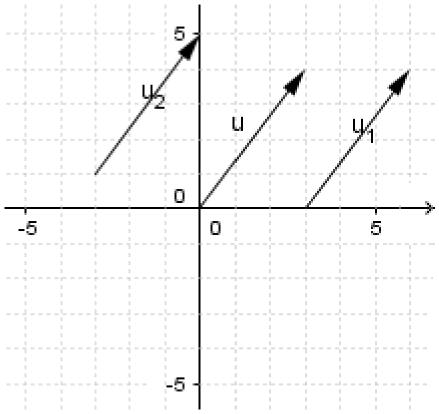
UNIDAD 8: Geometría Analítica

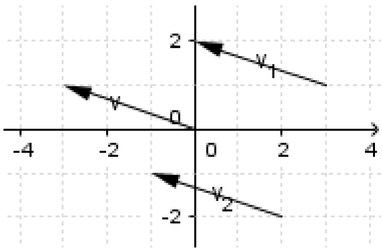
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 152

1. Representa los siguientes vectores y dibuja dos vectores equipolentes a cada uno:

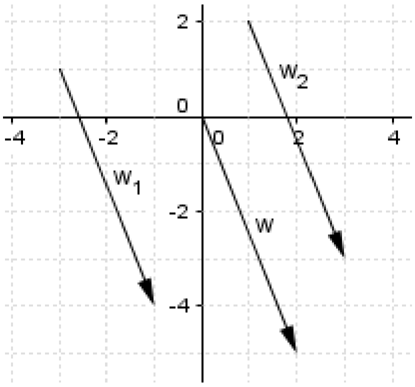
a) $\vec{u}=(3,4)$



b) $\vec{v}=(-3,1)$



c) $\vec{w}=(2,-5)$



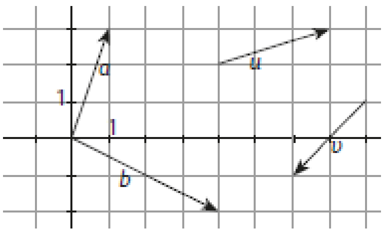
2. Determina las coordenadas de los vectores de la figura:

$\vec{a}=(1,3)$

$\vec{b}=(4,-2)$

$\vec{u}=(3,1)$

$\vec{v}=(-2,-2)$



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 153

3. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(-2,5)$, calcula:

a) $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

b) $|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$

c) $\vec{u}+\vec{v}=(3-2,-1+5)=(1,4)$

d) $\vec{u}-\vec{v}=(3-(-2),-1-5)=(5,-6)$

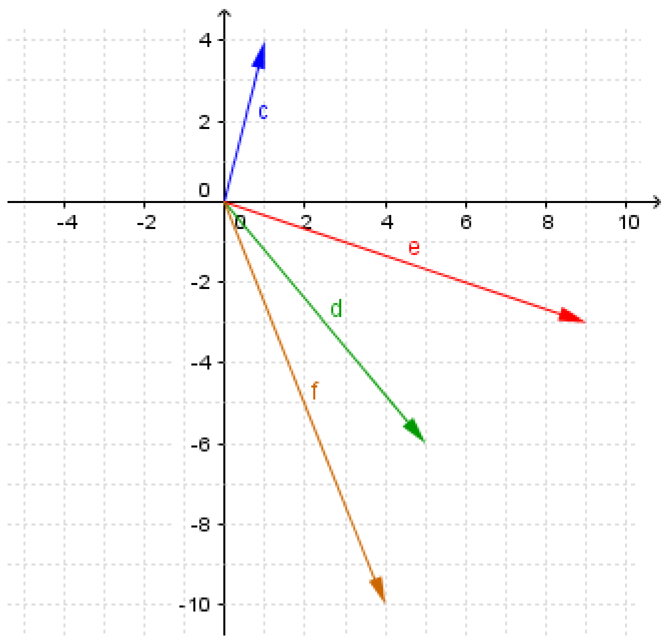
e) $3\vec{u}=3\cdot(3,-1)=(9,-3)$

f) $-2\vec{v}=-2\cdot(-2,5)=(4,-10)$

g) $5\vec{v}-4\vec{u}=(5\cdot(-2)-4\cdot 3, 5\cdot 5-4\cdot(-1))=(-22,30)$

h) $|4\vec{u}|=|(12,-3)|=\sqrt{12^2+(-3)^2}=\sqrt{153}$

4. Representa gráficamente los vectores de los apartados c), d), e) y f) del ejercicio anterior.



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 154

5. Dados los puntos $A=(3,-2)$ y $B=(-2,4)$ determina:

a) La distancia de A a B: $d(A,B)=\sqrt{(3+2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$

b) El punto medio del segmento AB: $M=\dfrac{A+B}{2}=\left(\dfrac{3-2}{2},\dfrac{-2+4}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

c) El simétrico de A respecto de B: $\overrightarrow{OS}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(2\cdot(-2)-3,2\cdot4-(-2)\right)=(-7,10)$

d) El simétrico de B respecto de A: $\overrightarrow{OS'}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\left(2\cdot3-(-2),2\cdot(-2)-4\right)=(8,-8)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 155

6. Determina si los siguientes vectores son paralelos:

a) $\vec{u}=(6,-2)$ y $\vec{v}=(-9,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(6,-2)\\ \vec{v}=(-9,3)\end{array}\right\}\Rightarrow 6\cdot3=-2\cdot(-9)\Rightarrow 18=18\Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

b) $\vec{u}=(2,-4)$ y $\vec{v}=(-3,-6)$

c) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,-4)\\ \vec{v}=(-3,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot(-6)\neq-3\cdot(-4)\Rightarrow -12\neq12\Rightarrow$ no son paralelos.

7. Determina un vector paralelo a los siguientes vectores:

a) $\vec{u}=(-3,3)\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=(-9,9)$

b) $\vec{v}=(18,-6)\Rightarrow\overrightarrow{v_1}=(6,-2)$

c) $\vec{w}=(3,0)\Rightarrow\overrightarrow{w_1}=(7,0)$

8. Determina si los siguientes puntos están alineados:

a) $A=(1,2)$, $B=(-2,3)$, $C=(-4,6)$. No están alineados ya que:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2-1,3-2)=(-3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-4-1,6-2)=(-4,4)\end{array}\right\}\Rightarrow -3\cdot4\neq-4\cdot1$$

b) $A=(2,3)$, $B=(-3,1)$, $C=(7,5)$. Están alineados ya que:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3-2,1-3)=(-5,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(7-2,5-3)=(5,2)\end{array}\right\}\Rightarrow -5\cdot2=-2\cdot5\Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$$

9. Dados los puntos $A=(2,1)$, $B=(-1,3)$, $C=(4,-2)$, determina las coordenadas de un punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo:

Sea $D=(x,y)$. Para formar un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen que ser equipolentes, esto es, las coordenadas han de ser iguales:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{BA}=(-1-2,3-1)=(-3,2)\\ \overrightarrow{CD}=(x-4,y+2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-4=-3\\ y+2=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=1\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow D=(1,0)$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 156

10. Calcula el producto escalar de las siguientes parejas de vectores:

a) $\vec{u}=(-3,2), \vec{v}=(1,-3) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=-3+2\cdot(-3)=-3-6=-9$

b) $\vec{u}=(5,-2), \vec{v}=(4,-1) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=5\cdot 4+(-2)\cdot(-1)=20+2=22$

11. Determina si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{u}=(4,-6), \vec{v}=(-3,-2) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=4\cdot(-3)+(-6)\cdot(-2)=-12+12=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

b) $\vec{u}=(2,-3), \vec{v}=(-3,2) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2=-6-6=12 \Rightarrow \vec{u}\not\perp\vec{v}$

12. Determina un vector perpendicular a cada uno de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}=(1,-4) \Rightarrow \vec{v}=(4,1) \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

b) $\vec{v}=(-3,-5) \Rightarrow \vec{w}=(5,-3) \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{w}$

c) $\vec{w}=(3,-5) \Rightarrow \vec{u}=(-5,-3) \Rightarrow \vec{w}\perp\vec{u}$

13. Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores:

a) $\vec{u}=(-2,1), \vec{v}=(-3,4) \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Por tanto, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{6+4}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+16}}\right)=\arccos\left(\dfrac{10}{5\sqrt{5}}\right)=\arccos\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\approx 26^{\circ}\,33'\,54''$

b) $\vec{u}=(-1,-3), \vec{v}=(1,0) \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Por tanto, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1+9}\cdot 1}\right)=\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)\approx 108^{\circ}\,26'\,6''$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 157

14. Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P=(2,5)$ y el vector director $\vec{u}=(3,-2)$. Determina tres puntos de dicha recta.

