + x - 1)$ h) $3a^2b^3 \cdot (3a - b + 1)$

5. Calcula el polinomio P en cada caso.

a) $2 \cdot P = 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$

b) $x \cdot P = x^3 - 3x^2 - 5x$

c) $4x^2 \cdot P = -12x^5 + 4x^3 - 8x^2$

d) $2xy^2 \cdot P = 2x^2y^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Producto de polinomios

Recuerda

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro, y se suman los monomios semejantes obtenidos.

Vamos a multiplicar los polinomios $P = x^3 - 4x - 5$ y $Q = 2x^2 + x - 3$.

(Observa que cuando falta algún término, se incluye un monomio de coeficiente 0 en el lugar correspondiente).

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & x^3 + & 0x^2 - & 4x - & 5 & \leftarrow P \\
 & & \times & 2x^2 + & x - & 3 & \leftarrow Q \\
\hline
 & & -3x^3 + & 0x^2 + & 12x + & 15 & \leftarrow \text{Producto por } -3 \\
 & x^4 - & 0x^3 - & 4x^2 - & 5x & & \leftarrow \text{Producto por } x \\
2x^5 + & 0x^4 - & 8x^3 - & 10x^2 & & & \leftarrow \text{Producto por } 2x^2 \\
\hline
2x^5 + & x^4 - & 11x^3 - & 14x^2 + & 7x + & 15 & \leftarrow P \cdot Q
\end{array}$$

Cuando se multiplican polinomios de pocos términos, se suele operar directamente:

$$(5x^2 - 2) \cdot (2x - 3) = 10x^3 - 15x^2 - 4x + 6$$

División de polinomios

Nomenclatura

Si un polinomio P depende de la variable x, se le suele designar $P(x)$.

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales. Veamos cómo se procede en la práctica dividiendo dos polinomios concretos:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 \qquad Q(x) = 2x + 3 \qquad P(x) : Q(x)$$

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & 2x^3 - & 7x^2 & -11x + & 13 & 2x + 3 \\
\cline{6-6}
\text{Restamos } x^2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & -2x^3 - & 3x^2 & & & x^2 - 5x + 2 \\
\cline{2-3}
 & & -10x^2 & -11x & +13 & \\
\text{Restamos } -5x \cdot (2x + 3) \longrightarrow & & 10x^2 & +15x & & (2x^3) : (2x) = x^2 \\
\cline{3-5}
 & & & 4x & +13 & (-10x^2) : (2x) = -5x \\
\text{Restamos } 2 \cdot (2x + 3) \longrightarrow & & & -4x & -6 & (4x) : (2x) = 2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 7 &
\end{array}$$

DIVIDENDO = DIVISOR · COCIENTE + RESTO

Por tanto: $2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 = (2x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 2) + 7$

Piensa y practica

6. Dados los polinomios $P = 5x^2 - 3$, $Q = x^2 - 4x + 1$, $R = -5x + 2$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $Q \cdot R$ c) $P \cdot Q$

7. Opera y simplifica:

a) $3x^2(2x^3 - 1) + 6(4x^2 - 3)$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) - x^2(2x^3 + 5x^2)$

c) $(x - 3)(2x + 5) - 4(x^3 + 7x)$

8. Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:

$P(x) = Q(x) \cdot$ COCIENTE + RESTO

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5$ $Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$ $Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4$ $Q(x) = 5x - 2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 División de un polinomio por $(x - a)$

La regla de Ruffini

Vas a aprender ahora un sencillo procedimiento para realizar con rapidez las divisiones de polinomios cuyos divisores son del tipo $(x - a)$.

Veámoslo con un ejemplo: $(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

La división que conoces sería así:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ 0x^2 & +\ 11x & -\ 2 & x-3 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +\ 6x^3 & & & & 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \\
\cline{1-2}
 & -\ x^3 & +\ 0x^2 & & & \\
 & +\ x^3 & -\ 3x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -\ 3x^2 & +\ 11x & & \\
 & & +\ 3x^2 & -\ 9x & & \\
\cline{3-4}
 & & & +\ 2x & -\ 2 & \\
 & & & -\ 2x & +\ 6 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 4 &
\end{array}
$$

