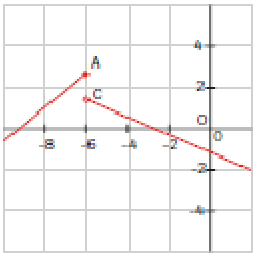
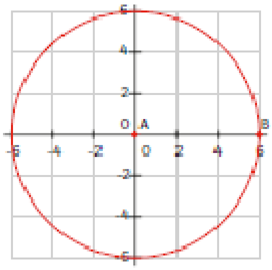
UNIDAD 9: Estudio gráfico de funciones

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 174

1. Dadas las siguientes gráficas, determina si corresponden a la gráfica de una función o no razonando tu respuesta:





En el primer caso, sí se trata de una función ya que para cada valor de la variable horizontal existe un único valor en la vertical.
En el segundo caso, no se trata de una función ya que hay valores de la horizontal para los que existen dos posibles valores en la vertical.

2. ¿La siguiente tabla puede representar a una función? Razona tu respuesta.

x	3	2	1	0	2	2
y	3	6	5	6	4	3

No puede representar a una función ya que, si x fuera la variable independiente, habría dos posibles valores de y para $x=2$. Igualmente, si y fuera la variable independiente, habría dos valores de x para $y=3$.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 175

3. Determina los puntos de corte con los ejes y elabora una tabla con 7 valores para las siguientes funciones:

a) $f(x)=2-3x$

Punto de corte con el eje X: $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 2-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. El punto es $\left(\frac{2}{3},0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $f(0)=2$. El punto es $(0,2)$

Tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	11	8	5	2	-1	-4	-7

b) $g\left(x\right)=-x^2+x+2$

Puntos de corte con el eje X:

$$g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm3}{-2} \Rightarrow x_1=-1 \text{ ó } x_2=2.$$

Los puntos son: $(-1,0)$ y $(2,0)$

Punto de corte con el eje Y: $g(0)=2$. El punto es $(0,2)$

Tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-10	-4	0	2	2	0	-4

c) $h(x)=x^2-5x$

Puntos de corte con el eje X: $h(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x_1=0 \ \acute{o} \ x_2=5$.

Los puntos son: $(0,0)$ y $(5,0)$

Punto de corte con el eje Y: $h(0)=0$. El punto es $(0,0)$

Tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	24	14	6	0	-4	-6	-6

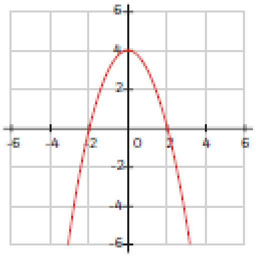
4. Elabora una tabla con las siguientes gráficas con 6 valores.

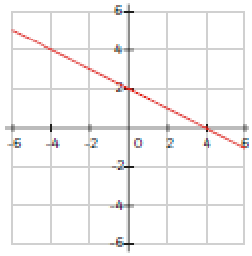
Gráfica 1

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0	1	4	1	0	-5

Gráfica 2

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0	1	4	1	0	-5





EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 176

5. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $f(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R} / x-2\geq 0\}=[2,+\infty)$

c) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R} / x^2-3=0\}=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

d) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x\geq 0\}=(-\infty,0]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x-20} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R} / x^2-x-20=0\}=\mathbb{R}-\{-4,5\}$

f) $f(x)=\sqrt{x^3+x^2} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R} / x^3+x^2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} / x^2(x+1)\geq 0\}=[-1,+\infty)$

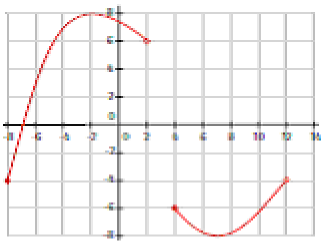
6. Determina el dominio:

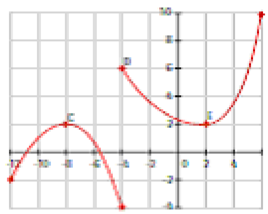
Gráfica 1:

$\text{Dom}(f)=[-8,-2)\cup[4,12)$

Gráfica 2:

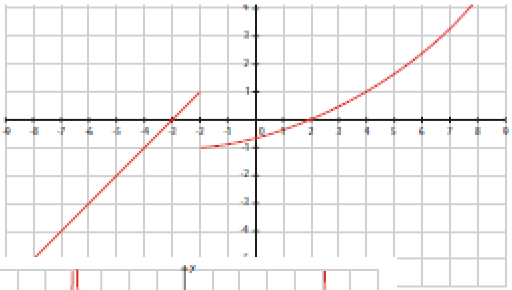
$\text{Dom}(f)=[-12,6]$



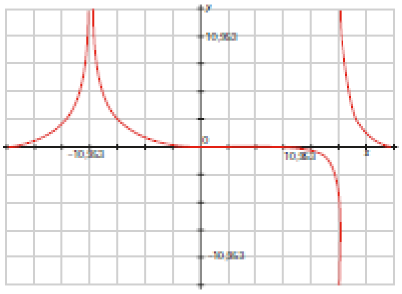


EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 177

7. Clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:



Discontinuidad de salto finito.



Discontinuidades de salto infinito.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 178

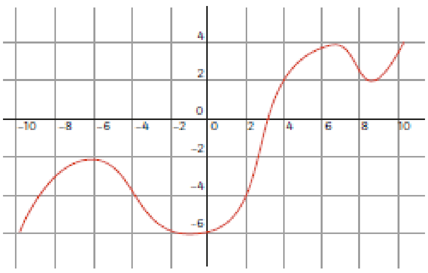
8. Determina la tasa de variación media en el intervalo $[-2,2]$ de las funciones:

a) $f(x)=2x-1 \Rightarrow \mathrm{TVM}(-2,2)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{3-(-5)}{4}=2$

b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow \mathrm{TVM}(-2,2)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{\frac{1}{3}-3}{4}=-\dfrac{\frac{8}{9}}{4}=-\dfrac{2}{9}$

c) $f(x)=x^2-3x \Rightarrow \mathrm{TVM}(-2,2)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{-2-10}{4}=-3$

9. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos:

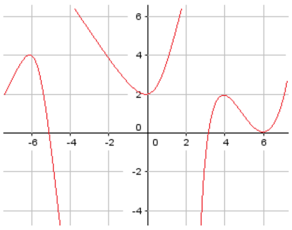


Crecimiento: $(-\infty,-6)\cup(0,7)\cup(8.5,+\infty)$

Decrecimiento: $(-6,0)\cup(7,9.5)$

Máx. relativo: $(-6,-2),(7,4)$

Min. relativo: $(0,-6),(8.5,2)$



Crecimiento: $(-\infty,-6)\cup(0,2)\cup(2,4)\cup(6,+\infty)$

Decrecimiento: $(-6,-4)\cup(-4,0)\cup(4,6)$

Máx. relativo: $(-6,4),(4,2)$

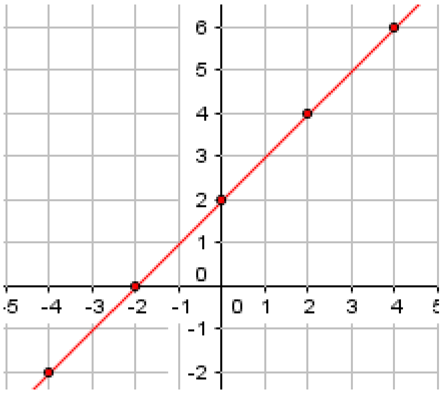
Min. relativo: $(0,2),(6,0)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 179