La ecuación vectorial es $Q=P+k\cdot\vec{u}$ con $k\in\mathbb{R}$. Para determinar tres puntos de la recta elegimos tres valores distintos de k:

$k=1 \Rightarrow Q_1=(2,5)+(3,-2)=(5,-3)$

$k=-1 \Rightarrow Q_2=(2,5)-(3,-2)=(-1,7)$

$k=5 \Rightarrow Q_3=(2,5)+5\cdot(3,-2)=(17,-5)$

15. Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P=(1,2)$ y el vector director $\vec{u}=(-1,5)$. Determina tres puntos de dicha recta.

Sea $k\in\mathbb{R}$ y $Q=(x,y)$ un punto de la recta. La ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x=1-k \\ y=2+5k \end{cases}.$$

Para determinar tres puntos de la recta elegimos tres valores distintos de k :

$k=1\Rightarrow Q_1=(1-1,2+5)=(0,-7)$

$k=-1\Rightarrow Q_2=(1+1,2-5)=(2,-3)$

$k=-3\Rightarrow Q_3=(1+3,2-15)=(4,-13)$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 158

16. Determina la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P=(3,-2)$, siendo $\vec{u}=(-3,4)$ un vector director. Determina tres puntos de esta recta.

Sea $Q=(x,y)$ un punto de la recta buscada. La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y+2}{4}$$

Para determinar tres puntos de la recta elegimos un valor para una incógnita y resolvemos para la otra:

$x=0\Rightarrow 1=\dfrac{y+2}{4}\Rightarrow 4=y+2\Rightarrow y=2\Rightarrow Q_1=(0,2)$

$x=3\Rightarrow 0=\dfrac{y+2}{4}\Rightarrow 0=y+2\Rightarrow y=-2\Rightarrow Q_2=(3,-2)$

$x=-3\Rightarrow 2=\dfrac{y+2}{4}\Rightarrow 8=y+2\Rightarrow y=6\Rightarrow Q_3=(-3,6)$

17. Determina un vector director y tres puntos de la recta de ecuación $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{-3}$.

Un vector director de la recta es $\vec{u}=(2,-3)$. Para determinar tres puntos de la recta elegimos un valor para una incógnita y resolvemos para la otra:

$x=1\Rightarrow 2=\dfrac{y-5}{-3}\Rightarrow -6=y-5\Rightarrow y=-1\Rightarrow Q_1=(1,-1)$

$y=5\Rightarrow \dfrac{x+3}{2}=0\Rightarrow x+3=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow Q_2=(-3,0)$

$x=-3\Rightarrow 0=\dfrac{y-5}{-3}\Rightarrow 0=y-5\Rightarrow y=5\Rightarrow Q_1=(-3,5)$

18. Determina la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P=(2,-3)$ y pendiente -2. Determina tres puntos de dicha recta.

Sea $Q=(x,y)$ un punto de la recta buscada. La ecuación punto-pendiente es: $y=-2(x-2)-3$. Para determinar tres puntos de la recta elegimos un valor para una incógnita y resolvemos para la otra:

$$x=2 \Rightarrow y=-2(2-2)-3 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow Q_1=(2,-3)$$
$$x=0 \Rightarrow y=-2\cdot(-2)-3 \Rightarrow y=4-3=1 \Rightarrow Q_1=(0,1)$$
$$x=-1 \Rightarrow y=-2(-1-2)-3 \Rightarrow y=6-3=3 \Rightarrow Q_1=(-1,3)$$

19. Determina la ecuación punto pendiente de la recta de ecuación $\frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2}$.

El punto $P=(3,-4)$ es un punto de la recta y el vector $\vec{u}=(4,-2)$ un vector director. Por tanto, la pendiente es $m=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$. La ecuación punto-pendiente es: $y=-\frac{1}{2}(x-3)-4$

20. Determina la ecuación punto pendiente de la recta que pasa por $P=(2,-4)$ y tiene a $\vec{u}=(3,-1)$ como vector director.

La pendiente de la recta es $m=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$ y la ecuación punto-pendiente es: $y=-\frac{1}{3}(x-2)-4$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 159

21. Determina la ecuación general de una recta que pasa por el punto $A=(5,1)$, siendo $\vec{u}=(3,-2)$ un vector director de la recta. Determina tres puntos de la recta.

Partiendo de la ecuación continua de la recta: $\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-2}$, operamos y despejamos:

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-2} \Rightarrow -2(x-5)=3(y-1) \Rightarrow -2x-3y+13=0 \Rightarrow 2x+3y-13=0$$

Para determinar tres puntos de la recta elegimos un valor para una incógnita y resolvemos para la otra:

$$x=2 \Rightarrow 4+3y-13=0 \Rightarrow 3y-9=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow Q_1=(2,3)$$
$$y=1 \Rightarrow 2x+3-13=0 \Rightarrow 2x-10=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow Q_2=(5,1)$$
$$y=-1 \Rightarrow 2x-3-13=0 \Rightarrow 2x-16=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow Q_3=(8,-1)$$

22. Determina la ecuación general de una recta que pasa por los puntos $A=(-2,5)$ y $B=(3,-4)$.

Como el vector $\overrightarrow{AB}=(5,-9)$ es un vector director de la recta, el vector $\vec{n}=(9,5)$ es un vector normal. Por tanto, la ecuación general de la recta pedida es $9x+5y=c$ con $c\in\mathbb{R}$. Dado que la recta debe pasar por el punto $A=(-2,5)$, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación se tiene:

$9\cdot(-2)+5\cdot 5=c \Rightarrow c=-18+25=7$. Por tanto, la recta es: $9x+5y=7$

23. Determina la ecuación general de la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-5}$.

Operando en la ecuación continua de la recta y despejando, obtenemos:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow -5(x+1) = 3(y-4) \Rightarrow -5x-3y+7=0 \Rightarrow 5x+3y-7=0$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 160

24. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas y el punto de intersección en su caso:

a) $r \equiv x-3y+1=0$ y $s \equiv x-y-5=0$. Como los coeficientes de x e y de las dos rectas no son proporcionales, las rectas son secantes. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ x-y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+1=0 \\ -x+y+5=0 \end{cases} \Rightarrow -2y+6=0 \Rightarrow y=-3$$

Sustituyendo el valor $y=-3$ en la ecuación de s, tenemos: $x+3-5=0 \Rightarrow x=2$.

