## UNIDAD 7: Trigonometría en ángulos orientados

### EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 136

**1. Calcula el número de vueltas que dan los siguientes ángulos y el ángulo menor de $360^\circ$ con el que corresponden:**

a) $750^\circ = 2\cdot 360^\circ + 30^\circ$. Da dos vueltas y se corresponde con $30^\circ$.
b) $1410^\circ = 3\cdot 360^\circ + 330^\circ$. Da tres vueltas y se corresponde con $330^\circ$.
c) $690^\circ = 360^\circ + 330^\circ$. Da una vuelta y se corresponde con $330^\circ$.
d) $900^\circ = 2\cdot 360^\circ + 180^\circ$. Da dos vueltas y se corresponde con $180^\circ$.
e) $1400^\circ = 3\cdot 360^\circ + 320^\circ$. Da tres vueltas y se corresponde con $320^\circ$.

**2. Determina el seno y el coseno de los siguientes ángulos utilizando la definición:**

a) $\operatorname{sen} 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1$
b) $\operatorname{sen} 270^\circ = -1, \quad \cos 270^\circ = 0$
c) $\operatorname{sen} 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$
d) $\operatorname{sen} 360^\circ = 0, \quad \cos 360^\circ = 1$
e) $\operatorname{sen} 450^\circ = 1, \quad \cos 450^\circ = 0$
f) $\operatorname{sen} 720^\circ = 0, \quad \cos 720^\circ = 1$

**3. A la vista de la actividad 2, ¿a qué ángulos no se les puede determinar la tangente?**

La tangente no se puede determinar si el valor del coseno es 0, esto es, si la segunda coordenada del punto que determina el ángulo es 0. Esto ocurre en los múltiplos impares de $90^\circ$ y el conjunto de todos esos ángulos se puede escribir como $\{(2k-1)\cdot 90^\circ \,/\, k \in \mathbb{N}\}$

### EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 137

**4. Determina el coseno de un ángulo del 2º cuadrante que verifique:**

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}8$.

Por la identidad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por lo que $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como el ángulo está en el segundo cuadrante, escogemos el valor negativo para el coseno: $\cos\alpha = -\sqrt{1-0{,}8^2} = -0{,}6$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Por la identidad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por lo que $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como el ángulo está en el segundo cuadrante, escogemos el valor negativo para el coseno: $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = -\dfrac{4}{5}$

**5. Determina el seno de un ángulo del 3^er cuadrante que verifique:**

a) $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Por la identidad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por lo que $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Como el ángulo está en el tercer cuadrante, escogemos el valor negativo para el seno: $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\tan\alpha = 2$. Dado que $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2$, se tiene $\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$ y por tanto, sustituyendo en la igualdad fundamental de la trigonometría y teniendo en cuenta que el seno debe ser negativo (por estar el ángulo en el tercer cuadrante):

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{4} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

**6. Determina el valor de la tangente de un ángulo del 4º cuadrante que verifique:**

a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Calculamos en primer lugar el seno del ángulo, que debe ser negativo por estar en el cuarto cuadrante. Por la identidad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por lo que $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = -\sqrt{\frac{14}{16}} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Por tanto: $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\sqrt{\frac{14}{2}} = -\sqrt{7}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculamos en primer lugar el coseno del ángulo, que debe ser positivo por estar en el cuarto cuadrante. Por la identidad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por lo que $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Por tanto: $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

## EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 138

**7. Pasa a radianes los siguientes ángulos:**

a) $40^\circ \rightarrow \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$

b) $150^\circ \rightarrow \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

c) $60^\circ \rightarrow \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

d) $330^\circ \rightarrow \frac{330\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$

e) $245^\circ \rightarrow \frac{245\pi}{180} = \frac{49\pi}{36}$

f) $290^\circ \rightarrow \frac{290\pi}{180} = \frac{29\pi}{18}$

**8. Pasa a grados los siguientes ángulos dados en radianes:**

a) $\frac{\pi}{8} \rightarrow \frac{180}{8} = \frac{45}{2} = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$

b) $\frac{5\pi}{8} \rightarrow \frac{5 \cdot 180}{8} = \frac{225}{2} = 112,5^\circ = 112^\circ 30'$

c) $\frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot 180}{3} = 120^\circ$

d) $3\pi \rightarrow 3 \cdot 180 = 540^\circ$

e) $\frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^\circ$

f) $\frac{3\pi}{5} \rightarrow \frac{3 \cdot 180}{5} = 108^\circ$

## EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 139

**9. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando ángulos del primer cuadrante:**

a) $156^\circ = 180^\circ - 24^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 156^\circ = \operatorname{sen} 24^\circ \quad \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ \quad \tan 156^\circ = -\tan 24^\circ$

b) $195^\circ = 180^\circ + 15^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 195^\circ = -\operatorname{sen} 15^\circ \quad \cos 195^\circ = -\cos 15^\circ \quad \tan 195^\circ = \tan 15^\circ$

c) $215^\circ = 180^\circ + 35^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 215^\circ = -\operatorname{sen} 35^\circ \quad \cos 215^\circ = -\cos 35^\circ \quad \tan 215^\circ = \tan 35^\circ$

d) $290^\circ = 360^\circ - 70^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 290^\circ = -\operatorname{sen} 70^\circ \quad \cos 290^\circ = \cos 70^\circ \quad \tan 290^\circ = -\tan 70^\circ$

e) $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ \quad \cos 315^\circ = \cos 45^\circ \quad \tan 315^\circ = -\tan 45^\circ$

f) $260^\circ = 180^\circ + 80^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 260^\circ = -\operatorname{sen} 80^\circ \quad \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ \quad \tan 260^\circ = \tan 80^\circ$