10. Representa las siguientes funciones lineales:

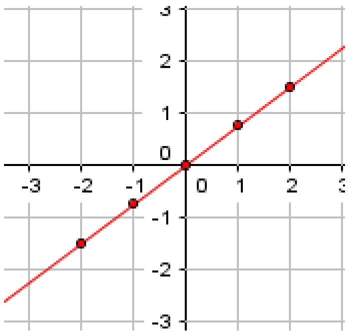
a) $y = x + 2$

x	y
-4	-2
-2	0
0	2
2	4
4	6



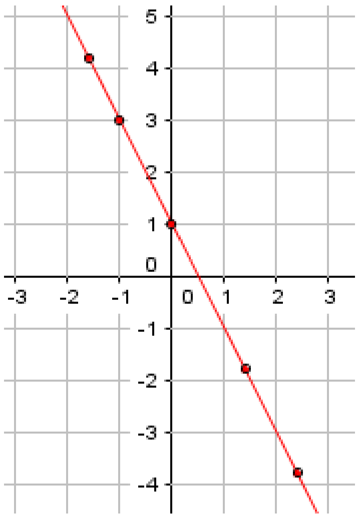
b) $y = \frac{3}{4}x$

x	y
-2	-1,5
-1	-0,75
0	0
1	0,75
2	1,5



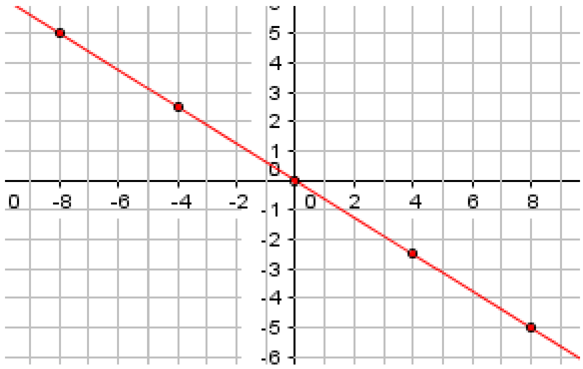
c) $y = 1 - 2x$

x	y
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3



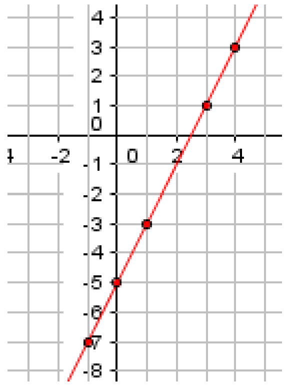
x	y
-8	5
-4	2,5
0	0
4	-2,5
8	-5

d) $y = -\frac{5}{8}x$



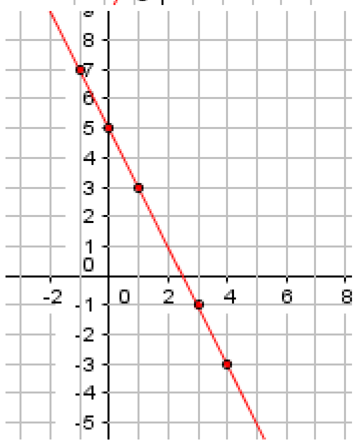
e) $y = 2x - 5$

x	y
-1	-7
0	-5
1	-3
3	1
4	3



f) $y = 5 - 2x$

x	y
-1	7
0	5
1	3
3	-1
4	-3



11. Determina la función lineal que tiene pendiente $m = 3$ y pasa por el punto $(2, -2)$

La ecuación será de la forma: $y = 3x + n$. Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación, tenemos: $-2 = 6 + n \Rightarrow n = -8$.
Por tanto, la función es: $y = 3x - 8$

12. Determina la función lineal que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(1, -1)$

Hallamos en primer lugar la pendiente: $m = \frac{-1-3}{1-(-2)} = -\frac{4}{3}$.

La ecuación será de la forma: $y=-\frac{4}{3}x+n$. Sustituyendo las coordenadas del punto $(1,-1)$ en la ecuación, tenemos: $-1=\frac{4}{3}+n \Rightarrow n=-\frac{7}{3}$.

Por tanto, la función es: $y=-\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 180

13. Representa las siguientes funciones y estúdialas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } -3<x<1 \\ 3 & \text{si } -1\leq x\leq 2 \\ 2-x & \text{si } 2<x<5 \end{cases}$

Estudio de la función:

i. $\text{Dom}(f)=(-3,5)$

ii. $\text{Im}(f)=(-3,0)\cup[3,7)$

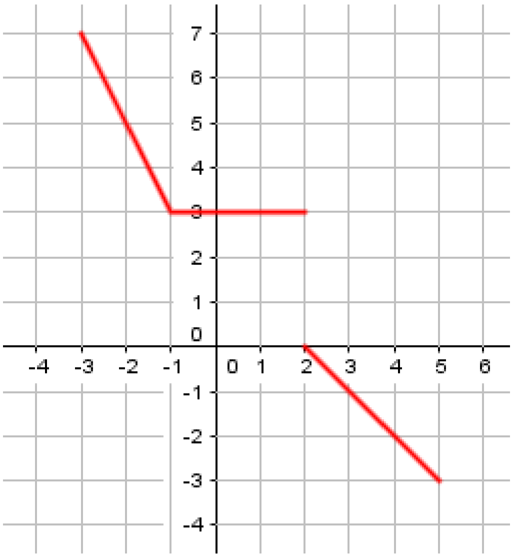
iii. Creciente en $(-1,2)$

iv. Decreciente en $(-3,5)$

v. Continua en $(-3,2)\cup(2,5)$

vi. Discontinuidad de salto finito en $x=2$

vii. No hay máximos ni mínimos, ya que la función no está definida ni en $x=-3$ ni en $x=5$



b) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<-1 \\ x & \text{si } 0\leq x<2 \\ 11-x & \text{si } 2\leq x<5 \\ x+1 & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$

Estudio de la función:

i. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

ii. $\text{Im}(f)=[0,2)\cup(3,+\infty)$

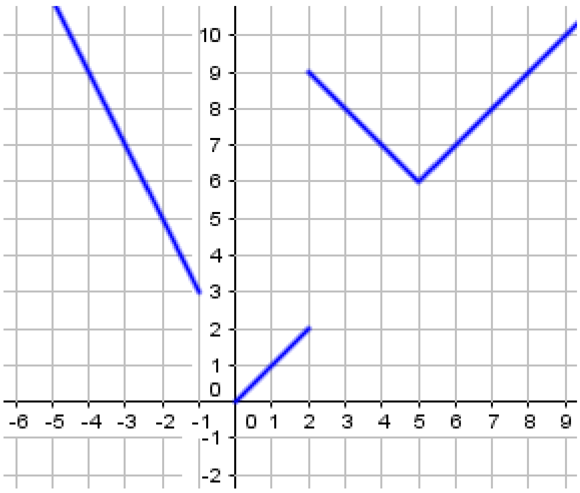
iii. Creciente en $(0,2)\cup(5,+\infty)$

iv. Decreciente en $(-\infty,-1)\cup(2,5)$

v. Continua en $(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

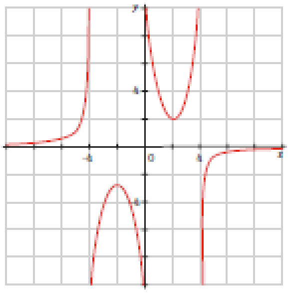
vi. Discontinuidad de salto finito en $x=2$

vii. Máximo local en $(2,9)$ y mínimo local en $(5,6)$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 181

14. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

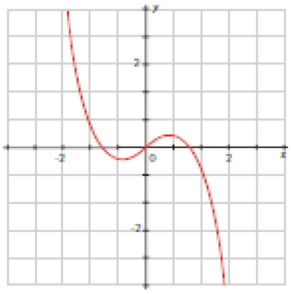


$\rightarrow$ Cóncava en $(-4,0)\cup(4,+\infty)$

Convexa en $(-\infty,-4)\cup(0,4)$

Cóncava en $(0,+\infty)$

Convexa en $(-\infty,0)$ $\leftarrow$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 182

15. Determina si las siguientes funciones son pares o impares:

a) $y=x-5$. No es par ni impar ya que $f(-x)=-x-5$.

b) $y=-x^3+5x$. Como $f(-x)=x^3+5x=-f(x)$ la función es impar.

c) $y=\dfrac{1}{x+1}$. No es par ni impar ya que $f(-x)=\dfrac{1}{-x+1}$

d) $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$. Como $f(-x)=\dfrac{-2x}{x^2-4}=-f(x)$ la función es impar.

e) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$. Como $f(-x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}=f(x)$ la función es par.

f) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3}$. Como $f(-x)=\dfrac{x^2+1}{-x^3}=-f(x)$ la función es impar.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 183

16. Estudia la tendencia de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{-1}{x}$

Tomando valores próximos a 0 pero mayores:

$$f(0{,}1)=\frac{1}{0{,}1}=10;\quad f(0{,}01)=\frac{1}{0{,}01}=100;\quad f(0{,}001)=\frac{1}{0{,}001}=1000$$

y si tomamos valores menores que 0 pero muy próximos:

$$f(-0{,}1)=-\frac{1}{0{,}1}=-10;\quad f(-0{,}01)=-\frac{1}{0{,}01}=-100;\quad f(-0{,}001)=-\frac{1}{0{,}001}=-1000$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=0$. Vemos además que $f(x)\rightarrow+\infty$ cuando $x\rightarrow 0^+$ y $f(x)\rightarrow-\infty$ cuando $x\rightarrow 0^-$.

Dando valores muy grandes a x, tenemos:

$f(100)=\frac{1}{100}=0,01;\quad f(1000)=\frac{1}{1000}=0,001$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to+\infty$.

Igualmente, tomando valores negativos:

$f(-100)=-\frac{1}{100}=-0,01;\quad f(-1000)=-\frac{1}{1000}=-0,001$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to-\infty$.

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha y por la izquierda).

b) $y=\frac{2}{2x+3}$

Tomando valores próximos a $-\frac{3}{2}$ pero mayores:

$$f\left(-\frac{3}{2}+0,01\right)=\frac{2}{0,02}=100;\quad f\left(-\frac{3}{2}+0,001\right)=\frac{2}{0,002}=1000$$

y si tomamos valores menores que 0 pero muy próximos:

$$f\left(-\frac{3}{2}-0,01\right)=-\frac{2}{0,02}=-100;\quad f\left(-\frac{3}{2}-0,001\right)=-\frac{2}{0,002}=-1000$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=-\frac{3}{2}$. Vemos además que $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^{+}$ y $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^{-}$.

Dando valores muy grandes a x, tenemos:

$f(100)=\frac{2}{203};\quad f(1000)=\frac{2}{2003}$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to+\infty$.

Igualmente, tomando valores negativos:

$f(-100)=\frac{2}{-197};\quad f(-1000)=\frac{2}{-1997}$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to-\infty$.

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha y por la izquierda).

c) $y=\frac{-3}{5-x}$

Tomando valores próximos a 5 pero mayores:

$$f(-5+0,01)=\frac{-3}{-0,01}=300;\quad f(-5+0,001)=\frac{-3}{-0,001}=3000$$

y si tomamos valores menores que 5 pero muy próximos:

$$f(-5-0,01)=\frac{-3}{0,01}=-300;\quad f(-5-0,001)=\frac{-3}{0,001}=-3000$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=5$. Vemos además que $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to5^{+}$ y $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to5^{-}$.

Dando valores muy grandes a x, tenemos:

$f(100)=\dfrac{-3}{-95}=\dfrac{3}{95}$; $\quad f(1000)=\dfrac{-3}{-995}=\dfrac{3}{995}$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to+\infty$.

Igualmente, tomando valores negativos:

$f(-100)=\dfrac{-3}{-105}$; $\quad f(-1000)=\dfrac{-3}{-1005}$ los valores de f se hacen muy pequeños, de modo que $f(x)\to 0$ cuando $x\to-\infty$.

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha y por la izquierda).

17. Estudia la tendencia de la función $f(x)=\dfrac{4}{3x-1}$ cuando $x\to\left(\dfrac{1}{3}\right)^-$ y $x\to\left(\dfrac{1}{3}\right)^+$.

Tomando valores próximos a $\dfrac{1}{3}$ pero mayores:

$$f\left(\frac{1}{3}+0,01\right)=\frac{4}{0,02}=200;\quad f\left(\frac{1}{3}+0,001\right)=\frac{4}{0,002}=2000$$

y si tomamos valores menores que 5 pero muy próximos:

$$f\left(\frac{1}{3}-0,01\right)=\frac{4}{-0,02}=-200;\quad f\left(\frac{1}{3}-0,001\right)=\frac{4}{-0,002}=-2000$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=\dfrac{1}{3}$. Vemos además que $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to\left(\dfrac{1}{3}\right)^+$ y $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to\left(\dfrac{1}{3}\right)^-$.

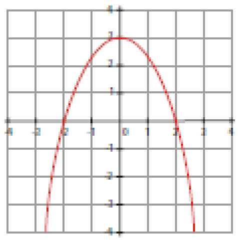
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁG. 186-188

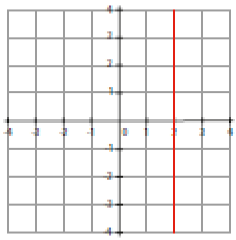
CONCEPTO Y GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1. Determina si las siguientes gráficas corresponden con alguna función y razona tu respuesta:

En el primer caso, sí se trata de una función ya que para cada valor de la variable horizontal existe un único valor en la vertical.

En el segundo caso, no se trata de una función ya que hay valores de la horizontal para los que existen dos posibles valores en la vertical.