Por tanto, el punto de intersección es $P(2,-3)$.

b) $r \equiv 2x+y-2=0$ y $s \equiv x+\frac{1}{2}y-2=0$. Como $\frac{2}{1} = \frac{1}{1/2} \neq \frac{-2}{-2}$ las rectas son paralelas.

c) $r \equiv 6x+15y-7=0$ y $s \equiv 4x+10y-2=0$. Como $\frac{6}{4} = \frac{15}{10} \neq \frac{-7}{-2}$ las rectas son paralelas.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 161

25. Determina la ecuación de la recta paralela a $r \equiv 2x-3y+5=0$ que pase por el punto $A(-2,4)$.

La recta de ecuación $s \equiv 2x-3y+c=0$ con $c \in \mathbb{R}$ es paralela a r. Para que pase por el punto A, sustituimos sus coordenadas: $2\cdot(-2)-3\cdot 4+c=0 \Rightarrow -16+c=0 \Rightarrow c=16$.

Por tanto, la recta solicitada es $s \equiv 2x-3y+16=0$

26. Determina la ecuación de la recta perpendicular a $r \equiv -2x+3y-4=0$ que pase por el punto $A(3,-1)$.

Sea s la recta que buscamos. El vector $\vec{u}=(-2,3)$ es normal a r y por tanto es un vector director de s. La ecuación continua de s es, por tanto: $s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3}$

27. Determina el punto de intersección y el ángulo que forman las rectas $r \equiv x+2y-3=0$ y $s \equiv 3x+y-4=0$.

El ángulo que forman viene dado por el ángulo de sus vectores normales que son, respectivamente: $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(3,1)$.

Así: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\dfrac{5}{5\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ}$

El punto de intersección es la solución al sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ -6x-2y+8=0 \end{cases} \Rightarrow -5x+5=0 \Rightarrow x=1$$

Sustituyendo en s, tenemos $3+y-4=0 \Leftrightarrow y=1$. Por tanto, el punto de intersección es $P(1,1)$.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGS. 164-166

VECTORES

1. Determina las coordenadas de los siguientes vectores utilizando vectores equipolentes:

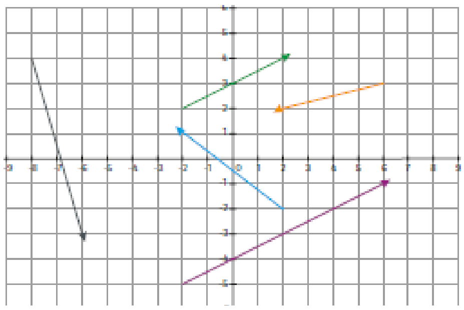
$\vec{a} = (2,-7)$ (negro)

$\vec{b} = (4,2)$ (verde)

$\vec{c} = (-4,-1)$ (naranja)

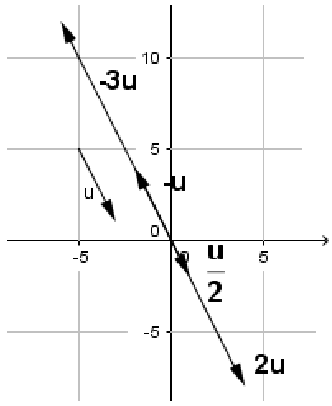
$\vec{d} = (-4,3)$ (azul)

$\vec{e} = (8,4)$ (morado)



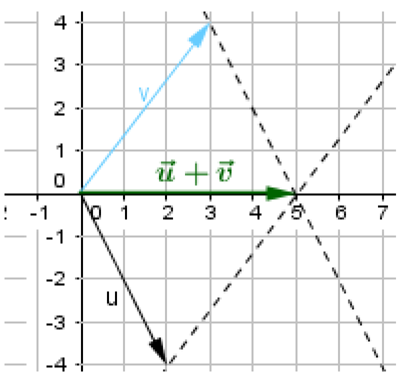
2. A la vista de la figura, dibuja los vectores:

a) $-\vec{u}$
b) $2\vec{u}$
c) $\dfrac{\vec{u}}{2}$
d) $-3\vec{u}$

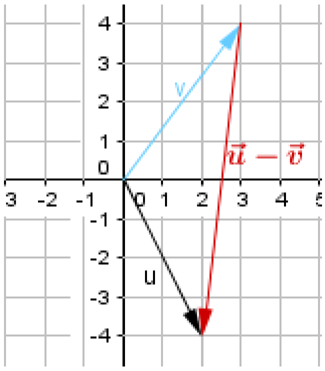


3. Determina, geométricamente, las siguientes operaciones:

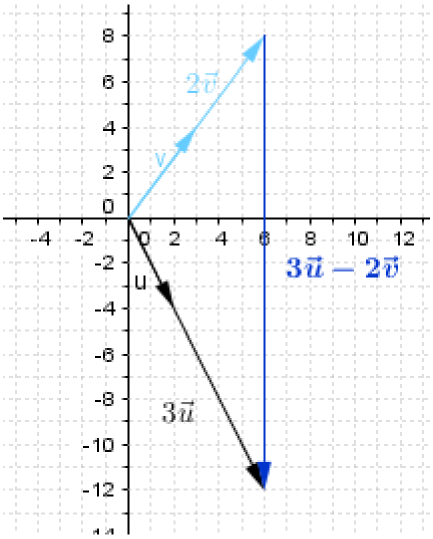
a) $\vec{u}+\vec{v}$



b) $\vec{u}-\vec{v}$



c) $3\vec{u}-2\vec{v}$



4. Sean $\vec{u}=(-5,2)$ y $\vec{v}=(4,-3)$ dos vectores. Determina:

a) $-\vec{u}=(5,-2)$

b) $\vec{u}+\vec{v}=(-1,-1)$

c) $3\vec{u}=(-15,6)$

d) $\vec{u}-\vec{v}=(-9,5)$

e) $\vec{v}-\vec{u}=(9,-5)$

f) $6\vec{u}-5\vec{v}=(-50,27)$

5. Si $\vec{u}=(3,-5)$ es un vector, calcula:

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

b) $|-\vec{u}|=|\vec{u}|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

c) $|3\vec{u}|=3\cdot|\vec{u}|=3\sqrt{34}$

d) $|-3\vec{u}|=|3\vec{u}|=3\cdot|\vec{u}|=3\sqrt{34}$

e) $\left|\frac{3}{4}\vec{u}\right| = \frac{3}{4}\cdot|\vec{u}| = \frac{3\sqrt{34}}{4}$

f) $\left|-\frac{3}{4}\vec{u}\right| = \left|\frac{3}{4}\vec{u}\right| = \frac{3}{4}\cdot|\vec{u}| = \frac{3\sqrt{34}}{4}$

VECTOR DE POSICIÓN

6. Determina las coordenadas de un vector de extremos los puntos:

a) $A=(2,3)$ y $B=(-2,1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-4,-2)$

b) $A=(5,1)$ y $B=(4,-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-1,-3)$

c) $A=(-2,-3)$ y $B=(2,-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(4,2)$

7. Calcula las distancias entre los siguientes puntos:

a) $A=(4,1)$ y $B=(-4,2)$. $d(A,B)=\sqrt{(-4-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{65}$

b) $A=(9,5)$ y $B=(-2,-3)$. $d(A,B)=\sqrt{(-2-9)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{121+64}=\sqrt{185}$

c) $A=(-5,7)$ y $B=(5,-9)$. $d(A,B)=\sqrt{(5+5)^2+(-9-7)^2}=\sqrt{100+256}=\sqrt{356}=2\sqrt{89}$

8. Determina el punto medio del segmento $\overline{AB}$ en los siguientes casos:

a) $A=(-2,3)$ y $B=(2,1)$. $M=\frac{A+B}{2}=(0,2)$

b) $A=(1,7)$ y $B=(-7,-3)$. $M=\frac{A+B}{2}=(-3,2)$

c) $A=(4,7)$ y $B=(1,-1)$. $M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{5}{2},3\right)$