**10. Comprueba con la calculadora los resultados obtenidos en la actividad anterior.**

a) $\operatorname{sen} 156^\circ = \operatorname{sen} 24^\circ \approx 0,41 \quad \cos 156^\circ = -\cos 24^\circ \approx -0,91 \quad \tan 156^\circ = -\tan 24^\circ \approx -0,44$

b) $\operatorname{sen} 195^\circ = -\operatorname{sen} 15^\circ \approx -0,26 \quad \cos 195^\circ = -\cos 15^\circ \approx -0,97 \quad \tan 195^\circ = \tan 15^\circ \approx 0,27$

c) $\operatorname{sen} 215^\circ = -\operatorname{sen} 35^\circ \approx -0,57 \quad \cos 215^\circ = -\cos 35^\circ \approx -0,82 \quad \tan 215^\circ = \tan 35^\circ \approx 0,7$

d) $\operatorname{sen} 290^\circ = -\operatorname{sen} 70^\circ \approx -0,94 \quad \cos 290^\circ = \cos 70^\circ \approx 0,34 \quad \tan 290^\circ = -\tan 70^\circ \approx 2,75$

e) $\operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ \approx -0,71 \quad \cos 315^\circ = \cos 45^\circ \approx 0,71 \quad \tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$

f) $\operatorname{sen} 260^\circ = -\operatorname{sen} 80^\circ \approx -0,98 \quad \cos 260^\circ = -\cos 80^\circ \approx -0,17 \quad \tan 260^\circ = \tan 80^\circ \approx 5,67$

**11. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando ángulos del primer cuadrante:**

a) $\frac{7}{8}\pi = \pi - \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{7\pi}{8} = \text{sen}\,\frac{\pi}{8} \quad \cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8} \quad \tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8}$

b) $\frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \quad \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \tan\frac{5\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{11}{9}\pi = \pi + \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{11\pi}{9} = -\text{sen}\,\frac{2\pi}{9} \quad \cos\frac{11\pi}{9} = -\cos\frac{2\pi}{9} \quad \tan\frac{11\pi}{9} = \tan\frac{2\pi}{9}$

d) $\frac{17}{10}\pi = 2\pi - \frac{3\pi}{10} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{17\pi}{10} = -\text{sen}\,\frac{3\pi}{10} \quad \cos\frac{17\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10} \quad \tan\frac{17\pi}{10} = -\tan\frac{3\pi}{10}$

## EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 140

**12. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando las razones trigonométricas de los ángulos de $30^{\text{o}}$, $45^{\text{o}}$ y $60^{\text{o}}$.**

a) $\text{sen}\,30^{\text{o}} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}\,120^{\text{o}} = \text{sen}\,60^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 120^{\text{o}} = -\cos 60^{\text{o}} = -\frac{1}{2} \quad \tan 120^{\text{o}} = -\tan 120^{\text{o}} = -\sqrt{3}$

c) $\text{sen}\,210^{\text{o}} = -\text{sen}\,30^{\text{o}} = -\frac{1}{2} \quad \cos 210^{\text{o}} = -\cos 30^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 210^{\text{o}} = \tan 210^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{sen}\,225^{\text{o}} = -\text{sen}\,45^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 225^{\text{o}} = -\cos 45^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 225^{\text{o}} = \tan 45^{\text{o}} = 1$

e) $\text{sen}\,150^{\text{o}} = \text{sen}\,30^{\text{o}} = \frac{1}{2} \quad \cos 150^{\text{o}} = -\cos 30^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 150^{\text{o}} = -\tan 30^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{sen}\,135^{\text{o}} = \text{sen}\,45^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 135^{\text{o}} = -\cos 45^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 135^{\text{o}} = -\tan 45^{\text{o}} = -1$

**13. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sabiendo que $\text{sen}\left(15^{\text{o}}\right) = 0,2588$.**

Teniendo en cuenta que $\cos 15^{\text{o}} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,15^{\text{o}}} \approx 0,9659$ y $\tan 15^{\text{o}} = \frac{\text{sen}\,15^{\text{o}}}{\cos 15^{\text{o}}} \approx 0,2679$

a) $75^{\text{o}} = 90^{\text{o}} - 15^{\text{o}}$

$\text{sen}\,75^{\text{o}} = \cos 15^{\text{o}} \approx 0,9659$

$\cos 75^{\text{o}} = \text{sen}\,15^{\text{o}} \approx 0,2588$

$\tan 75^{\text{o}} = \frac{1}{\tan 15^{\text{o}}} \approx 3,7321$

b) $105^{\text{o}} = 180^{\text{o}} - 75^{\text{o}} = 180 - \left(90^{\text{o}} - 15^{\text{o}}\right)$

$\text{sen}\,105^{\text{o}} = \text{sen}\,75^{\text{o}} = \cos 15^{\text{o}} \approx 0,9659$

$\cos 195^{\text{o}} = -\cos 75^{\text{o}} = -\text{sen}\,15^{\text{o}} \approx -0,2588$

$$\tan 105^\circ = -\tan 75^\circ = -\frac{1}{\tan 15^\circ} \approx -3,7321$$

c) $195^\circ = 180^\circ + 15^\circ$

$\text{sen}\,195^\circ = -\text{sen}\,15^\circ \approx -0,2588$

$\cos 1955^\circ = -\cos 15^\circ \approx -0,9659$

$\tan 195^\circ = \tan 15 \approx 0,2679$

d) $285^\circ = 360^\circ - 75^\circ = 360 - (90^\circ - 15^\circ)$

$\text{sen}\,285^\circ = -\text{sen}\,75^\circ = -\cos 15^\circ \approx -0,9659$

$\cos 285^\circ = \cos 75^\circ = \text{sen}\,15^\circ \approx 0,2588$

$$\tan 285^\circ = -\tan 75^\circ = -\frac{1}{\tan 15^\circ} \approx -3,7321$$

## EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 141

**14. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando la periodicidad:**

a) $955^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 235^\circ$

$\text{sen}\,955^\circ = \text{sen}\,235^\circ \quad \cos 955^\circ = \cos 235^\circ \quad \tan 955^\circ = \tan 955^\circ$

b) $-1245^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 195^\circ$

$\text{sen}(-1245^\circ) = \text{sen}\,195^\circ \quad \cos(-1245^\circ) = \cos 195^\circ \quad \tan(-1245^\circ) = \tan 195^\circ$

c) $\frac{19\pi}{2} = 4 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$

$\text{sen}\,\frac{19\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \quad \cos\frac{19\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ y no existe $\tan\frac{19\pi}{2}$

d) $\frac{21\pi}{4} = 2 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4}$

$\text{sen}\,\frac{21\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} \quad \cos\frac{21\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} \quad \tan\frac{21\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4}$

**15. Calcula dos ángulos que verifiquen:**

a) $\text{sen}\,\alpha = -0,2345$.