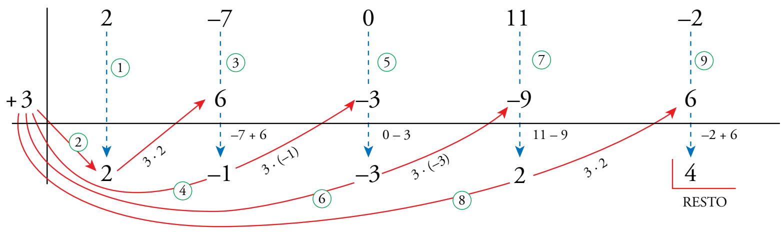
Esa misma división se puede realizar, sintéticamente, del siguiente modo:

$(2x^4 - 7x^3 + 11x - 2) : (x - 3)$

	2	–7	0	11	–2
3		6	–3	–9	6
	2	–1	–3	2	4

Resto

Cociente: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$



COCIENTE: 2 –1 –3 2 $\rightarrow$ significa: $2x^3 - x^2 - 3x + 2$

RESTO: 4

Los pasos numerados en verde son los que se dan en la división de arriba.

Este método, en el que solo intervienen los coeficientes y solo se realizan las operaciones que realmente importan, se llama **regla de Ruffini** en honor al matemático italiano que lo divulgó.

Ejercicio resuelto

Obtener el cociente y el resto en estas divisiones de polinomios:

a) $(4x^3 - 9x^2 + 6x + 5) : (x - 2)$

b) $(5x^4 - 2x^2 - 5) : (x + 1)$

a)

	4	–9	6	5
2		8	–2	8
	4	–1	4	13

$C(x) = 4x^2 - x + 4$

$R = 13$

b)

	5	0	–2	0	–5
–1		–5	5	–3	3
	5	–5	3	–3	–2

$C(x) = 5x^3 - 5x^2 + 3x - 3$

$R = -2$

Piensa y practica

1. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^3 - 7x^2 + 9x - 3) : (x - 5)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 4) : (x + 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$

d) $(4x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

e) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

22

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Valor de un polinomio, $P(x)$, para $x = a$

Volviendo al polinomio que aparece como dividendo en el ejemplo de la página anterior, $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 11x - 2$, observa que el valor que toma para $x = 3$ coincide con el resto de su división entre $(x - 3)$:

$P(3) = 2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 11 \cdot 3 - 2 = 162 - 189 + 33 - 2 = 4$

Resto de la división $P(x) : (x - 3) \rightarrow 4$

La coincidencia de esos valores no es casual, y su justificación es sencilla. Atendiendo a las relaciones entre los términos de la división, $D = d \cdot C + R$, vemos que:

$$P(x) = (x-3) \cdot C(x) + \underbrace{4}_{\text{RESTO}}$$

$$P(3) = \underbrace{(3-3)}_{0} \cdot C(3) + 4 = 4$$

Y lo dicho para el ejemplo se puede generalizar para cualquier división de un polinomio entre $(x - a)$, como puedes ver a la izquierda.

Ten en cuenta

La notación $P(a)$ significa: valor del polinomio P para $x = a$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \ldots & C(x) \\ R & \end{array}$$

$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$

$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R =$

$= 0 \cdot C(a) + R = R$

> El valor de un polinomio para $x = a$ coincide con el resto que se obtiene al dividirlo entre $(x - a)$.

Según estos resultados, podemos calcular el valor de un polinomio para $x = a$ con ayuda de la regla de Ruffini: lo dividimos entre $(x - a)$ y tomamos el resto de la división.

Ejercicio resuelto

Calcular el valor del polinomio $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 6x + 2$ para los valores siguientes:

a) $x = 2$

b) $x = -5$

a) Dividimos $Q(x) : (x - 2)$ y tomamos el resto:

	1	7	6	–6	2
2		2	18	48	84
	1	9	24	42	86

$Q(2) = 86$

b) Dividimos $Q(x) : (x + 5)$ y tomamos el resto:

	1	7	6	–6	2
–5		–5	–10	20	–70
	1	2	–4	14	–68

$Q(-5) = -68$

En la web Regla de Ruffini: ejemplos y ejercicios.

Piensa y practica

2. Sea el polinomio $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$.

a) Calcula $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8$.

b) Divide, con la regla de Ruffini, $M(x) : (x - 4)$.

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resto de la división que has realizado en b).

3. El valor de un polinomio, $A(x)$, para $x = 7$ es 54. ¿Qué puedes decir de la división $A(x) : (x - 7)$?

4. Del polinomio $H(x)$ sabemos:

$H(5) = 18 \qquad H(-5) = 13$

a) ¿Cuál es el resto de la división $H(x) : (x - 5)$?

b) ¿Y el de la división $H(x) : (x + 5)$?