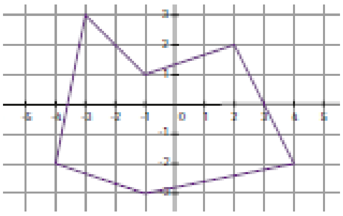
9. Determina el simétrico de A respecto de B en los siguientes casos:

a) $A=(1,6)$ y $B=(-2,1)$. $S=2B-A=(-5,-4)$

b) $A=(5,2)$ y $B=(-2,-6)$. $S=2B-A=(-9,-16)$

c) $A=(2,3)$ y $B=(4,-2)$. $S=2B-A=(6,-7)$

10. Calcula el perímetro de la siguiente figura:



Los vértices de la figura son: $A=(-3,3)$, $B=(-1,1)$, $C=(2,2)$, $D=(4,-2)$, $E=(-1,-3)$ y $F=(-4,-2)$. Las longitudes de los lados se calculan como la distancia entre vértices consecutivos:

$$\left.\begin{array}{l} d(A,B)=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ d(B,C)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \\ d(C,D)=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \\ d(D,E)=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26} \\ d(E,F)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \\ d(F,A)=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p=2\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{26}+\sqrt{10}+\sqrt{26} \\ \quad =2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{26}\right)\approx 23{,}82 \end{array}$$

VECTORES PARALELOS

11. Indica si son paralelos o no los siguientes vectores:

a) $\vec{u}=(-6,3)$ y $\vec{v}=(8,-4)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(-6,3)\\ \vec{v}=(8,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow -6\cdot(-4)=3\cdot 8\Rightarrow 24=24\Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

b) $\vec{u}=(5,-10)$ y $\vec{v}=(-4,8)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(5,-10)\\ \vec{v}=(-4,8)\end{array}\right\}\Rightarrow 5\cdot 8=(-10)\cdot(-4)\Rightarrow 40=40\Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

c) $\vec{u}=(6,8)$ y $\vec{v}=(9,-12)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(6,8)\\ \vec{v}=(9,-12)\end{array}\right\}\Rightarrow 6\cdot(-12)\neq 8\cdot 9\Rightarrow -72\neq 72\Rightarrow \vec{u}\nparallel\vec{v}$$

d) $\vec{u}=(-6,15)$ y $\vec{v}=(4,-10)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(-6,15)\\ \vec{v}=(4,-10)\end{array}\right\}\Rightarrow (-6)\cdot(-10)=15\cdot 4\Rightarrow 60=60\Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

12. Da dos vectores paralelos al vector:

a) $\vec{u}=(2,-4)\parallel(4,-8)\parallel(-1,2)$

b) $\vec{u}=(-2,5)\parallel(2,-5)\parallel(-6,15)$

c) $\vec{u}=(-3,-2)\parallel(3,2)\parallel(-6,-4)$

d) $\vec{u}=(-8,6)\parallel(-4,3)\parallel\left(2,-\frac{3}{2}\right)$

13. Dados los puntos $A=(4,3)$, $B=(3,2)$ y $C=(-2,-2)$ determina las coordenadas de un punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo.

Sea $D=(x,y)$. Para formar un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen que ser equipolentes, esto es, las coordenadas han de ser iguales:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{BA}=(4-3,3-2)=(1,1)\\ \overrightarrow{CD}=(x+2,y+2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+2=1\\ y+2=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=-1\\ y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow D=(-1,-1)$$

14. Determina si los siguientes puntos están alineados o no:

a) $A=(-2,3)$, $B=(-3,1)$, $C=(2,4)$. No están alineados ya que:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3+2,1-3)=(-1,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2+2,4-3)=(4,1)\end{array}\right\}\Rightarrow -1\cdot 1\neq -2\cdot 4\Rightarrow \overrightarrow{AB}\not\parallel \overrightarrow{AC}$$

b) $A=(-4,0)$, $B=(0,8)$, $C=(1,10)$. Están alineados ya que:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(4,8)\\ \overrightarrow{AC}=(1+4,10)=(5,10)\end{array}\right\}\Rightarrow 4\cdot 10=8\cdot 5\Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel \overrightarrow{AC}$$

c) $A=(2,2)$, $B=(-2,4)$, $C=(-4,5)$. Están alineados ya que:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2-2,4-2)=(-4,2)\\ \overrightarrow{AC}=(-4-2,5-2)=(-6,3)\end{array}\right\}\Rightarrow -4\cdot 3=2\cdot(-6)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel \overrightarrow{AC}$$. No están alineados.

PRODUCTO ESCALAR. ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

15. Calcula el producto escalar de los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}=(-3,-4),\vec{v}=(3,-5)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=-9+20=11$

b) $\vec{u}=(-4,-5),\vec{v}=(-2,3)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=8-15=-7$

c) $\vec{u}=(-2,-6),\vec{v}=(4,-2)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2=-8+12=4$

16. Determina si son perpendiculares los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}=(-3,5),\vec{v}=(-4,6)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=12+30\neq 0\Rightarrow \vec{u}\not\perp\vec{v}$

b) $\vec{u}=(-2,-4),\vec{v}=(6,-3)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-12+12=0\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(3,-6)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=30+30\neq 0\Rightarrow \vec{u}\not\perp\vec{v}$

17. Determina un vector perpendicular al vector:

a) $\vec{u}=(-4,3)\Rightarrow \vec{v}=(3,4)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

b) $\vec{u}=(-2,-5)\Rightarrow \vec{v}=(5,-2)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

c) $\vec{u}=(4,-3)\Rightarrow \vec{v}=(3,4)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

d) $\vec{u}=(3,-4)\Rightarrow \vec{v}=(-4,-3)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

18. Calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores:

a) $\vec{u}=(-2,3),\vec{v}=(2,-3)\ \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Por tanto, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{-4-9}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+9}}\right)=\arccos(-1)=180^{\circ}$

b) $\vec{u}=(-1,3),\vec{v}=(4,1)\ \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Así, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{-4+3}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{16+1}}\right)=\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{170}}\right)=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{170}}{170}\right)\approx 94^{\circ}\,23'55''$

c) $\vec{u}=(2,-4),\vec{v}=(6,3)\ \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Por tanto, $\alpha=\arccos\left(\dfrac{12-12}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{36+9}}\right)=\arccos 0=90^{\circ}$ y son perpendiculares.

ECUACIONES DE LA RECTA

19. Dada la recta de ecuación $r\equiv(1,-3)+k(6,-7)$, determina:

a) **Tres puntos de la recta.**
Dando valores a k, tenemos:
$k=0\Rightarrow P=(1,-3)$
$k=1\Rightarrow Q=(1,-3)+(6,-7)=(7,-10)$
$k=-1\Rightarrow R=(1,-3)-(6,-7)=(-5,4)$

b) **El vector director** $\Rightarrow \vec{v}=(6,-7)$

c) **Las ecuaciones paramétricas de la recta:**
$$\begin{cases}x=1+6k\\ y=-3-7k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$$

20. Dada la recta de ecuación $r\equiv\begin{cases}x=1+6k\\ y=-3-7k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$, determina:

a) **Tres puntos de la recta.**
Dando valores a k, tenemos:
$k=0\Rightarrow P=(1,-3)$
$k=1\Rightarrow Q=(1+6,-3-7)=(7,-10)$
$k=-1\Rightarrow R=(1-6,-3+7)=(-5,4)$

b) **La ecuación vectorial de la recta**. El vector director es $\vec{u}=(6,-7)$ y pasa por $P=(1,-3)$, por tanto $r\equiv(1,-3)+k(6,-7)$.

c) **La ecuación continua de la recta**. $r\equiv\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+3}{-7}$

d) **¿El punto pertenece $A=(-3,2)$ a r?**

Sustituyendo las coordenadas de A en la ecuación paramétrica de r, tenemos:

$$\begin{cases}-3=1+6k & \Rightarrow 6k=-4\Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}\\ 2=-3-7k & \Rightarrow 7k=-5\Rightarrow k=-\dfrac{5}{7}\end{cases}$$. El punto no pertenece a la recta.