Para que el seno sea negativo, el ángulo debe estar en el tercero o el cuarto cuadrante. Utilizando la calculadora: $\alpha = \text{arcsen}(-0,2345) \approx -13^\circ 33' 44''$.

Por tanto: $\alpha \approx 360 - 13^\circ 33' 44'' \approx 346^\circ 26' 16''$ ó $\alpha \approx 180 + 13^\circ 33' 44'' \approx 193^\circ 33' 44''$

b) $\text{sen}\,\alpha = 0,5$.

Para que el seno sea positivo, el ángulo debe estar en el primer o el segundo cuadrante. Sabemos que: $\alpha = \text{arcsen}(0,55) = 30^\circ$, por tanto: $\alpha = 30^\circ$ ó $\alpha = 180 - 30^\circ = 150^\circ$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Para que el coseno sea positivo, el ángulo debe estar en el primer o el cuarto cuadrante.

Utilizando la calculadora: $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) \approx 73^\circ 34' 12''$ .

Por tanto: $\alpha \approx 73^\circ 34' 12''$ ó $\alpha \approx 360 - 73^\circ 34' 12'' \approx 266^\circ 25' 48''$

d) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Para que el coseno sea negativo, el ángulo debe estar en el segundo o el tercer cuadrante.

Utilizando la calculadora: $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 115^\circ 39' 32''$ .

Por tanto: $\alpha \approx 115^\circ 39' 32''$ ó $\alpha \approx 360 - 115^\circ 39' 32'' \approx 240^\circ 20' 28''$

## EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGINAS 144-146

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

**1. Calcula el ángulo comprendido entre $0^\circ$ y $360^\circ$ que determina el mismo punto en la circunferencia goniométrica que los siguientes ángulos:**

a) $1190^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 110^\circ$ . El ángulo pedido es $110^\circ$
b) $2453^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 293^\circ$ . El ángulo pedido es $293^\circ$
c) $3284^\circ = 9 \cdot 360^\circ + 44^\circ$ . El ángulo pedido es $44^\circ$

**2. Calcula el ángulo comprendido entre $0^\circ$ y $360^\circ$ que determina el mismo punto en la circunferencia goniométrica que los siguientes ángulos:**

a) $-60^\circ = -360^\circ + 300^\circ$ . El ángulo pedido es $300^\circ$
b) $-298^\circ = -360^\circ + 62^\circ$ . El ángulo pedido es $62^\circ$
c) $-322^\circ = -360^\circ + 38^\circ$ . El ángulo pedido es $38^\circ$

**3. Calcula el ángulo comprendido entre $0^\circ$ y $360^\circ$ que determina el mismo punto en la circunferencia goniométrica que los siguientes ángulos:**

a) $-1394^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 46^\circ$ . El ángulo pedido es $46^\circ$
b) $-1998^\circ = -6 \cdot 360^\circ + 162^\circ$ . El ángulo pedido es $162^\circ$
c) $-1235^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 205^\circ$ . El ángulo pedido es $205^\circ$

**4. Utilizando la definición de razón trigonométrica de ángulo orientado, completa la siguiente tabla:**

| Ángulo | Coseno | Seno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 0º | 1 | 0 | 0 |
| 90º | 0 | 1 | no tiene |
| 180º | -1 | 0 | 0 |
| 270º | 0 | -1 | no tiene |
| 360º | 1 | 0 | 0 |

**5. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla utilizando la definición de seno, coseno y tangente de un ángulo orientado:**

| Ángulo | Coseno | Seno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 90º | 0 | 1 | no tiene |
| 180º | -1 | 0 | 0 |
| 270º | 0 | -1 | no tiene |
| 360º | 1 | 0 | 0 |

**6. Calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos utilizando la definición:**

a) $1800^\circ = 5\cdot 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,1800^\circ = 0 \quad \cos 1800^\circ = 1 \quad \tan 1800^\circ = 0$

b) $990^\circ = 2\cdot 360^\circ + 270^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,990^\circ = -1 \quad \cos 1800^\circ = 0$. No existe $\tan 990^\circ$

c) $1980^\circ = 5\cdot 360^\circ + 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,1980^\circ = 0 \quad \cos 1980^\circ = -1 \quad \tan 1980^\circ = 0$

d) $1530^\circ = 4\cdot 360^\circ + 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,1530^\circ = 1 \quad \cos 1530^\circ = 0$. No existe $\tan 1530^\circ$ .

**7. Calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos utilizando la definición:**

a) $-1440^\circ = -4\cdot 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(-1440^\circ\right) = 0 \quad \cos\left(-1440^\circ\right) = 1 \quad \tan\left(-1440^\circ\right) = 0$

b) $-1620^\circ = -5\cdot 360^\circ + 1800^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(-1620^\circ\right) = 0 \quad \cos\left(-1620^\circ\right) = -1 \quad \tan\left(-1620^\circ\right) = 0$

c) $-990^\circ = -3\cdot 360^\circ + 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(-990^\circ\right) = 1 \quad \cos\left(-990^\circ\right) = 0$. No existe $\tan\left(-990^\circ\right)$

d) $-1170^\circ = -4\cdot 360^\circ + 270^\circ \Rightarrow \text{sen}\left(-1170^\circ\right) = -1 \quad \cos\left(-1170^\circ\right) = 0$. No existe $\tan\left(-1170^\circ\right)$

**VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DEL SENO Y EL COSENO**

**8. ¿Existe algún ángulo que verifique la ecuación $2\left(\cos\alpha + 3\right) = 1 - \cos\alpha$ ? Razona tu respuesta.**

Despejando $\cos\alpha$ en la ecuación:

$$2\left(\cos\alpha + 3\right) = 1 - \cos\alpha$$

$$2\cos\alpha + 6 = 1 - \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -5$$