5. Considera los polinomios siguientes:

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$

Calcula, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(3)$ b) $P(-1)$ c) $Q(3)$ d) $Q(-1)$

6. Calcula, con ayuda de la regla de Ruffini, el valor del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ para:

a) $x = -2$ b) $x = -3$ c) $x = 5$

7. De un polinomio $P(x)$, sabemos que se anula para el valor $x = 8$, es decir, $P(8) = 0$.

¿Qué puedes decir de la división $P(x) : (x - 8)$?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Factorización de polinomios

Raíces de un polinomio

Un número, a, se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Para localizar las raíces enteras de un polinomio, probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.

Una vez localizada una raíz, a, puesto que $P(x)$ es divisible por $x - a$, podremos ponerlo así: $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$. Las restantes raíces las buscaremos en $P_1(x)$.

Precedimiento para factorizar un polinomio

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Veamos, prácticamente, cómo factorizar $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$:

- Para localizar las raíces de $P(x)$, iremos probando con los divisores (positivos y negativos) de 2. Empecemos por 1 y por –1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -4 & -9 & 1 & 2\\ 1 & & 4 & 0 & -9 & -8\\ \hline & 4 & 0 & -9 & -8 & \boxed{-6}\end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -4 & -9 & 1 & 2\\ -1 & & -4 & 8 & 1 & -2\\ \hline & 4 & -8 & -1 & 2 & \boxed{0}\end{array}$$

1 no es raíz. –1 sí es raíz.

Escribimos $P(x)$ factorizado: $P(x) = (x + 1)(4x^3 - 8x^2 - x + 2)$

- Ahora buscamos las raíces de $P_1(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$:

  1 ha quedado descartado. Probamos de nuevo con –1 y resulta que no lo es (es decir, –1 es una *raíz simple*). A continuación, probamos con 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & -1 & 2\\ 2 & & 8 & 0 & -2\\ \hline & 4 & 0 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

2 sí es raíz de $P_1(x)$ [y, por tanto, de $P(x)$]

$P_1(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)$

- Cuando queda un polinomio cuyas raíces se pueden localizar por otros medios, al hacerlo se concluye el proceso. En nuestro caso, reconocemos que $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Por tanto, el resultado final es:

  $P(x) = (x + 1)(x - 2)(2x + 1)(2x - 1) = 4(x + 1)(x - 2)(x + 1/2)(x - 1/2)$

Hay polinomios para cuya factorización no es necesario aplicar la regla de Ruffini. Por ejemplo, $Q(x) = x^4 - x^3 - 20x^2$.

- Empecemos por extraer x^2 como factor común: $Q(x) = x^2(x^2 - x - 20)$
- Ahora hallamos las raíces de $x^2 - x - 20 = 0$: $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$.

  Por tanto, $Q(x) = x^2(x - 5)(x + 4)$.

Cálculo mental

Di si 0, 1, –1, 2 o –2 son raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^4 - x^3 - 2x^2$

c) $x^3 + x^2 - 25x - 25$

d) $x^5 - 5x^3 + 4x$

Igualdades notables

Las **igualdades notables,** así como la extracción de **factor común,** son procedimientos sencillos que ayudan en la factorización de polinomios.

Notas

- Si llegamos a un polinomio de segundo grado sin raíces, dicho polinomio queda como un único factor (no se puede descomponer en dos).
- Si un polinomio tiene más de dos raíces no enteras, entonces, aunque pueda factorizarse, nosotros no sabremos hacerlo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***Factorizar y decir cuáles son las raíces.***

$P(x) = 12x^5 - 36x^4 + 27x^3$

Todos los sumandos tienen el factor x^3. Los coeficientes 12, –36 y 27 son múltiplos de 3. Por tanto, podemos sacar $3x^3$ como factor común.

$$P(x) = 3x^3(4x^2 - 12x + 9)$$

Observamos que $4x^2 - 12x + 9$ es igual a $(2x - 3)^2$.

$$P(x) = 3x^3(2x - 3)^2$$

Obtenemos las raíces igualando a 0 cada factor.

Las raíces de $P(x)$ son 0 (raíz triple) y 3/2 (raíz doble).