21. Determina la ecuación continua de la recta de ecuación $r\equiv\begin{cases}x=2-k\\ y=1+k\end{cases}$

Despejando k e igualando, tenemos:

$$\begin{cases}x=2-k & \Rightarrow k=-x+2\\ y=1+k & \Rightarrow k=y-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad r\equiv -x+2=y-1$$

22. Dada la recta de ecuación $r\equiv\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{-1}$, determina:

a) **Tres puntos de la recta**. Dando valores a una incógnita, hallamos la otra:

$$x=2\Rightarrow\frac{2+4}{3}=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow 2=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow -2=y-3\Rightarrow y=1\quad\Rightarrow P=(2,1)$$

$$x=-4\Rightarrow\frac{-4+4}{3}=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow 0=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow 0=y-3\Rightarrow y=3\quad\Rightarrow Q=(-4,3)$$

$$x=-7\Rightarrow\frac{-7+4}{3}=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow -1=\frac{y-3}{-1}\Rightarrow 2=y-3\Rightarrow y=5\quad\Rightarrow R=(-7,5)$$

b) **Las ecuaciones paramétricas de la recta**. El vector director de la recta es $\vec{u}=(3,-1)$ y pasa por el punto $P=(2,1)$, por tanto: $r\equiv\begin{cases}x=2+3k\\ y=1-k\end{cases}$

c) **La ecuación vectorial de la recta**. El vector director de la recta es $\vec{u}=(3,-1)$ y pasa por el punto $P=(2,1)$, por tanto: $r\equiv(2,1)+k(-3,1)$

d) **¿El punto $A=(-1,1)$ pertenece a r?** Sustituyendo sus coordenadas en la ecuación continua, tenemos: $\dfrac{-1+4}{3}\neq\dfrac{1-3}{-1}\Rightarrow 1\neq 2$. Por tanto, el punto no pertenece a la recta.

23. Dada la recta de ecuación $r\equiv y=-3x+7$, determina:

a) **Tres puntos de la recta.** Dando valores a una incógnita, hallamos la otra:

$$x=0\Rightarrow y=7\Rightarrow\quad\Rightarrow P=(2,1)$$

$x=1 \Rightarrow y=-3+7=4 \quad \Rightarrow Q=(1,4)$

$x=4 \Rightarrow y=-12+7=-5 \quad \Rightarrow R=(4,-5)$

b) **La ecuación continua de la recta.** Tenemos que $y=-3x+7 \Rightarrow 3x+y=7$ luego un vector director de la recta $\vec{u}=(1,-3)$ es y pasa por el punto $P=(2,1)$. Por tanto: $r \equiv x-2=\frac{y-1}{-3}$

c) **¿El punto $A=(2,1)$ pertenece a r ?** Sustituyendo sus coordenadas en la ecuación de la recta, tenemos que $1 \neq -3 \cdot 2+7$ por lo que el punto no pertenece a la recta.

24. Dada la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{9}$, determina la ecuación punto-pendiente de la recta:

La recta pasa por el punto $P=(-3,2)$ y tiene como vector director a $\vec{u}=(-4,9)$. Por tanto, la pendiente es $m=-\frac{9}{4}$ y la ecuación punto pendiente: $r \equiv y=-\frac{9}{4}(x+3)+2$.

25. Dada la recta de ecuación $r \equiv y=-3(x+3)-5$, determina la ecuación continua de la recta.

Despejando en la ecuación, tenemos: $y=-3(x+3)-5 \Rightarrow y+5=-3(x+3) \Rightarrow \frac{y+5}{-3}=x+3$

Luego la ecuación continua es $r \equiv x+3=\frac{y+5}{-3}$

26. Determina la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A=(-3,1)$ y $B=(2,-5)$.

El vector $\overrightarrow{AB}=(5,-6)$ es un vector director. Por tanto, la ecuación continua es: $r \equiv \frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{-6}$

27. Determina la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $A=(1,-2)$ y $B=(-3,-2)$.

El vector $\overrightarrow{AB}=(-4,0)$ es un vector director de la recta y por tanto la pendiente es $m=\frac{0}{-4}=0$. La ecuación punto-pendiente de la recta es: $r \equiv y=-2$

28. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(5,-4)$ y forma un ángulo de 30° con la horizontal.

La pendiente de la recta es $m=\tan 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ y pasa por $A=(5,-4)$, por lo que la ecuación punto-pendiente será: $r \equiv y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-5)-4$

29. Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A=(7,-1)$ y $B=(-2,8)$

El vector $\overrightarrow{AB}=(-9,9)$ es un vector director de la recta. Por tanto: $r\equiv\begin{cases}x=7-9k\\ y=-1+9k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

30. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{u}$ en los siguientes casos:

a) $A=(-1,3),\vec{u}=(-5,2)$

La ecuación continua es $r\equiv\frac{x+1}{-5}=\frac{y-3}{2}$. Operando y despejando:

$\frac{x+1}{-5}=\frac{y-3}{2}\Rightarrow 2(x+1)=-5(y-3)\Rightarrow r\equiv 2x+5y-13=0$

b) $A=(2,-2),\vec{u}=(2,-1)$

El vector $\vec{n}=(1,2)$ es normal a la recta, cuya ecuación es, por tanto: $r\equiv x+2y+c=0$ con $c\in\mathbb{R}$. Sustituimos las coordenadas de A para hallar c: $2-4+c=0\Rightarrow c=2$. La ecuación general de la recta es: $r\equiv x+2y+2=0$

c) $A=(1,-2),\vec{u}=(8,-1)$

La pendiente de la recta es: $m=-\frac{1}{8}$ y la ecuación punto-pendiente: $r\equiv y=-\frac{1}{8}(x-1)-2$. Operando y despejando, tenemos:

$y+2=-\frac{1}{8}(x-1)\Rightarrow 8y+16=-x+1\Rightarrow r\equiv x+8y+15=0$

31. Dada la recta de ecuación $r\equiv -2x+5y-5=0$, determina:

a) **Tres puntos de la recta.** Dando valores a una variable, calculamos la otra:

$x=0\Rightarrow 5y-5=0\Rightarrow y=1\Rightarrow P=(0,1)$

$x=5\Rightarrow -10+5y-5=0\Rightarrow y=3\Rightarrow Q=(5,3)$

$x=-5\Rightarrow 10+5y-5=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow R=(-5,-1)$

b) **El vector director de la recta.** Como $\vec{n}=(-2,5)$ es un vector normal, el vector $\vec{u}=(5,2)$ es un vector director de la recta.

c) **La ecuación continua de la recta.** Usando el vector director $\vec{u}$ y el punto P: $r\equiv\frac{x}{5}=\frac{y-1}{2}$

32. Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $A=(1,4)$ y $B=(-2,1)$. El vector $\overrightarrow{AB}=(-3,-3)$ es un vector director de la recta y por tanto la pendiente es $m=\frac{-3}{-3}=1$. La ecuación punto-pendiente de la recta es: $r\equiv y=x-1+4$ y, despejando, la ecuación general es $r\equiv x-y+3=0$

b) $A=(1,2)$ y $B=(-2,-3)$. El vector $\overrightarrow{BA}=(3,5)$ es un vector director de la recta y por tanto la ecuación continua es: $r\equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}$. Operando y despejando:

$5(x-1)=3(y-2)\Rightarrow r\equiv 5x-3y+1=0$

c) $A=(-2,3)$ y $B=(5,8)$. El vector $\overrightarrow{AB}=(7,5)$ es un vector director de la recta y por tanto la ecuación continua es: $r\equiv \frac{x+2}{7}=\frac{y-3}{5}$. Operando y despejando:

$5(x+2)=7(y-3)\Rightarrow r\equiv 5x-7y+31=0$

33. Dada la recta de ecuación $r\equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}$, determina la ecuación general de la recta.