Lo cual no es posible ya que $-1 \le \cos\alpha \le 1$

**9. ¿Es posible encontrar algún ángulo que verifique la ecuación $\frac{1 - 3\,\text{sen}\,\alpha}{2} = \text{sen}\,\alpha + 1$ ? Razona tu respuesta y, en caso afirmativo, indica algún ángulo que resuelva la ecuación.**

Despejando $\text{sen}\,\alpha$ en la ecuación:

$$\frac{1-3\operatorname{sen}\alpha}{2}=\operatorname{sen}\alpha+1$$

$$1-3\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha+2$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{5}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{1}{5}\approx 11^{\circ}32'13''$$

**10. Indica el signo de las siguientes razones trigonométricas sin realizar los cálculos:**

a) $\operatorname{sen}135^{\circ}$. Como el ángulo está en el segundo cuadrante, el seno es positivo.
b) $\cos 330^{\circ}$. Como el ángulo está en el cuarto cuadrante, el coseno es positivo.
c) $\operatorname{sen}150^{\circ}$. Como el ángulo está en el segundo cuadrante, el seno es positivo.
d) $\tan 295^{\circ}$. Como el ángulo está en el cuarto cuadrante, la tangente es negativa.
e) $\tan 125^{\circ}$. Como el ángulo está en el segundo cuadrante, la tangente es negativa.
f) $\operatorname{sen}190^{\circ}$. Como el ángulo está en el tercer cuadrante, el seno es negativo.

**11. Si $\alpha$ es un ángulo del primer cuadrante, calcula el resto de razones trigonométricas en los siguientes casos:**

a) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2}{3}$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) $\tan\alpha=\dfrac{2}{5}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2}{5}\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\frac{4}{25}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=\sqrt{\frac{25}{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{5}\cos\alpha=\frac{2\sqrt{29}}{29}$$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{22}}{5}\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{22}}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{5}}=\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{66}}{3}$$

**12. Si $\alpha$ es un ángulo del segundo cuadrante, calcula el resto de razones trigonométricas si:**

a) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{2}{16}}=-\frac{\sqrt{14}}{4}\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{14}}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$$

b) $\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\frac{3}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3}\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$$

**13. Si $\alpha$ es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el resto de razones trigonométricas si:**

a) $\tan\alpha=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

b) $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

**14. Si $\alpha$ es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula el resto de razones trigonométricas si:**

a) $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{6}$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{35}}{6}}=-\frac{\sqrt{35}}{35}$$

b) $\tan\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{3}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{3}\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\frac{2}{3}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{3}\cos\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{5}=-\frac{\sqrt{90}}{15}=-\frac{3\sqrt{10}}{15}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

## RADIANES Y SISTEMA SEXAGESIMAL

**15. Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en sistema sexagesimal:**

a) $45^{\circ} \to \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

b) $135^{\circ} \to \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$

c) $315^{\circ} \to \frac{315\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$

d) $225^{\circ} \to \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$

e) $1235^{\circ} \to \frac{1235\pi}{180} = \frac{247\pi}{36}$

f) $65^{\circ} \to \frac{65\pi}{180} = \frac{13\pi}{36}$

**16. Pasa a grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:**

a) $\frac{5}{6}\pi \to \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^{\circ}$

b) $\frac{9}{4}\pi \to \frac{9 \cdot 180}{4} = 405^{\circ}$

c) $\frac{15}{8}\pi \to \frac{15 \cdot 180}{8} = 337,5^{\circ} = 337^{\circ}\,30'$

**17. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla sin utilizar calculadora:**

| Ángulo | Coseno | Seno | Tangente |
|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 1 | no tiene |
| $\pi$ | -1 | 0 | 0 |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 0 | -1 | no tiene |
| $2\pi$ | 1 | 0 | 0 |

**18. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la calculadora:**

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} \approx -0,71$

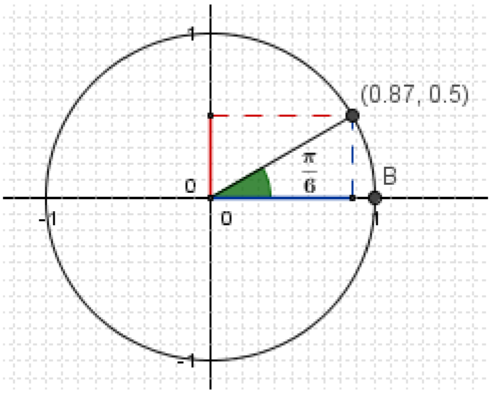
b) $\cos\frac{3\pi}{4} \approx -0,71$

c) $\tan\frac{5\pi}{8} \approx -2,41$

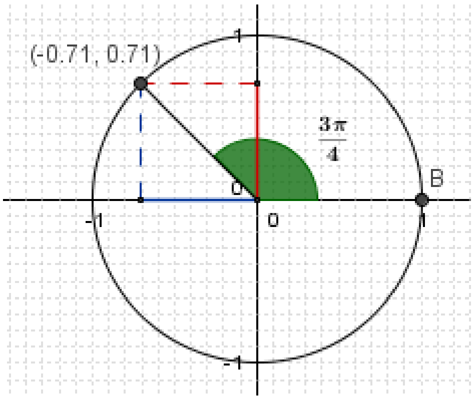
d) $\text{sen}\dfrac{4\pi}{5} \approx 0,59$

**19. Dibuja los siguientes ángulos en la circunferencia goniométrica e indica el signo de sus razones trigonométricas:**

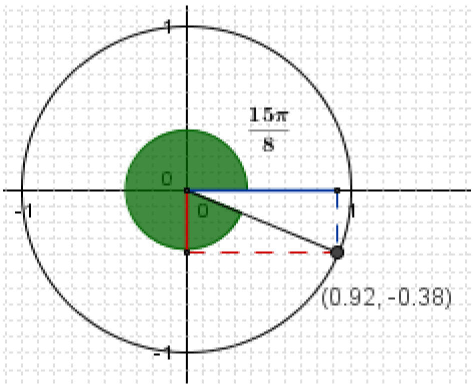
a) $\dfrac{\pi}{6}$. Tanto el seno como el coseno son positivos. Por tanto, la tangente es positiva.