2. Calcula la imagen de -2, -1 y 3 de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-x^2+2x+8$

$$f(-2)=-4-4+8=0;\quad f(-1)=-1-2+8=5;\quad f(3)=-9+6+8=5$$

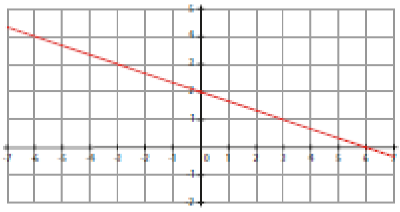
b) $g(x)=\dfrac{1-2x}{2x+3}$

$$g(-2)=\frac{1+4}{-4+3}=-5;\quad g(-1)=\frac{1+2}{-2+3}=3;\quad g(3)=\frac{1-6}{6+3}=-\frac{5}{9}$$

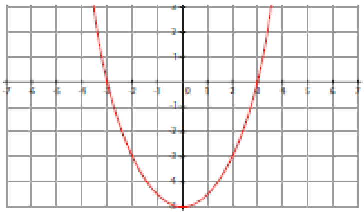
c) $h(x)=\sqrt{2x+9}$

$$h(-2)=\sqrt{-4+9}=\sqrt{5};\quad h(-1)=\sqrt{-2+9}=\sqrt{7};\quad h(3)=\sqrt{6+9}=\sqrt{15};$$

3. Realiza una tabla con al menos 5 puntos de las siguientes gráficas:



x	y
-3	0
-2	-3
0	-5
2	-3
3	0



x	y
-6	4
-3	3
0	2
3	1
6	0

4. Realiza una tabla de valores para las siguientes funciones:

a) $y=1-2x$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3

b) $y=x^2-x+2$

x	-2	-1	0	1	2
y	8	4	2	2	4

c) $y=x^3-8$

x	-2	-1	0	1	2
y	-16	-9	-8	-7	0

d) $y=\frac{-2}{x-3}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2

5. Determina los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y=-5x+8$

Puntos de corte con el eje X: $y=0\Leftrightarrow -5x+8=0\Rightarrow x=\frac{8}{5}$. El punto es: $\left(\frac{8}{5},0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $y=-5\cdot 0+8=8$. El punto es $(0,8)$

b) $y = 2x^2 + 5x - 3$

Puntos de corte con el eje X:

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ ó } x_2 = -3.$$

Los puntos de corte son: $(-3,0)$ y $\left(\frac{1}{2},0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $y = -3$. El punto es $(0,-3)$

c) $y = \dfrac{x+1}{x+3}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

El punto de corte es: $(-1,0)$

Punto de corte con el eje Y: $y = \dfrac{1}{3}$. El punto es $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

d) $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$

Puntos de corte con el eje X: $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

El punto de corte es: $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $y = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. El punto es $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

6. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{2x+1} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $y = \dfrac{-x}{x^2-12} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\right\}$

c) $y = \dfrac{4x-1}{x^2-5x+6} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 = 0\right\} = \mathbb{R} - \{2,3\}$

d) $y = \dfrac{1-x}{x^2-x} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 - x = x(x-1) = 0\right\} = \mathbb{R} - \{0,1\}$

7. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x-12} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = [12,+\infty)$

b) $y = \sqrt{x^2+5x} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x \geq 0\right\} = (-\infty,-5] \cup [0,+\infty)$

c) $y = \sqrt{x^2-9} \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \geq 0\right\} = (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$

d) $y=3x-\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0\}=[-1,+\infty)$

8. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4>0\}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

b) $y=\sqrt{6x^4+x^2-1}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,6x^4+x^2-1\geq 0\}=\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right]\cup\left[\sqrt{\dfrac{1}{3}},+\infty\right)$

c) $y=\sqrt{2x^2-18x}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x(x-9)\geq 0\}=(-\infty,0]\cup[9,+\infty)$

d) $y=\dfrac{1}{x-5\sqrt{x}+6}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0,\ x-5\sqrt{x}+6\neq 0\}$

Resolvemos la ecuación $x-5\sqrt{x}+6=0$ despejando:

$x+6=5\sqrt{x}$

$(x+6)^2=\left(5\sqrt{x}\right)^2$

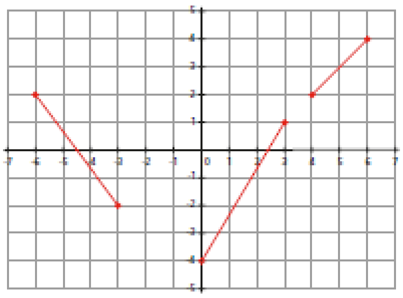
$x^2+12x+36=25x$

$x^2-13x+36=0\quad\Rightarrow x=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\dfrac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}x_1=9\\ x_2=4\end{cases}$

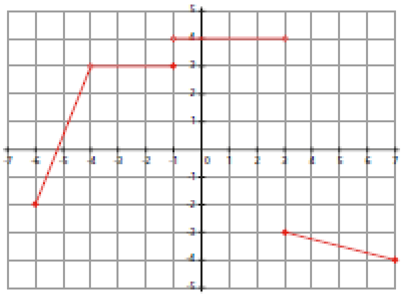
Por tanto, el dominio es: $\mathrm{Dom}(f)=[0,+\infty)-\{4,9\}$

9. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $\mathrm{Dom}(f)=[-6,-3]\cup[0,3]\cup[4,6]$

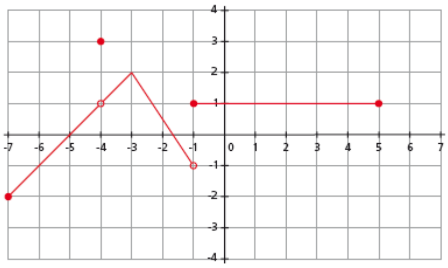


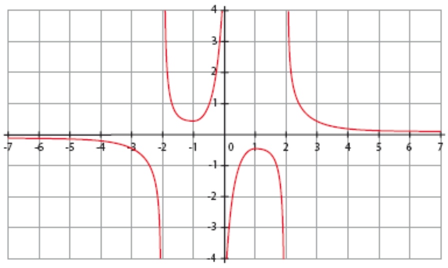
b) $\mathrm{Dom}(f)=[-6,7]$



CONTINUIDAD. DISCONTINUIDADES

10. Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:





a) Discontinuidad evitable en $x=4$.
Discontinuidad de salto finito en $x=-1$.

b) Discontinuidades de salto infinito en $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

TASA DE VARIACIÓN MEDIA. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

11. Determina la tasa de variación media en el intervalo $[-2,1]$ de las siguientes funciones:

a) $y=2-3x \Rightarrow \text{TVM}(-2,1)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-1-8}{3}=-3$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow \text{TVM}(-2,1)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right)}{3}=\dfrac{\frac{9}{10}}{3}=\dfrac{3}{10}$

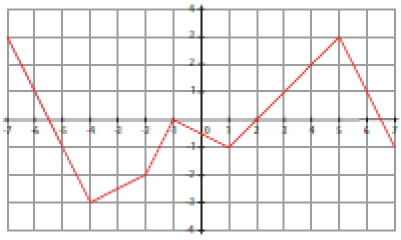
c) $f(x)=\sqrt{x+2} \Rightarrow \text{TVM}(-2,1)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

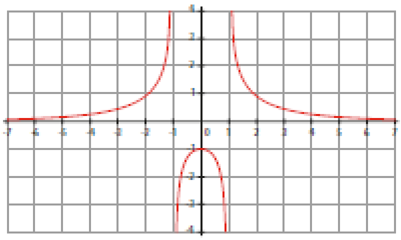
d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow \text{TVM}(-2,1)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{\frac{1}{2}-(-2)}{3}=\dfrac{\frac{5}{2}}{3}=\dfrac{5}{6}$

12. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento en las siguientes funciones:

<u>Crecimiento</u>: $(-4,-1)\cup(1,5)$
<u>Decrecimiento</u>: $(-\infty,-4)\cup(-1,1)\cup(5,+\infty)$

<u>Crecimiento</u>: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
<u>Decrecimiento</u>: $(0,1)\cup(1,+\infty)$





13. Determina los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes gráficas:

<u>Crecimiento</u>: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

<u>Decrecimiento</u>: $(-1,1)$

<u>Máx. local</u>: $(-1,2)$

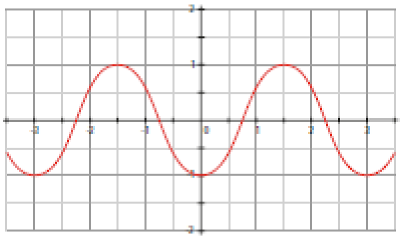
<u>Mín. local</u>: $(1,-2)$

<u>Crecimiento</u>: $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(3n,3n+1,5)$

<u>Decrecimiento</u>: $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(3n-1.5,3n)$

<u>Máx. local</u>: $\{(3n+1.5,1)/\,n\in\mathbb{Z}\}$

<u>Mín. local</u>: $\{(3n,-1)/\,n\in\mathbb{Z}\}$

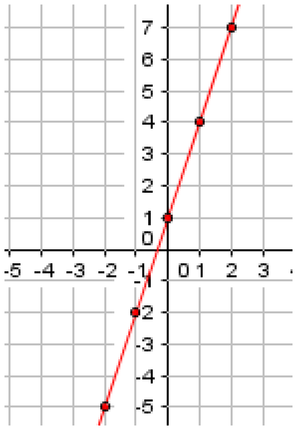


FUNCIONES LINEALES

14. Represента las siguientes funciones lineales:

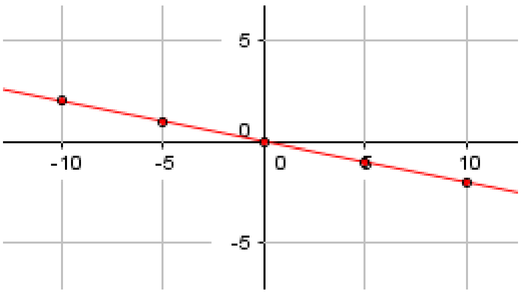
a) $y=3x+1$

x	y
-2	-5
-1	-2
0	1
1	4
2	7



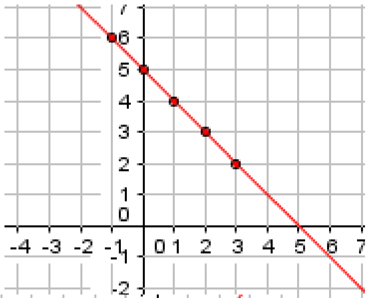
b) $y=-\dfrac{x}{5}$

x	y
-10	2
-5	1
0	0
5	-1
10	-2



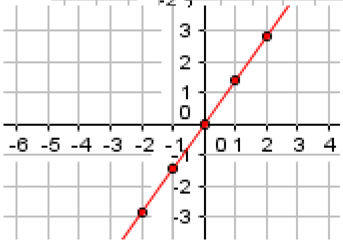
c) $y=-x+5$

x	y
-1	6
0	5
1	4
2	3
3	2



d) $y=\sqrt{2}\,x$

x	y
-2	$-2\sqrt{2}$
-1	$-\sqrt{2}$
0	0
1	$\sqrt{2}$
2	$2\sqrt{2}$



15. Determina la ecuación de la recta que verifica:

a) **Pendiente -3 y pasa por el punto $(2,3)$**

La ecuación será de la forma: $y=-3x+n$. Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación, tenemos: $3=-6+n \Rightarrow n=9$. Por tanto, la función es: $y=-3x+9$

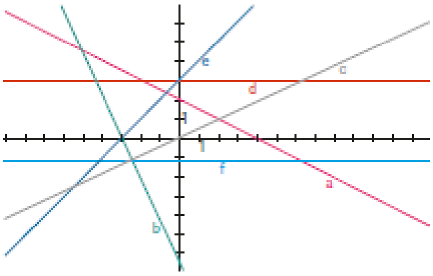
b) **Pendiente 2 y pasa por el punto $(-1,3)$**

La ecuación será de la forma: $y=2x+n$. Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación, tenemos: $3=-2+n \Rightarrow n=5$. Por tanto, la función es: $y=2x+5$

c) **Pendiente -1 y pasa por el punto $(0,0)$**

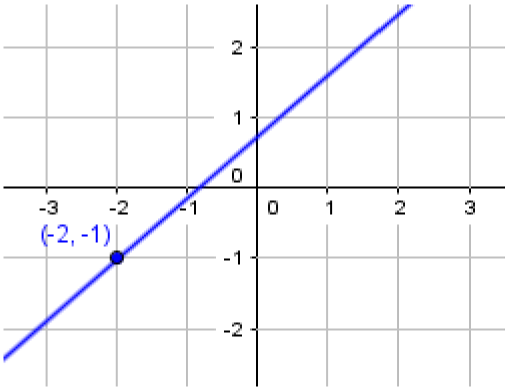
La ecuación será de la forma: $y=-x+n$. Como la recta pasa por el origen, $n=0$ y por tanto, la función es: $y=-x$

16. Indica las rectas de la siguiente gráfica que tienen pendiente negativa, pendiente positiva y pendiente cero:



<u>Pendiente positiva</u>: c, e
<u>Pendiente negativa</u>: a, b
<u>Pendiente cero</u>: d, f

17. Dibuja una recta con pendiente positiva que pase por el punto $(-2,-1)$:



18. Determina la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos:

a) $(2,1)$ y $(-1,7)$

La pendiente es: $m=\dfrac{1-7}{2-(-1)}=-2$.

La ecuación será de la forma: $y=-2x+n$.

Sustituyendo las coordenadas del punto $(2,1)$ en la ecuación, tenemos: $1=-4+n \Rightarrow n=5$. Por tanto, la función es: $y=-2x+5$

b) $(1,-1)$ y $(2,-1)$.

La pendiente es: $m=\dfrac{-1-(-1)}{2-1}=0$.

Se trata pues de una recta horizontal que pasa por el punto $(1,-1)$, esto es: $y=-1$

c) $(5,-1)$ y $(-2,3)$

La pendiente es: $m=\dfrac{-1-3}{5-(-2)}=-\dfrac{4}{7}$.

La ecuación será de la forma: $y=-\dfrac{4}{7}x+n$.

Sustituyendo las coordenadas del punto $(-2,3)$ en la ecuación, tenemos: $3=\dfrac{8}{7}+n \Rightarrow n=\dfrac{13}{7}$.

Por tanto, la función es: $y=-\dfrac{4}{7}x+\dfrac{13}{7}$

d) $(-3,2)$ y $(-1,-3)$

La pendiente es: $m=\dfrac{-3-2}{-1-(-3)}=-\dfrac{5}{2}$.