Operando y despejando sobre la ecuación:

$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}\Rightarrow 3(x+1)=-2(y-2)\Rightarrow r\equiv 3x+2y-1=0$

34. Dada la recta de ecuación $r\equiv 3x-5y-4=0$, determina la ecuación continua de la recta.

El vector $\vec{n}=(3,-5)$ es un vector normal a la recta y por tanto $\vec{u}=(5,3)$ es un vector director. Hallamos un punto de la recta dando un valor a una de las incógnitas:

$y=1\Rightarrow 3x-5-4=0\Rightarrow x=3\Rightarrow A=(3,1)$.

La ecuación continua de la recta es, por tanto: $r\equiv \frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{3}$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO

35. Determina la posición relativa de las rectas:

a) $r\equiv 2x+y=1$ y $s\equiv x-2y-3=0$. Como $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$, las rectas son secantes.

b) $r\equiv 2x-4y-6=0$ y $s\equiv -3x+6y+9=0$. Como $\frac{2}{-3}=\frac{-4}{6}=\frac{-6}{9}$, las rectas son coincidentes

c) $r\equiv -6x+2y+4=0$ y $s\equiv 9x-3y-6=0$. Como $\frac{-6}{9}=\frac{2}{-3}=\frac{4}{-6}$, las rectas son coincidentes

36. Determina la posición relativa de las rectas: $r\equiv x+3y+5=0$ y $s\equiv \frac{x+3}{-6}=\frac{y-2}{2}$.

El vector $\vec{n}=(1,3)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u}=(3,-1)$ es un vector director suyo. Por otra parte, $\vec{v}=(-6,2)$ es un vector director de s. Tenemos que $3\cdot 2=-1\cdot(-6)\Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$. Por tanto, las rectas son paralelas o coincidentes. Como el punto $A=(-5,0)$ pertenece a r pero no a s, se trata de rectas paralelas.

37. Determina el punto de intersección de las rectas:

a) $r\equiv -2x+y-1=0$; $s\equiv -2x+3y-3=0$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas por reducción:

$$\begin{cases}-2x+y-1=0\\-2x+3y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}+2x-y+1=0\\-2x+3y-3=0\end{cases}\Rightarrow 2y-2=0\Rightarrow y=1$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$y=1\Rightarrow -2x+1-1=0\Rightarrow x=0$. La intersección es el punto $P=(0,1)$

b) $r\equiv x-2y-3=0$; $s\equiv -4x+y+3=0$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas por reducción:

$$\begin{cases}x-2y-3=0\\-4x+y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}+4x-8y-12=0\\-4x+y+3=0\end{cases}\Rightarrow -7y-9=0\Rightarrow y=-\frac{9}{7}$$

$$\begin{cases}x-2y-3=0\\-4x+y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y-3=0\\-8x+2y+6=0\end{cases}\Rightarrow -7x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{7}$$

Por tanto, la intersección es el punto $P=\left(\frac{3}{7},-\frac{9}{7}\right)$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES. ÁNGULO ENTRE RECTAS.

38. Dada la recta $r\equiv -2x+3y+6=0$, determina la ecuación de la recta:

a) **Paralela a r que pasa por el punto $A=(-2,5)$.**

La recta pedida será $s\equiv -2x+3y+c=0$ con $c\in\mathbb{R}$. Sustituyendo las coordenadas de A podemos obtener: $A\in s\Rightarrow 4+15+c=0\Rightarrow c=-19$. La recta es: $s\equiv -2x+3y-19=0$

b) **Perpendicular a r que pasa por el punto $A=(5,-2)$.**

El vector $\vec{n}=(-2,3)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u}=(3,2)$ es un vector director suyo y normal a la perpendicular pedida, que será: $t\equiv 3x+2y+k=0$ con $k\in\mathbb{R}$. Para obtener el valor de k usamos las coordenadas de A: $A\in t\Rightarrow 15-4+k=0\Rightarrow k=-11$. La recta pedida es, por tanto: $t\equiv 3x+2y-11=0$

39. Dada la recta $r\equiv -2x+y+8=0$, determina:

a) **La ecuación general de la recta paralela a r que pasa por el punto $A=(-3,-1)$.**

La recta pedida será $s \equiv -2x + y + c = 0$ con $c \in \mathbb{R}$. Sustituyendo las coordenadas de A podemos obtener: $A \in s \Rightarrow 6 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -5$. La recta es: $s \equiv -2x + y - 5 = 0$

b) **La ecuación general de la recta perpendicular a r que pasa por el punto $A = (-2, 3)$.**

El vector $\vec{n} = (-2, 1)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u} = (1, 2)$ es un vector director suyo y normal a la perpendicular pedida, que será: $t \equiv x + 2y + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Para obtener el valor de k usamos las coordenadas de A: $A \in t \Rightarrow -2 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = -4$. La recta pedida es, por tanto: $t \equiv x + 2y - 4 = 0$

40. Dada la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{5}$, determina la ecuación general de la recta:

a) **Paralela a r que pasa por el punto $A = (-3, 2)$.**

$$s \equiv \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{5}$$

b) **Perpendicular a r que pasa por el punto $B = (2, 5)$.**

El vector $\vec{u} = (4, 5)$ es un vector director de la recta y por tanto normal a la perpendicular. Un vector director de la perpendicular será $\vec{u} = (5, -4)$ y su ecuación: $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-5}{-4}$

41. Determina el ángulo que forman las rectas r y s. Calcula el punto de intersección.

a) $r \equiv -2x + 3y = 0$ y $s \equiv x - 3y + 2 = 0$.

El ángulo que forman viene dado por el ángulo de sus vectores normales que son, respectivamente: $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (1, -3)$.

Así, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\dfrac{-11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}}\right) = \arccos\left(-\dfrac{11\sqrt{130}}{130}\right) \approx 164^\circ\, 44'\, 42''$

El punto de intersección es la solución al sistema:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Sustituyendo en la ecuación de s, tenemos que $2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}$. Por tanto, el punto de intersección es $P\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$.

b) $r \equiv 7x - y - 3 = 0$ y $s \equiv -x + 2y + 1 = 0$.

El ángulo que forman viene dado por el ángulo de sus vectores normales que son, respectivamente: $\vec{u} = (7, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$.

Así, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\dfrac{-9}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{5}}\right) = \arccos\left(-\dfrac{9\sqrt{10}}{50}\right) \approx 124^\circ\, 41'\, 43''$

El punto de intersección es la solución al sistema:

$$\begin{cases} 7x-y-3=0 \\ -x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x-2y-6=0 \\ -x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow 13x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{13}$$

$$\begin{cases} 7x-y-3=0 \\ -x+2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-y-3=0 \\ -7x+14y+7=0 \end{cases} \Rightarrow 13y+4=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{13}$$

Por tanto, el punto de intersección es $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{4}{13}\right)$.

c) $r \equiv x-3y+4=0$ y $s \equiv 3x+y-6=0$.

El ángulo que forman viene dado por el ángulo de sus vectores normales que son, respectivamente: $\vec{u}=(1,-3)$ y $\vec{v}=(3,1)$.