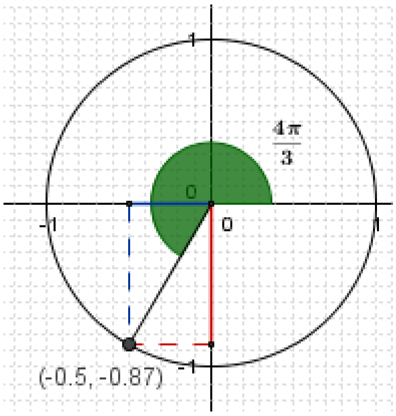

b) $\dfrac{3\pi}{4}$ El seno es positivo y el coseno negativo. Por tanto, la tangente es negativa.



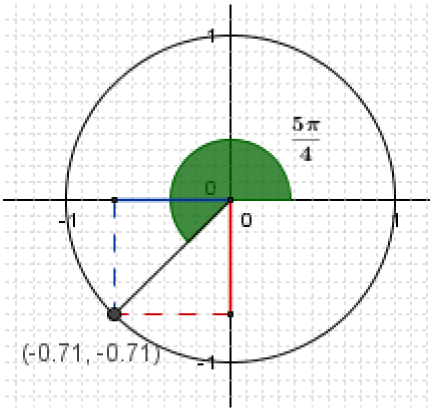

c) $\dfrac{15\pi}{8}$. El seno es negativo y el coseno positivo. Por tanto, la tangente es negativa.



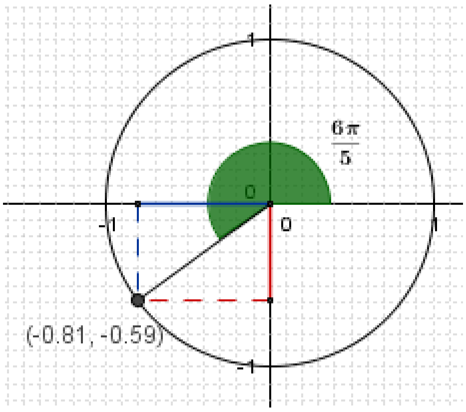

d) $\dfrac{4\pi}{3}$. Tanto el seno como el coseno son negativos. Por tanto, la tangente es positiva.




e) $\frac{5\pi}{4}$. Tanto el seno como el coseno son negativos. Por tanto, la tangente es positiva.




f) $\frac{6\pi}{5}$. Tanto el seno como el coseno son negativos. Por tanto, la tangente es positiva.




**20. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla sin utilizar calculadora:**

| Ángulo | Coseno | Seno | Tangente |
|---|---|---|---|
| $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $-1$ | no tiene |
| $-\pi$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $-\frac{3}{2}\pi$ | $0$ | $1$ | no tiene |
| $-2\pi$ | $1$ | $0$ | $0$ |

**21. Usa la calculadora para calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos dados en radianes:**

a) $\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\approx 0,71 \quad \cos\dfrac{\pi}{4}\approx 0,71 \quad \tan\dfrac{\pi}{4}=1$

b) $\text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\approx 0,87 \quad \cos\dfrac{2\pi}{3}=0,5 \quad \tan\dfrac{2\pi}{3}\approx 1,73$

c) $\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\approx -0,71 \quad \cos\dfrac{7\pi}{4}\approx 0,71 \quad \tan\dfrac{7\pi}{4}=-1$

**22. Determina el cuadrante en el que están cada uno de los siguientes ángulos en radianes:**

a) $0<1,5<\dfrac{\pi}{2}\rightarrow$ Primer cuadrante

b) $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{4\pi}{5}<\pi\rightarrow$ Segundo cuadrante

c) $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{5}<\pi\rightarrow$ Segundo cuadrante

d) $\dfrac{\pi}{2}<2,15<\pi\rightarrow$ Segundo cuadrante

e) $\pi<3,2<\dfrac{3\pi}{2}\rightarrow$ Tercer cuadrante

f) $\pi<\dfrac{4\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{2}\rightarrow$ Tercer cuadrante

**23. Determina el ángulo comprendido entre $0$ y $2\pi$ que determine el mismo punto en la circunferencia goniométrica en los siguientes casos:**

a) $\dfrac{14\pi}{5}=2\pi+\dfrac{4\pi}{5}$. El ángulo solicitado es $\dfrac{4\pi}{5}$.

b) $\dfrac{17\pi}{4}=2\cdot 2\pi+\dfrac{\pi}{4}$. El ángulo solicitado es $\dfrac{\pi}{4}$.

c) $\dfrac{27\pi}{5}=2\cdot 2\pi+\dfrac{7\pi}{5}$. El ángulo solicitado es $\dfrac{7\pi}{5}$.

d) $\dfrac{23\pi}{6}=2\pi+\dfrac{11\pi}{6}$. El ángulo solicitado es $\dfrac{11\pi}{6}$.

e) $\dfrac{31\pi}{5}=3\cdot 2\pi+\dfrac{\pi}{5}$. El ángulo solicitado es $\dfrac{\pi}{5}$.

f) $17\pi=8\cdot 2\pi+\pi$. El ángulo solicitado es $\pi$.

## REDUCCIÓN DE ÁNGULOS AL PRIMER CUADRANTE

**24. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando ángulos del primer cuadrante:**

a) $100^{\circ}=180^{\circ}-80^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}100^{\circ}=\operatorname{sen}80^{\circ} \quad \cos 100^{\circ}=-\cos 80^{\circ} \quad \tan 100^{\circ}=-\tan 80^{\circ}$

b) $110^{\circ}=180^{\circ}-70^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}110^{\circ}=\operatorname{sen}70^{\circ} \quad \cos 110^{\circ}=-\cos 70^{\circ} \quad \tan 110^{\circ}=-\tan 70^{\circ}$

c) $150^{\circ}=180^{\circ}-30^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}150^{\circ}=\operatorname{sen}30^{\circ} \quad \cos 150^{\circ}=-\cos 30^{\circ} \quad \tan 150^{\circ}=-\tan 30^{\circ}$

d) $165^{\circ}=180^{\circ}-15^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}165^{\circ}=\operatorname{sen}15^{\circ} \quad \cos 165^{\circ}=-\cos 15^{\circ} \quad \tan 165^{\circ}=-\tan 15^{\circ}$

e) $225^{\circ}=180^{\circ}+45^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}225^{\circ}=-\operatorname{sen}45^{\circ} \quad \cos 225^{\circ}=-\cos 45^{\circ} \quad \tan 225^{\circ}=\tan 45^{\circ}$

f) $315^{\circ}=360^{\circ}-45^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}315^{\circ}=-\operatorname{sen}45^{\circ} \quad \cos 315^{\circ}=\cos 45^{\circ} \quad \tan 315^{\circ}=-\tan 45^{\circ}$