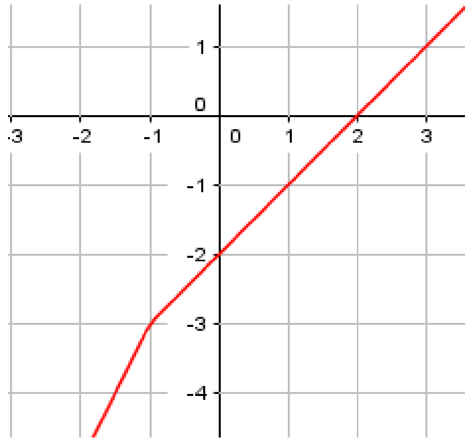
La ecuación será de la forma: $y=-\dfrac{5}{2}x+n$.

Sustituyendo las coordenadas del punto $(-3,2)$ en la ecuación, tenemos: $2=\frac{15}{2}+n \Rightarrow n=-\frac{11}{2}$. Por tanto, la función es: $y=-\frac{5}{2}x-\frac{11}{2}$

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

19. Representa las siguientes funciones y estúdialas:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<-1 \\ x-2 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$



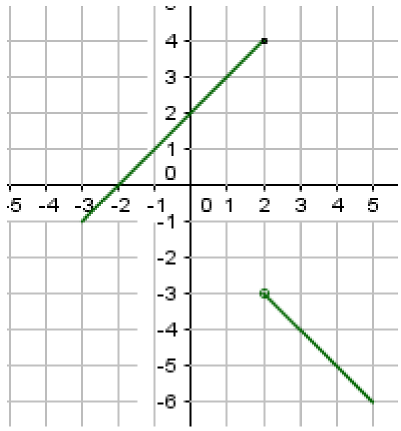
Estudio de la función:

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$

Creciente en todo su dominio
Continua en todo su dominio
No hay máximos ni mínimos

b) $g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } -3<x\leq 2 \\ -x-1 & \text{si } 2<x\leq 5 \end{cases}$



Estudio de la función:

$\mathrm{Dom}(g)=(-3,5]$

$\mathrm{Im}(g)=[-6,-2)\cup(-1,4]$

Creciente en $(-3,2)$

Decreciente en $(2,5)$

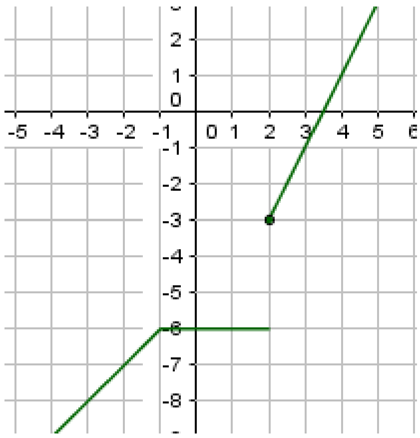
Continua en $(-3,2)\cup(2,5)$

Discontinuidad de salto finito en $x=2$

Máximo local en $(2,4)$ y mínimo local en $(5,6)$

20. Representa las siguientes funciones y estúdialas:

a) $f(x)=\begin{cases} x-5 & \text{si } x\leq -1 \\ -6 & \text{si } -1<x<2 \\ 2x-7 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$



Estudio de la función:

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f)=(-\infty,-6]\cup[3,+\infty)$

Creciente en todo su dominio
Decreciente en $(-1,2)$

Continua en $\mathbb{R}-\{2\}$

Discontinuidad de salto finito en $x=2$
No hay máximos ni mínimos

b) $g(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si } -5\le x<-1\\ -x+3 & \text{si } -1\le x\le 2\\ x-5 & \text{si } 2<x<5\end{cases}$

Estudio de la función:

$\mathrm{Dom}(g)=[-5,5)$

$\mathrm{Im}(g)=[-6,4]$

Creciente en $(-5,-1)\cup(2,5)$

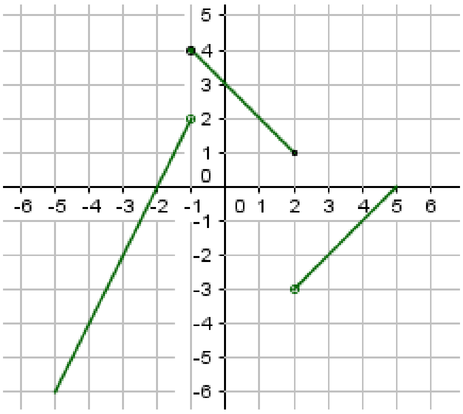
Decreciente en $(-1,2)$

Continua en $[-6,-1)\cup(-1,2)\cup(2,5)$

Discontinuidades de salto finito en $x=-1$ y en $x=2$

Máximo local en $(-1,4)$.

Mínimo local en $(-5,-6)$



c) $h(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si } x<-2\\ 2 & \text{si } -2\le x<0\\ -x+1 & \text{si } 0\le x\le 3\\ x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$

Estudio de la función:

$\mathrm{Dom}(h)=\mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(h)=\mathbb{R}$

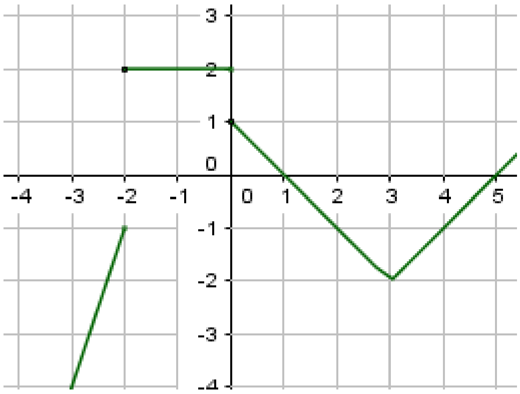
Creciente en $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

Decreciente en $(-2,3)$

Continua en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$

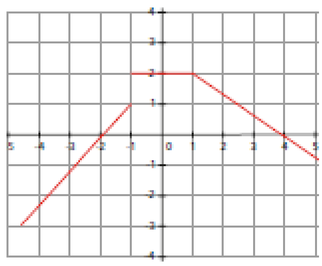
Discontinuidades de salto finito en $x=-2$ y en $x=0$

Mínimo local en $(3,-2)$

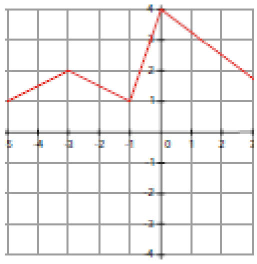


21. Dadas las siguientes gráficas, determina la ecuación de la función que tiene cada representación gráfica:

a) $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<-1\\ 2 & \text{si } -2\le x<0\\ -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3} & \text{si } x>3\end{cases}$



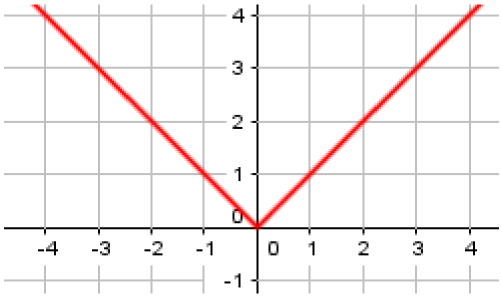
b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{2} & \text{si } x<-3 \\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{si } -3\le x<-1 \\ 3x+4 & \text{si } -1\le x<0 \\ -\dfrac{3}{4}x+4 & \text{si } 0\le x \end{cases}$