Así, $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}\right) = \arccos 0 = 90^{o}$

Las rectas son, pues, perpendiculares. El punto de intersección es la solución al sistema:

$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+4=0 \\ 9x+3y-18=0 \end{cases} \Rightarrow 10x-14=0 \Rightarrow x=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9y-12=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow 10y-18=0 \Rightarrow y=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$$

Por tanto, el punto de intersección es $P\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

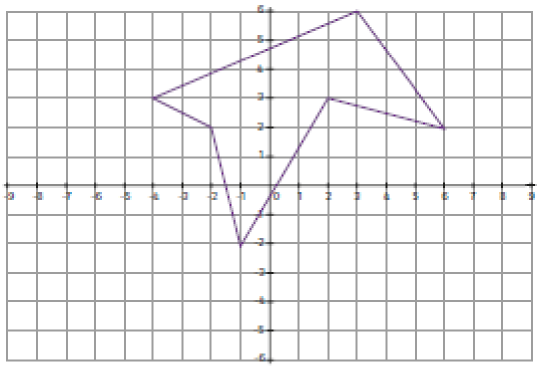
PROBLEMAS

42. Natividad y Alfredo se van de ruta de senderismo y realizan un circuito cerrado como el que se muestra a continuación. Si las coordenadas están dadas en kilómetros, ¿cuántos habrán recorrido?

Los vértices del polígono descrito son:

$A=(-4,3)$; $B=(3,6)$; $C=(6,2)$; $D=(2,3)$; $E=(-1,-2)$ y $F=(-2,2)$.

Calculamos la longitud de cada segmento hallando las distancias entre vértices consecutivos:



$$\left.\begin{array}{l} d(A,B)=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58} \\ d(B,C)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \\ d(C,D)=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17} \\ d(D,E)=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34} \\ d(E,F)=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17} \\ d(F,A)=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, han recorrido un total de $\sqrt{58}+5+\sqrt{17}+\sqrt{34}+\sqrt{17}+\sqrt{5} \approx 28{,}93\,km$

43. En la etapa de montaña de hoy, los ciclistas se van a encontrar con pendientes del 7%, el 12% y el 16%. ¿Qué ángulo con la horizontal formará la carretera en cada tramo de pendiente?

El porcentaje de una inclinación de una rampa indica la pendiente de la recta. Por tanto:

$$7\% \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{7}{100} \approx 4^{\circ}\,0'15''$$

$$12\% \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{12}{100} \approx 6^{\circ}\,50'34''$$

$$16\% \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{16}{100} = 9^{\circ}\,5'25''$$

44. Un automóvil circula por la autovía con la misma dirección que marca la recta $r \equiv 3x-4y+7=0$. Si la mediana de la carretera pasa por el punto $A=(3,1)$, ¿cuál es la ecuación de la recta que determina dicha mediana?

La recta de la mediana será paralela a la carretera y por tanto tendrá la forma $s \equiv 3x-4y+k=0$ con $k \in \mathbb{R}$. Sustituyendo las coordenadas de A podemos hallar: $A \in s \Rightarrow 9-4+k=0 \Rightarrow k=-5$. Por tanto, la recta pedida es: $s \equiv 3x-4y-5=0$

45. Determina el punto simétrico de $A=(1,-3)$ respecto a la recta $r \equiv 2x+y+1=0$.

Calculemos la recta perpendicular a r que pasa por A. El vector $\vec{n}=(2,1)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u}=(1,-2)$ es un vector director suyo y normal a la perpendicular pedida, que será: $s \equiv x-2y+c=0$. Usamos las coordenadas de A para hallar c: $A \in s \Rightarrow 1+6+c=0 \Rightarrow c=-7$. La recta buscada es $s \equiv x-2y-7=0$.

Hallemos ahora la intersección de r y s:

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+2=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow 5x-5=0 \Rightarrow x=1$$

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2x+4y+14=0 \end{cases} \Rightarrow 5y+15=0 \Rightarrow y=-3$$

La intersección de r y s es, así, el propio punto $A=(1,-3)$ que, como pertenece a la recta, es su propio simétrico.

46. Determina el punto simétrico de $A=(0,5)$ a la recta que pasa por los puntos $B=(2,1)$ y $C=(1,3)$

Para calcular la recta que pasa por B y C, consideremos que $\overrightarrow{BC}=(-1,2)$ es un vector director de esa recta y por tanto su ecuación continua es: $r \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}$. Operando y despejando, tenemos:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-4=-y+1 \Rightarrow r \equiv 2x+y-5=0$$

Calculemos ahora la recta perpendicular a r que pasa por A. Por ser $\overrightarrow{BC}=(-1,2)$ normal a dicha recta, su ecuación será: $s\equiv -x+2y+c=0$ con $c\in\mathbb{R}$. Sustituyendo las coordenadas de A: $A\in s\Rightarrow 10+c=0\Rightarrow c=-10$. La recta es: $s\equiv -x+2y-10=0$.

Hallamos el punto de intersección de r y s resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}2x+y-5=0\\-x+2y-10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-5=0\\-2x+4y-20=0\end{cases}\Rightarrow 5y-25=0\Rightarrow y=5$$

$$\begin{cases}2x+y-5=0\\-x+2y-10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x-2y+10=0\\-x+2y-10=0\end{cases}\Rightarrow -5x=0\Rightarrow x=0$$

El punto de intersección es el propio punto A, lo que quiere decir que su simétrico respecto de r es el mismo punto A.

47. Determina la distancia del punto $A=(5,1)$ a la recta $r\equiv 3x-y+2=0$.

La distancia de A a r coincide con la distancia entre A y el punto de intersección de r y una recta perpendicular a ella que pase por A. El vector $\vec{n}=(3,-1)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u}=(1,3)$ es un vector director suyo y normal a la perpendicular buscada: $s\equiv x+3y+c=0$. Sustituyendo las coordenadas de A, se obtiene: $A\in s\Rightarrow 5+3+c=0\Rightarrow c=-8$ y por tanto $s\equiv x+3y-8=0$. La intersección de r y s se calcula resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}3x-y+2=0\\x+3y-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-3y+6=0\\x+3y-8=0\end{cases}\Rightarrow 10x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases}3x-y+2=0\\x+3y-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y+2=0\\-3x-9y+24=0\end{cases}\Rightarrow -10y+26=0\Rightarrow y=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto de intersección es: $B=\left(\frac{1}{5},\frac{26}{5}\right)$. Finalmente, la distancia de A a r es:

$$d(A,r)=d(A,B)=\sqrt{\left(5-\frac{1}{5}\right)^2+\left(1-\frac{13}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24^2+8^2}{25}}=\frac{\sqrt{640}}{5}=\frac{8\sqrt{10}}{5}\approx 5{,}06$$

48. Un hombre se encuentra frente a la vía del tren en un tramo que discurre en línea recta. Si la vía describe la recta de ecuación $r\equiv 4x-3y+6=0$ y el hombre se encuentra situado en el punto $A=(-1,1)$, ¿a qué distancia estará el hombre de la vía del tren?

La distancia de A a r coincide con la distancia entre A y el punto de intersección de r y una recta perpendicular a ella que pase por A. El vector $\vec{n}=(4,-3)$ es normal a la recta r y por tanto $\vec{u}=(3,4)$ es un vector director suyo y normal a la perpendicular buscada: $s\equiv 3x+4y+c=0$. Sustituyendo las coordenadas de A, se obtiene: $A\in s\Rightarrow -3+4+c=0\Rightarrow c=-1$ y por tanto $s\equiv 3x+4y-1=0$. La intersección de r y s se calcula resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}4x-3y+6=0\\3x+4y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16x-12y+24=0\\9x+12y-3=0\end{cases}\Rightarrow 25x+21=0\Rightarrow x=-\frac{21}{25}$$

$$\begin{cases}4x-3y+6=0\\3x+4y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12x+9y-18=0\\12x+16y-4=0\end{cases}\Rightarrow 25y-22=0\Rightarrow y=\frac{22}{25}$$

Por tanto, el punto de intersección es: $B=\left(-\frac{21}{25},\frac{22}{25}\right)$. Finalmente, la distancia de A a r es:

$$d(A,r)=d(A,B)=\sqrt{\left(-1+\frac{21}{25}\right)^2+\left(1-\frac{22}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{4^2+3^2}{25^2}}=\sqrt{\frac{25}{25^2}}=\frac{1}{5}$$

49. Calcula el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A=(1,2)$, $B=(3,4)$ y $C=(-1,5)$.

Consideremos el segmento $\overline{AB}$ como la base del triángulo: $d(A,B)=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

La altura es la distancia desde el punto C a la base, esto es, a la recta r que pasa por A y B.