**25. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos dados en radianes utilizando ángulos del primer cuadrante:**

a) $\frac{3}{5}\pi=\pi-\frac{2}{5}\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{3}{5}\pi=\operatorname{sen}\frac{2}{5}\pi \quad \cos\frac{3}{5}\pi=-\cos\frac{2}{5}\pi \quad \tan\frac{3}{5}\pi=-\tan\frac{2}{5}\pi$

b) $\frac{3}{4}\pi=\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad \cos\frac{3}{4}\pi=-\cos\frac{\pi}{4} \quad \tan\frac{3}{4}\pi=-\tan\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{7}{8}\pi=\pi-\frac{\pi}{8} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{7}{8}\pi=\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \quad \cos\frac{7}{8}\pi=-\cos\frac{\pi}{8} \quad \tan\frac{7}{8}\pi=-\tan\frac{\pi}{8}$

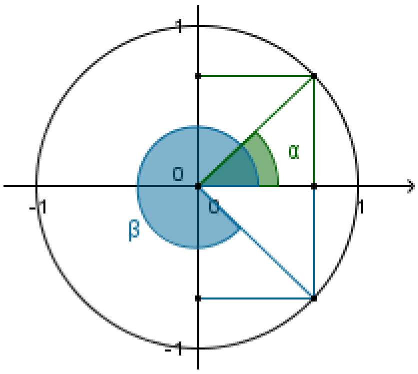
d) $\frac{5}{4}\pi=\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad \cos\frac{5}{4}\pi=-\cos\frac{\pi}{4} \quad \tan\frac{5}{4}\pi=\tan\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{11}{8}\pi=\pi+\frac{3\pi}{8} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{11}{8}\pi=-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \quad \cos\frac{11}{8}\pi=-\cos\frac{3\pi}{8} \quad \tan\frac{11}{8}\pi=\tan\frac{3\pi}{8}$

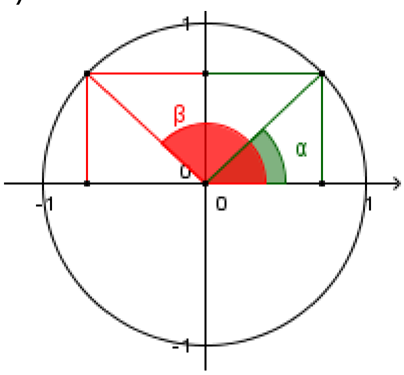
f) $\frac{7}{4}\pi=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \quad \cos\frac{7}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4} \quad \tan\frac{7}{4}\pi=-\tan\frac{\pi}{4}$

**26. Dibuja dos ángulos $\alpha$ y $\beta$, distintos que verifiquen:**

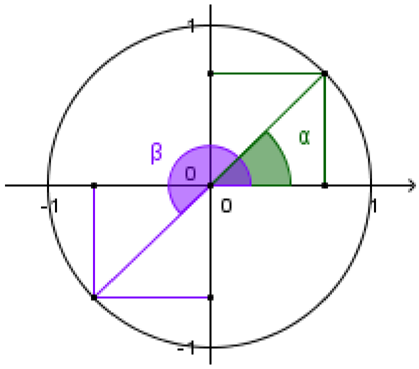
a) $\operatorname{sen}\alpha=-\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\alpha=\cos\beta$




b) $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\alpha=-\cos\beta$



c) $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$




## ÁNGULOS COMPLEMENTARIO, SUPLEMENTARIO Y OPUESTO

**27. Determina el ángulo complementario de los siguientes ángulos:**

a) $35^\circ \rightarrow 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

b) $\dfrac{\pi}{3} \rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

c) $\dfrac{\pi}{4} \rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

d) $15^\circ 42' 35'' \rightarrow 90^\circ - 15^\circ 42' 35'' = 74^\circ 17' 25''$

e) $\dfrac{\pi}{5} \rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{10}$

f) $25^\circ 12' \rightarrow 90^\circ - 25^\circ 12' = 64^\circ 48'$

**28. Calcula, utilizando la calculadora, el seno y el coseno de los ángulos del ejercicio anterior y comprueba que se verifica que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ y $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$ con $\alpha$ y $\beta$ complementarios,**

a) $\operatorname{sen} 35^\circ = \cos 55^\circ \approx 0,57$ $\qquad \cos 35^\circ = \operatorname{sen} 55^\circ \approx 0,82$

b) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \cos\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) Trivial, ya que $\dfrac{\pi}{4}$ es su propio complementario.

d) $\operatorname{sen} 15^\circ 42' 35'' = \cos 74^\circ 17' 25'' \approx 0,27$ $\qquad \cos 15^\circ 42' 35'' = \operatorname{sen} 74^\circ 17' 25'' \approx 0,96$

e) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5} = \cos\dfrac{3\pi}{10} = 0,59$ $\qquad \cos\dfrac{\pi}{5} = \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{10} = 0,81$

f) $\operatorname{sen} 25^\circ 12' = \cos 64^\circ 48' \approx 0,43$ $\qquad \cos 25^\circ 12' = \operatorname{sen} 64^\circ 48' \approx 0,9$

**29. Determina el ángulo suplementario de los siguientes ángulos:**

a) $120^\circ \rightarrow 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

b) $\dfrac{4\pi}{3} \rightarrow \pi - \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{\pi}{3} \rightarrow \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

d) $\dfrac{7\pi}{8} \rightarrow \pi - \dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{\pi}{8}$

e) $50^\circ \rightarrow 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

f) $90^\circ \rightarrow 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

**30. Calcula las siguientes razones trigonométricas sabiendo que** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **:**