22. Representa las siguientes funciones:

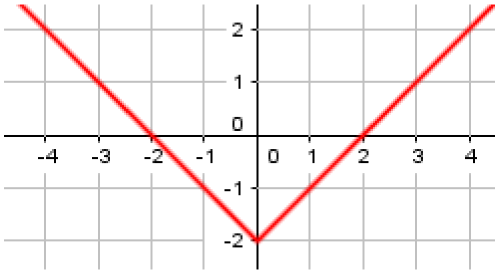
a) $y=|x|$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2



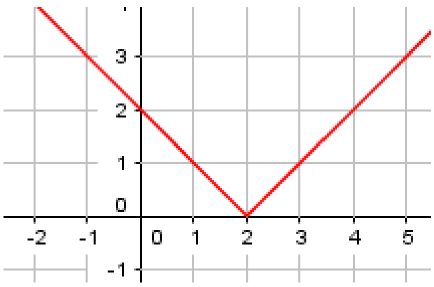
b) $y=|x|-2$

x	y
-2	0
-1	-1
0	-2
1	-1
2	0



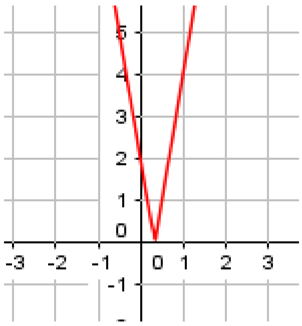
c) $y=|x-2|$

x	y
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0



d) $y=|2-6x|$

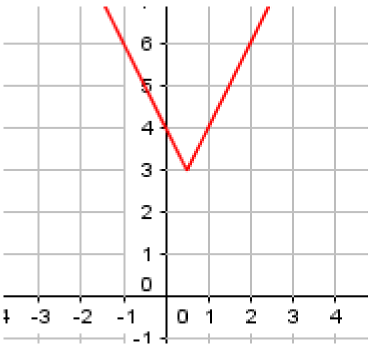
x	y
-2	14
-1	8
0	2
1	4
2	10



x	y
-2	8

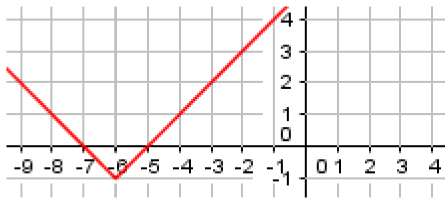
e) $y = |2x - 1| + 3$

-1	6
0	4
1	4
2	6



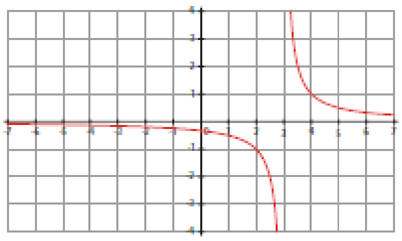
f) $y = |x + 6| - 1$

x	y
-6	-1
-3	2
0	5
3	8
6	11



CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

23. Determina los intervalos de convexidad y concavidad de las siguientes funciones:

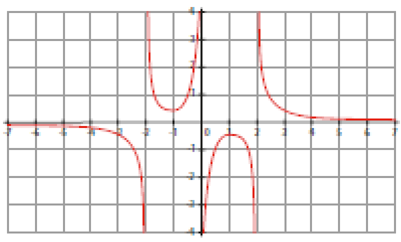


Cóncava en $(-\infty, 3)$

Convexa en $(3, +\infty)$

Cóncava en $(-\infty, 3)$

Convexa en $(3, +\infty)$



SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

24. Indica el tipo de simetría que presenta cada una de estas funciones y el eje de simetría en cada caso:

a) Función impar.
b) Función simétrica respecto del eje $x = 2$
c) Función par (eje de simetría $x = 0$)
d) Función impar

25. Determina si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $y = 2x - 3$. No es par ni impar ya que $f(-x) = -2x - 3$

b) $y=-x^2-2$. Como $f(-x)=-x^2-2=f(x)$ la función es par.

c) $y=-x^5+x^3-x$. Como $f(-x)=x^5-x^3+x=-f(x)$ la función es impar.

d) $y=2x^4+3x^2+1$. Como $f(-x)=2x^4+3x^2+1=f(x)$ la función es par.

26. Determina si las siguientes funciones son simétricas respecto del origen o respecto del eje de ordenadas:

a) $y=\dfrac{1}{2x-1}$. Considerando que $f(-x)=\dfrac{1}{-2x-1}$ la función no es par ni impar y por tanto no es simétrica respecto del eje de ordenadas ni respecto del origen.

b) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. Considerando que $f(-x)=\dfrac{-x}{x^2-1}=-f(x)$ la función es impar y por simétrica respecto del origen.

c) $y=\dfrac{x^2+3}{x^3-x}$. Considerando que $f(-x)=\dfrac{x^2+3}{-x^3+x}=-f(x)$ la función es impar y por simétrica respecto del origen.

d) $y=\dfrac{x+x^3}{x}$. Considerando que $f(-x)=\dfrac{-x-x^3}{-x}=f(x)$ la función es par y por simétrica respecto del eje de ordenadas.

TENDENCIA DE LAS FUNCIONES

27. Determina la tendencia de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-5}$ cuando $x\to 5^+$

Tomando valores superiores a 5 pero cercanos:

$$f(5+0,01)=\frac{2}{0,01}=200;\quad f(5+0,001)=\frac{2}{0,001}=2000$$

La función toma valores tan altos como queramos de modo que $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to 5^+$.

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$ cuando $x\to-\infty$

Tomando valores negativos con valor absoluto alto:

$$f(-100)=\frac{-100}{100^2-2}=-0,010002;\quad f(-10^n)=\frac{-10^n}{10^{2n}-2}$$

Los valores de la función se hacen cada vez más pequeños: $f(x)\to 0$ cuando $x\to-\infty$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+1$ cuando $x\to+\infty$

Tomando valores positivos muy altos: $f(10^n)=\dfrac{1}{10^n+3}+1$

Los valores de la función se acercan cada vez más a 1: $f(x)\to 1$ cuando $x\to+\infty$.

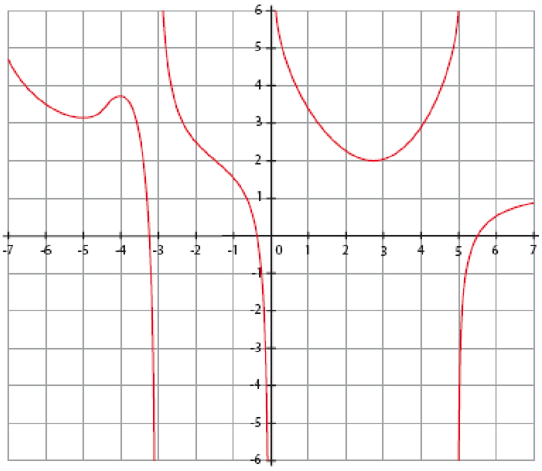
d) $f(x)=3x^3+x^2-x+1$ cuando $x\to-\infty$

Tomando valores negativos con valor absoluto alto:

$f(-10^n)=-3\cdot10^{3n}+10^{2n}-10^n+1=10^{3n}\cdot(-3+10^{-n}-10^{-2n}+10^{-3n})$

Como el valor del paréntesis se acerca cada vez más a -3, los valores de la función son negativos con valor absoluto cada vez más alto: $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to-\infty$.