2. ***Factorizar.***

$Q(x) = 4x^2 - 8x + 3$

Buscamos las raíces igualando a 0 y resolviendo la ecuación:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2};\ x = \frac{3}{2}$$

Por tanto: $Q(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$, o bien:

$$Q(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)2\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x - 1)(2x - 3)$$

3. ***Factorizar.***

$R(x) = x^3 - x + 6$

Utilizamos la regla de Ruffini para localizar una raíz entre los divisores de 6:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

–2 es una raíz de $R(x)$.

Buscamos raíces de $x^2 - 2x + 3$:

$x^2 - 2x + 3 = 0$ no tiene solución.

Hemos llegado a un polinomio de segundo grado que no tiene raíces.

Entonces: $R(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

Piensa y practica

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $3x^5 - 48x$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^3 - 2x^2 - 15x$

f) $2x^3 - x^2 - x + 2$

2. Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $49 + 14x + x^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2$

3. Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$ b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$ d) $4x^2 - 1$

4. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$ d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$ f) $3x^2 + 30x + 75$

5. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$ b) $x^3 - 4x$

c) $9x^3 + 6x^2 + x$ d) $4x^2 - 25$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Fracciones algebraicas

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios.

Por ejemplo: $\frac{x}{3x^2-5}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{3x+1}{x^2+6x-3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma muy similar a las fracciones numéricas, como veremos a continuación.

Simplificación

Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así otra fracción equivalente.

Por ejemplo: $\frac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)} = \frac{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{x}\cdot x\cdot \cancel{(x+1)}} = \frac{x+1}{2x}$

Reducción a común denominador

Para reducir varias fracciones a común denominador, se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador. Este será múltiplo de todos los denominadores.

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{5}{x-2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}, \quad \frac{5\cdot x}{(x-2)\cdot x}$$

Denominador común: $x\cdot(x-2)$

Observa que en cada fracción se han multiplicado numerador y denominador por el factor apropiado para obtener el denominador común que se desea.

Atención

Para sumar (o restar) fracciones algebraicas con el mismo denominador, se suman los numeradores y se mantiene el denominador común.

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x+1} = \frac{3+x-(x-2)}{x+1} = \frac{5}{x+1}$$

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador común.

Por ejemplo: $\frac{3}{x}+\frac{5}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)}+\frac{5x}{x(x-2)} = \frac{3x-6+5x}{x(x-2)} = \frac{8x-6}{x^2-2x}$

Ejercicio resuelto

a) $\frac{3x+5}{2x+3}-\frac{x-7}{2x+3}$

b) $\frac{5x+4}{x}+\frac{x-2}{2x}$

c) $\frac{3}{x^2}+\frac{x+3}{x}$

d) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

a) $\frac{3x+5}{2x+3}-\frac{x-7}{2x+3} = \frac{3x+5-(x-7)}{2x+3} = \frac{2x+12}{2x+3}$

b) $\frac{5x+4}{x}+\frac{x-2}{2x} = \frac{2(5x+4)}{2x}+\frac{x-2}{2x} = \frac{10x+8+x-2}{2x} = \frac{11x+6}{2x}$

c) $\frac{3}{x^2}+\frac{x+3}{x} = \frac{3}{x^2}+\frac{x(x+3)}{x\cdot x} = \frac{3+x^2+3x}{x^2} = \frac{x^2+3x+3}{x^2}$

d) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot 3x}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)\cdot 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+3x-(2x-2)}{(x+1)(x-1)} =$

$= \frac{3x^2+x+2}{x^2-1}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Producto

El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $\frac{2x}{x-3} \cdot \frac{5x+1}{x^2} = \frac{2x \cdot (5x+1)}{(x-3) \cdot x^2} = \frac{10x^2 + 2x}{x^3 - 3x^2}$

Definición

Se llama **inversa** de una fracción algebraica a la que se obtiene intercambiando numerador y denominador:

La inversa de $\frac{5}{x+2}$ es $\frac{x+2}{5}$.

Cociente

El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (producto cruzado de términos).