Calculamos en primer lugar $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{2}{16}} = \sqrt{\dfrac{7}{8}} = \dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

a) $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

b) $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

c) $\tan(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{7}$

d) $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha = -\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

**31. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, sabiendo que** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$ **:**

Calculamos en primer lugar $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{7}{64}} = \sqrt{\dfrac{57}{64}} = \dfrac{\sqrt{57}}{8}$

a) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$

c) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha = -\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{8}}{\frac{\sqrt{57}}{8}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{57}} = -\dfrac{\sqrt{399}}{57}$

d) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{57}}{8}}{\frac{\sqrt{7}}{8}} = \sqrt{\dfrac{57}{7}} = \dfrac{\sqrt{399}}{7}$

**32. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando ángulos positivos:**

a) $90^\circ \rightarrow \operatorname{sen}90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$ y no existe la tangente del ángulo.

b) $-\dfrac{11\pi}{4}=-2\cdot 2\pi+\dfrac{5\pi}{4}$. Teniendo en cuenta que $\dfrac{5\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)=\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

c) $-\dfrac{7\pi}{4}=-2\pi+\dfrac{\pi}{4}$. Así, las razones trigonométricas de $-\dfrac{7\pi}{4}$ coinciden con las de $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

d) $-120^\circ=-360^\circ+240^\circ$. Así, las razones trigonométricas de $-120^\circ$ coinciden con las de $240^\circ$. Teniendo en cuenta que $240^\circ=180^\circ+60^\circ$

$$\operatorname{sen}(-120^\circ)=\operatorname{sen}240^\circ=-\operatorname{sen}60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-120^\circ)=\cos 240^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan(-120^\circ)=\tan 240^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

e) $-\dfrac{15\pi}{8}=-2\pi+\dfrac{\pi}{8}$. Así, las razones trigonométricas de $-\dfrac{15\pi}{8}$ coinciden con las de $\dfrac{\pi}{8}$.

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\approx 0,38$$

$$\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}\approx 0,92$$

$$\tan\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{8}\approx 0,41$$

f) $-300^\circ=-360^\circ+60^\circ$. Así, las razones trigonométricas de $-300^\circ$ coinciden con las de $60^\circ$.

$$\operatorname{sen}(-300^\circ)=\operatorname{sen}60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos(-300^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\quad \tan(-300^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

## PERIODICIDAD DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

**33. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la periodicidad:**

a) $\cos 1500^\circ=\cos(4\cdot 360^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

b) $\tan 1680^\circ=\tan(4\cdot 360^\circ+240^\circ)=\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

c) $\tan 1515^\circ=\tan(4\cdot 360^\circ+75^\circ)=\tan 75^\circ\approx 3,73$

d) $\operatorname{sen}2700^\circ=\operatorname{sen}(7\cdot 360^\circ+180^\circ)=\operatorname{sen}180^\circ=0$

**34. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la periodicidad:**

a) $\cos 7\pi = \cos(3\cdot 2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$

b) $\cos\frac{15\pi}{2} = \cos\left(3\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

c) $\operatorname{sen} 30\pi = \operatorname{sen}(15\cdot 2\pi) = \operatorname{sen} 0 = 0$

d) $\cos 18\pi = \cos(9\cdot 2\pi) = \cos 0 = 1$

e) $\tan\frac{35\pi}{4} = \tan\left(4\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

f) $\operatorname{sen}\frac{23\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(5\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0$

**35. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la periodicidad:**

a) $\cos\frac{17\pi}{4} = \cos\left(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\tan\frac{19\pi}{5} = \tan\left(2\pi + \frac{9\pi}{5}\right) = \tan\frac{9\pi}{5} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\tan\frac{\pi}{5} \approx -0,73$

c) $\operatorname{sen}\frac{21\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(2\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\frac{35\pi}{6} = \cos\left(2\cdot 2\pi + \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\tan\frac{23\pi}{6} = \tan\left(2\pi + \frac{11\pi}{6}\right) = \tan\frac{11\pi}{6} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\cos\frac{49\pi}{8} = \cos\left(3\cdot 2\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} \approx 0,92$

**36. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la periodicidad:**

a) $\cos -550^\circ = \cos(-2\cdot 360^\circ + 170^\circ) = \cos 170^\circ \approx -0,98$

b) $\tan -530^\circ = \tan(-2\cdot 360^\circ + 190^\circ) = \tan 190^\circ \approx 0,18$

c) $\operatorname{sen} -1240^\circ = \operatorname{sen}(-4\cdot 360^\circ + 200^\circ) = \operatorname{sen} 200^\circ \approx -0,34$

d) $\tan -1475^\circ = \tan(-5\cdot 360^\circ + 325^\circ) = \tan 325^\circ = \tan(360^\circ - 35^\circ) = -\tan 35^\circ \approx -0,70$

**37. Calcula las siguientes razones trigonométricas utilizando la periodicidad:**

a) $\tan -\frac{15\pi}{4} = \tan\left(-2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

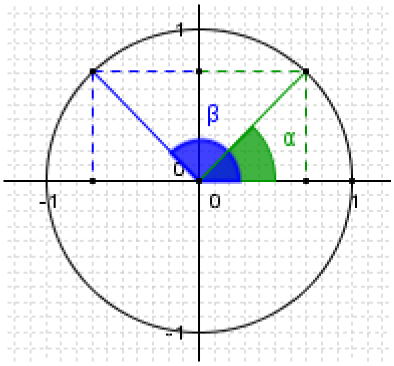
b) $\cos -\dfrac{21\pi}{5} = \cos\left(-3\cdot 2\pi + \dfrac{9\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5} \approx 0,81$

c) $\operatorname{sen} -\dfrac{23\pi}{8} = \operatorname{sen}\left(-2\cdot 2\pi + \dfrac{9\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{8} = \operatorname{sen}\left(\pi + \dfrac{\pi}{8}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8} \approx -0,38$