28. Observa la gráfica y determina las tendencias que se indican:



a) **Cuando $x\to-3^-$ y $x\to-3^+$:**

$f(x)\to-\infty$ cuando $x\to-3^-$ y $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to-3^+$

b) **Cuando $x\to0^-$ y $x\to0^+$:**

$f(x)\to-\infty$ cuando $x\to0^-$ y $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to0^+$

c) **Cuando $x\to5^-$ y $x\to5^+$:**

$f(x)\to+\infty$ cuando $x\to5^-$ y $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to5^+$

d) **Cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$:**

$f(x)\to1$ cuando $x\to+\infty$ y $f(x)\to+\infty$ cuando $x\to-\infty$

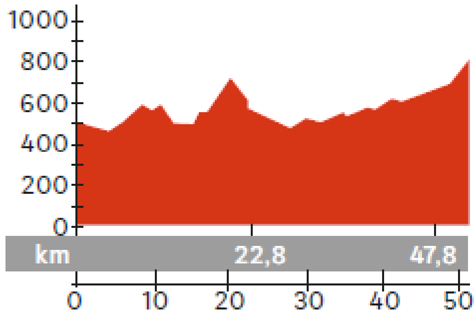
PROBLEMAS

29. La siguiente gráfica muestra el perfil de la etapa de alta montaña de la Vuelta Ciclista a España.

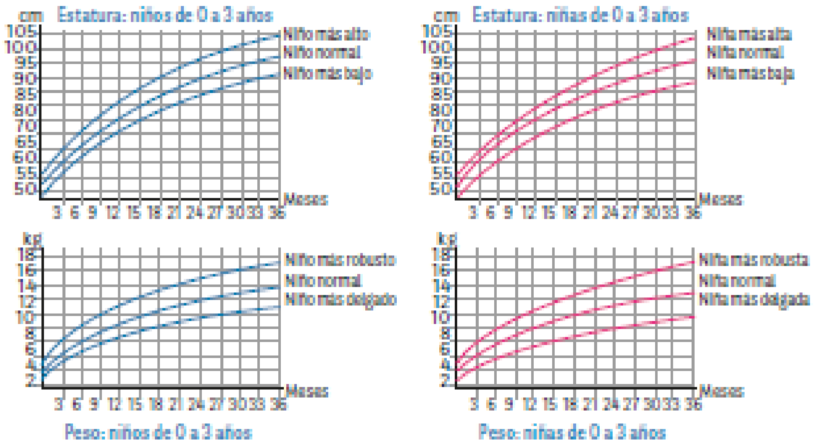
a) **Determina los intervalos de crecimiento donde se estime que está el recorrido de mayor pendiente.**
Las mayores subidas están entre los km 5 y 10, entre los km 18 y 20 y entre los 47,8 y los 50 km.

b) **¿Hay alguna bajada importante?**
Hay una bajada importante entre los kilómetros 20 y 22,8.

c) **Determina los tramos en los que el recorrido es prácticamente llano.**
Hay un tramo llano entre los km 12 y 14 y un tramo corto en el km 15.



30. Las siguientes gráficas muestran el crecimiento de un bebé en los 3 primeros años de vida. Como puedes observar, las gráficas están separadas por sexos.



a) **Un niño de año y medio que mide 80 cm y pesa 14 kg, ¿está dentro de un crecimiento normal según estas gráficas?**
En cuanto a estatura, está dentro de la normalidad pero en la parte baja del rango. En cuanto al peso, está un poco por encima del límite superior del rango considerado como normal.

b) **Determina las edades de un niño y una niña dentro de los parámetros normales para que tengan el mismo peso. ¿Tienen la misma altura en esas edades?**
Hasta los 27 meses de edad, los pesos normales de un niño y una niña no presentan grandes diferencias. En cuanto a la estatura, los niños estarán en un rango entre 85 y 100 cm y las niñas entre 82,5 y 97,5 cm.

DESAFÍO PISA - PÁG. 189

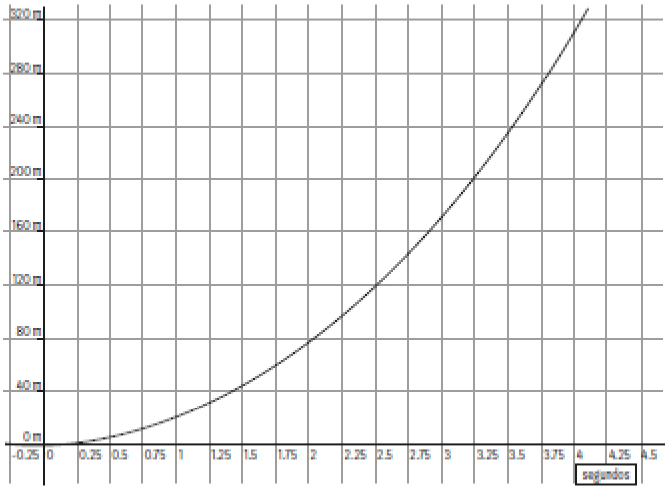
CAÍDA LIBRE

Si dejamos caer en el vacío dos cuerpos con masas distintas desde el mismo punto, el tiempo que tardarán en alcanzar el suelo será el mismo.
Es más, podemos concluir que la razón entre la altura desde la que cae un objeto y el cuadrado del tiempo que tarda en caer es constante. Esto es,

$$\frac{h}{t^2} = k \text{, donde } k \text{ es una constante.}$$

La siguiente gráfica nos muestra la relación entre la altura de caída y el tiempo que tarda un objeto

en caída libre en llegar al suelo.



ACTIVIDAD 1. A la vista de la gráfica, la constante a la que se refiere el enunciado, en m/s^2 es:

A: 19,6. Podemos observarlo en el punto $(2, 78,4)$

ACTIVIDAD 2. Conocida la constante, la altura desde la que caerá un objeto que tarda 3 segundos en caer al suelo es:

A: 176,4, ya que $h = 19,6 \cdot t^2 = 19,6 \cdot 9 = 176,4$

ACTIVIDAD 3. La Tasa de Variación Media (TVM) en el intervalo de tiempo 1,25 s y 3 s será:

B: 83,3, ya que $\text{TVM} = \dfrac{h(3) - h(1,25)}{3 - 1,25} = \dfrac{19,6 \cdot 3^2 - 19,6 \cdot 1,25^2}{1,75} = 83,3$

ACTIVIDAD 4. Desde un avión que vuela a 5 000 m de altura se cae un objeto. El tiempo que tardará en alcanzar el suelo aproximadamente es de:

A: 16 s, ya que $t = \sqrt{\dfrac{h}{19,6}} = \sqrt{\dfrac{5000}{19,6}} \approx 16$

ACTIVIDAD 5. Un paracaidista se lanza desde un avión a 3 000 m de altura. Si debe abrir el paracaídas a 1 500 m de altura, los segundos que estará en caída libre serán, aproximadamente:

C: 8,75, ya que recorrerá en caída libre 2500 m y $t = \sqrt{\dfrac{h}{19,6}} = \sqrt{\dfrac{1500}{19,6}} \approx 8,75$