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{AB}=(2,2)$ y por tanto también a $\vec{u}=(1,1)$. La ecuación es: $r\equiv x-1=y-2\Rightarrow r\equiv x-y+1=0$. Como $\vec{u}=(1,1)$ es un vector normal de la perpendicular su ecuación es: $s\equiv x+y+c=0$. Sustituyendo las coordenadas de C, se obtiene: $C\in s\Rightarrow -1+5+c=0\Rightarrow c=-4$ y por tanto $s\equiv x+y-4=0$. La intersección de r y s se calcula resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

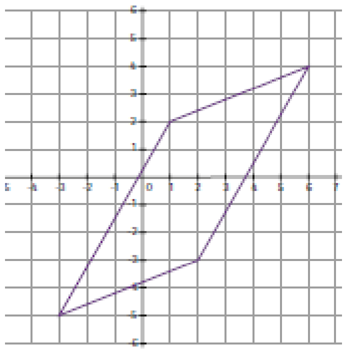
$$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-1=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow 2y-5=0\Rightarrow y=\frac{5}{2}$$

Por tanto, el punto de intersección es: $P=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. Por tanto, la altura del triángulo mide:

$$h=d(C,P)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(\frac{5}{2}-5\right)^2}=\sqrt{\frac{5^2+5^2}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Finalmente, el área del triángulo es: $S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{4}=\frac{20}{4}=5$

50. Calcula el área del paralelogramo:



Los vértices del paralelogramo son:

$A=(-3,-5)$, $B=(2,-3)$, $C=(6,4)$ y $D=(1,2)$.

La base será, por tanto, la longitud de $\overline{AB}$ y la altura la distancia de D a la recta r que pasa por A y B. La base mide: $d(A,B)=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$. La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{AB}=(5,2)$ y como vector normal, por tanto, a $\vec{n}=(2,-5)$. Su ecuación es: $r \equiv 2x-5y+c=0$. Sustituyendo las coordenadas de A, se obtiene: $A \in r \Rightarrow -6+25+c=0 \Rightarrow c=-19$ y por tanto $r \equiv 2x-5y-19=0$.

Como $\overrightarrow{AB}=(5,2)$ es un vector normal de la perpendicular su ecuación es: $s \equiv 5x+2y+k=0$. Sustituyendo las coordenadas de D, se obtiene: $D \in s \Rightarrow 5+4+k=0 \Rightarrow k=-9$ y por tanto $s \equiv 5x+2y-9=0$. La intersección de r y s se calcula resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y-19=0 \\ 5x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-10y-38=0 \\ 25x+10y-45=0 \end{cases} \Rightarrow 29x-83=0 \Rightarrow x=\frac{83}{29}$$

$$\begin{cases} 2x-5y-19=0 \\ 5x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x+25y+95=0 \\ 10x+4y-18=0 \end{cases} \Rightarrow 29y+77=0 \Rightarrow y=-\frac{77}{29}$$

Por tanto, el punto de intersección es: $P=\left(\frac{83}{29},-\frac{77}{29}\right)$ y la altura mide:

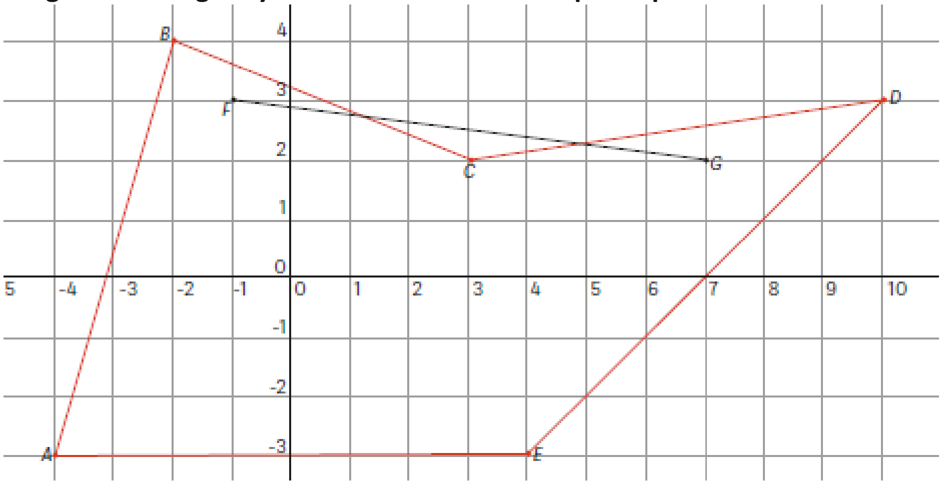
$$h=d(D,P)=\sqrt{\left(1-\frac{83}{29}\right)^2+\left(2+\frac{77}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{54^2+135^2}{29^2}}=\frac{\sqrt{21141}}{29}=\frac{27\sqrt{29}}{29}.$$

Finalmente, el área del paralelogramo es: $S=b\cdot h=\frac{\sqrt{29}\cdot 27\sqrt{29}}{29}=27$

DESAFÍO PISA - PÁG. 167

POLÍGONOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS

Decimos que un polígono es convexo si el segmento que une dos puntos de la región interior que el polígono determina sigue permaneciendo en dicha región. En caso contrario, diremos que el polígono es cóncavo.
Como podemos observar, en un polígono cóncavo hay un ángulo interior que es mayor de 180°.
Observa el pentágono de la figura y contesta las cuestiones que se plantean a continuación.



ACTIVIDAD 1. La longitud del lado $\overline{AB}$ es:

B: $\sqrt{53}$ ud, ya que $\overrightarrow{AB}=(2,7) \Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$

ACTIVIDAD 2. El simétrico del punto G respecto del lado $\overline{DE}$ es:

A: $(9,0)$. La recta que determina el lado $\overline{DE}$ tiene pendiente $m=1$ y su ecuación es: $y-3=x-10$ o, en forma general: $x-y=7$. Las perpendiculares a ella son de la forma $x+y=k$ y la que pasa por el punto G es $x+y=9$. El punto de intersección P de ambas es:

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=9 \end{cases} \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8; \quad P=(8,1)$$

El simétrico de G respecto de P es: $G+2\overrightarrow{GP}=(9,0)$

ACTIVIDAD 3. El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es:

B: $(-3,\ 0,5)$ ya que $\dfrac{A+B}{2}=(3,\ 0,5)$

ACTIVIDAD 4. La distancia de C al segmento $\overline{DE}$ es:

C: $3\sqrt{2}$ ud. Como la recta que determina el lado $\overline{DE}$ es $x-y=7$, la perpendicular que pasa por C es $x+y=5$. El punto Q de intersección de ambas:

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6; \quad Q=(6,-1)$$

La distancia de C a Q es: $\overline{CQ}=\sqrt{3^3+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ACTIVIDAD 5. La tangente del ángulo que determina el vértice A es:

C: 3,5. Trazando una vertical desde B se forma un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto al ángulo es 7 y el contiguo 2, por lo que $\tan\alpha=\dfrac{7}{2}=3,5$

ACTIVIDAD 6. La recta $x-7y+11=0$ contiene el lado:

B: $\overline{CD}$, ya que ambos puntos verifican la ecuación.