Por ejemplo: $\frac{3}{x} : \frac{5}{x+2} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x+2}{5} = \frac{3(x+2)}{5x} = \frac{3x+6}{5x}$

Ejercicio resuelto

a) $\frac{2x-7}{x} \cdot \frac{3}{x+1}$

b) $\frac{5}{x-3} : \frac{x}{x^2+1}$

c) $\frac{3}{x} \cdot \left(\frac{5x+3}{x-1} : \frac{5x+3}{x} \right)$

a) $\frac{2x-7}{x} \cdot \frac{3}{x+1} = \frac{3(2x-7)}{x(x+1)} = \frac{6x-21}{x^2+x}$

b) $\frac{5}{x-3} : \frac{x}{x^2+1} = \frac{5}{x-3} \cdot \frac{x^2+1}{x} = \frac{5(x^2+1)}{(x-3)x} = \frac{5x^2+5}{x^2-3x}$

c) $\frac{3}{x} \cdot \left(\frac{5x+3}{x-1} : \frac{5x+3}{x} \right) = \frac{3}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{5x+3}}{x-1} : \frac{\cancel{x}}{\cancel{5x+3}} = \frac{3}{x-1}$

Piensa y practica

1. Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\frac{15x^2}{5x^2(x-3)}$ b) $\frac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$

c) $\frac{3x^2 - 9x^3}{15x^3 - 3x^4}$ d) $\frac{9(x+1) - 3(x+1)}{2(x+1)}$

e) $\frac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$ f) $\frac{x(3x^3 - x^2)}{(3x-1)x^3}$

2. Opera y simplifica.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} + \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \frac{7x}{x-3} + 3$

d) $\frac{5x^3 + 15x^2}{x+3} - \frac{10x^3 + 15x^2}{5x^2} + 2x$

3. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:

a) $\frac{x^2-1}{x} : (x-1)$ b) $\frac{x(x-2)}{x} : \frac{x^2-4}{x+2}$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x} : \frac{x-1}{x}$ d) $6x^2 \cdot \frac{x-3}{x^3}$

e) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ f) $\frac{2x}{x-1} : \frac{4x^2}{2x-2}$

g) $\frac{x+5}{10} \cdot \frac{5}{(x+5)^2}$ h) $\frac{2x^2}{3x} \cdot \frac{6x}{4x^3}$

i) $\frac{4x-3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{8x-6}$ j) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x-1)}$

4. Opera y simplifica.

a) $\frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x}{2x-3} + \frac{5x}{2x+3} \right)$

b) $\frac{x^2}{5x^2-25} - \frac{1}{5} - \frac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Polinomios. Operaciones

1. Opera y simplifica.

a) $(x-3)(x+3)+(x-4)(x+4)-25$

b) $(x+1)(x-3)+(x-2)(x-3)-(x^2-3x-1)$

c) $2x(x+3)-2(3x+5)+x$

d) $(x+1)^2-3x-3$

e) $(2x+1)^2-1-(x-1)(x+1)$

f) $x(x-3)+(x+4)(x-4)-(2-3x)$

2. Dados los polinomios $P(x)=x^3-5x^2-3$; $Q(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$ y $R(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2$, calcula:

a) $P(x)+Q(x)-R(x)$ b) $2P(x)-3Q(x)$

c) $P(x)\cdot Q(x)$ d) $Q(x)\cdot R(x)$

3. Efectúa y simplifica el resultado.

a) $(2y+x)(2y-x)+(x+y)^2-x(y+3)$

b) $3x(x+y)-(x-y)^2+(3x+y)y$

c) $(2y+x+1)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)$

d) $(x+y)(2x-y)(x+2y)$

4. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

a) $\frac{3x(x+5)}{5}-\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\frac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10}-\frac{(3x^2+2)^2}{15}+\frac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c) $\frac{(x-1)^3}{8}+\frac{3}{4}x(x+2)^2-\frac{x^3}{10}$

5. Expresa como producto de dos binomios.

a) $49x^2-16$ b) $9x^4-y^2$ c) $81x^4-64x^2$

d) $25x^2-3$ e) $2x^2-100$ f) $5x^2-2$

6. Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:

a) $16x^2+(\ldots)-8xy$ b) $(\ldots)+25y^2+60xy$

c) $\frac{9}{16}x^2+4y^2+(\ldots)$ d) $(\ldots)+\frac{y^2}{9}-\frac{4}{3}x^2y$

7. Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.

- $\mathbf{2x^4+12x^3+18x^2=2x^2(x^2+6x+9)=2x^2(x+3)^2}$

a) $20x^3-60x^2+45x$ b) $27x^3-3xy^2$

c) $3x^3+6x^2y+3y^2x$ d) $4x^4-81x^2y^2$

8. Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(7x^2-5x+3):(x^2-2x+1)$

b) $(2x^3-7x^2+5x-3):(x^2-2x)$

c) $(x^3-5x^2+2x+4):(x^2-x+1)$

9. Divide y expresa en cada caso así:

Dividendo = divisor · cociente + resto

a) $(3x^5-2x^3+4x-1):(x^3-2x+1)$

b) $(x^4-5x^3+3x-2):(x^2+1)$

c) $(4x^5+3x^3-2x):(x^2-x+1)$

d) $(x^3-5x^2+3x+1):(x^2-5x+1)$

10. Expresa las siguientes divisiones de la forma $D=d\cdot c+r$.

a) $(6x^3+5x^2-9x):(3x-2)$

b) $(x^4-4x^2+12x-9):(x^2-2x+3)$

c) $(4x^4+2x^3-2x^2+9x+5):(-2x^3+x-5)$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11. Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(5x^3-3x^2+x-2):(x-2)$

b) $(x^4-5x^3+7x+3):(x+1)$

c) $(-x^3+4x):(x-3)$

d) $(x^4-3x^3+5):(x+2)$

12. Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:

a) $P(x)=2x^3-5x^2+7x+3$

b) $P(x)=x^4-3x^2+7$

13. Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3, –3 son raíces de los polinomios siguientes:

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+x-3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

14. Busca el valor que debe tomar en cada polinomio el término independiente, m, para que la división sea exacta:

a) $(6x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x - m) : (x + 1)$

c) $(x^3 - 9x^2 - 10x + m) : (x - 1)$

d) $(2x^4 - 9x^3 - 18x + m) : (x - 5)$

Factorización de polinomios

15. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$ b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$ d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$ f) $16x^4 - 9$

16. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$ b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$ d) $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$ f) $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$ h) $-x^2 + 17x - 72$

17. Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

18. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

19. Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e) $6x^3 + 13x^2 - 4$

f) $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

20. Descompón en factores y simplifica.

a) $\dfrac{x^2 - 9}{(x+3)^2}$ b) $\dfrac{x+2}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{x^2 + 25 - 10x}{x^2 - 25}$ d) $\dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$

e) $\dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ f) $\dfrac{x^2 y - 3xy^2}{2xy^2}$

21. Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ b) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2}$

c) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$ d) $\dfrac{x^2 - x - 42}{x^2 - 8x + 7}$

22. Reduce a común denominador y opera.

a) $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x} - 1$ d) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{x+1}{3x}$

e) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3}{x}$ f) $\dfrac{x-3}{x+1} - \dfrac{x}{x+3}$

23. Reduce a común denominador y opera.

a) $\dfrac{x-1}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{x}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 2x} - \dfrac{3}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{3x - 3}{x^2 - x - 2} - \dfrac{x}{x-2}$

24. Ejercicio resuelto

Efectúa: $\left(\dfrac{3x}{(x-2)^2} - \dfrac{3}{x-2}\right) : \dfrac{1}{x-2}$

Efectuamos la resta que va entre paréntesis:

$$\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} = \frac{3x - 3(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{6}{(x-2)^2}$$

Dividimos: $\dfrac{6}{(x-2)^2} : \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{6(x-2)}{(x-2)^2}$

Simplificamos: $\dfrac{6}{x-2}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

25. Opera, y simplifica si es posible.

a) $\left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x}{2}$ b) $\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x+2}\right) : \dfrac{x-2}{x}$

c) $\left(1 - \dfrac{2}{2-x}\right) \cdot \dfrac{2-x}{x^2}$ d) $\dfrac{2x}{x+1} : \left(\dfrac{2x}{x+1} - 1\right)$

Aplica lo aprendido

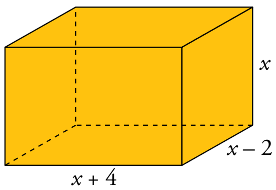
26. Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:

a) 0, 1 y 2 b) –1 y 3 c) 0 y 5

27. Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

28. Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$ sea divisible por $x - 1$ y por $x + 2$.

29. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



30. Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11 %.

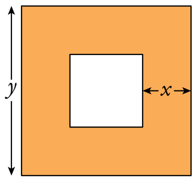
b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16 - x$ y $9 - x$.

c) La superficie de un jardín rectangular de base x metros y perímetro 70 m.

d) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y.

e) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.

31. Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.



32. Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y.

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$ b) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

5. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

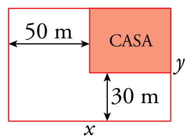
a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x}$ b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

6. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{2x^2}{x-3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$ b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x-2)^2} - \dfrac{x-3}{x-2}$

7. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa x.

8. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.



Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....