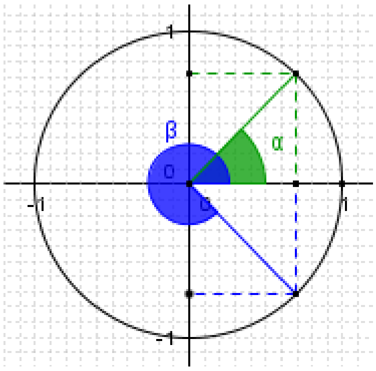
d) $\cos -\dfrac{31\pi}{6} = \cos\left(-3\cdot 2\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**38. Dibuja dos ángulos distintos que verifiquen:**

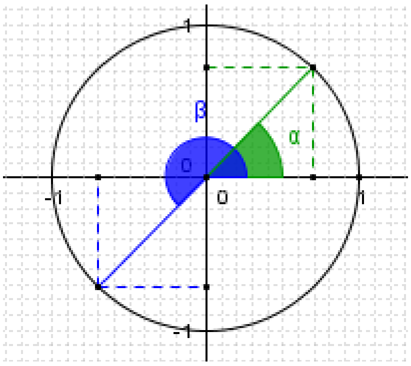
a) Tengan igual seno:




b) Tengan igual coseno:




c) Tengan igual tangente:




**39. Determina, utilizando la calculadora, dos ángulos distintos que verifiquen:**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5} \approx 69^\circ\,43'56''$ o también, si el ángulo está situado en el cuarto cuadrante $\alpha \approx 360^\circ - 69^\circ\,43'56'' \approx 290^\circ 16'4''$

b) $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arcsen}-\frac{\sqrt{6}}{6}\approx-24^{\circ}5'41''=335^{\circ}54'19''$ o también, situando el ángulo en el tercer cuadrante, $\alpha\approx180^{\circ}+24^{\circ}5'41''\approx204^{\circ}5'41''$

**40. Determina, utilizando la calculadora, dos ángulos distintos que verifiquen:**

a) $\tan\alpha=-1\Rightarrow\alpha=\arctan-1=-45^{\circ}=315^{\circ}$ o también, si el ángulo está situado en el segundo cuadrante, $\alpha=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$

b) $\tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=\arctan-\frac{1}{\sqrt{3}}=-30^{\circ}$ o también, si el ángulo está situado en el segundo cuadrante, $\alpha=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$

**41. Calcula los ángulos comprendidos entre $0^{\circ}$ y $360^{\circ}$ que verifican $5\operatorname{sen}\alpha+2\cos^2\alpha=4$.**

Considerando que $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$, sustituimos en la ecuación dada y obtenemos: $5\operatorname{sen}\alpha+2-2\operatorname{sen}^2\alpha=4$, de donde, reordenando: $2\operatorname{sen}^2\alpha-5\operatorname{sen}\alpha+2=0$. Haciendo el cambio $t=\operatorname{sen}\alpha$ obtenemos una ecuación de segundo grado:

$$2t^2-5t+2=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}t_1=2\\ t_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

La solución $t_1=2$ no es válida ya que $t=\operatorname{sen}\alpha\le1$. Por tanto:

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=30^{\circ}$ o, si el ángulo $\alpha$ está situado en el segundo cuadrante: $\alpha=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$

## PROBLEMAS

**42. Unos amigos están jugando a la ruleta en el suelo; si la flecha apunta a Lucía y en un descuido Alberto la gira hacia la izquierda $30^{\circ}$ y luego la gira hacia la derecha $\frac{\pi}{6}$, ¿a qué lado de Lucía está apuntando ahora?**

La flecha está apuntando a Lucía, ya que $30^{\circ}=\frac{\pi}{6}$ y el segundo giro corrige el primero.

**43. En un circuito de velocidad circular un ciclista está dando vueltas. Si describe un ángulo de $\frac{58\pi}{3}$, ¿cuántas vueltas completas ha dado?**

Como $\frac{58\pi}{3}=18\pi+\frac{5\pi}{3}=9\cdot2\pi+\frac{5\pi}{3}$, el ciclista ha dado nueve vueltas completas y le falta poco ( $\frac{\pi}{6}=30^{\circ}$ ) para completar la décima vuelta.

**44. Determina la velocidad angular a la que se mueve el segundero de un reloj.**

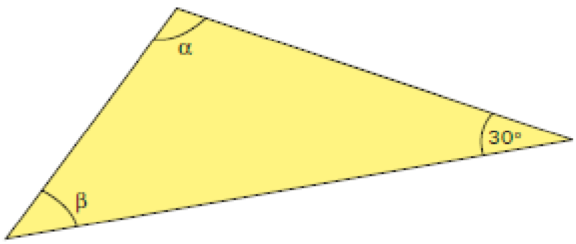
La circunferencia de un reloj está dividida en sesenta secciones iguales que la manecilla recorre a razón de una por segundo. Por tanto, el ángulo que recorre la manecilla en un segundo es $\frac{360^{\circ}}{60}=6^{\circ}$ y la velocidad angular es, por tanto, de $6^{\circ}$ por segundo o, expresado en radianes: $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}rad/s$.

**45. Un perro está dando vueltas sobre sí mismo a una velocidad angular de 0,9 rad/s. ¿Qué ángulo, expresado en grados, habrá recorrido en 3 s? Nota: la velocidad angular se obtiene dividiendo el ángulo recorrido entre el tiempo.**

El ángulo recorrido, en radianes, será de $3\cdot 0,9=2,7\,rad$. Convertimos a grados sexagesimales:

$$\alpha=\frac{180\cdot 2,7}{\pi}\approx 154^{\circ}\,41'\,55''$$

**46. Tres amigos están situados de forma que describen un triángulo como se muestra en la figura. Calculan la tangente del ángulo $\alpha+\beta$ y se vuelven a mover para formar un nuevo triángulo, con uno de sus ángulos de $30^{\circ}$. ¿Sigue siendo la tangente de $\alpha+\beta$ la misma?**




Como el tercer ángulo del triángulo es siempre $30^{\circ}$, la suma $\alpha+\beta$ no cambia ya que:
$180^{\circ}=\alpha+\beta+30^{\circ}\Rightarrow\alpha+\beta=150^{\circ}$. Por tanto, la tangente de $\alpha+\beta$ sigue siendo la misma.

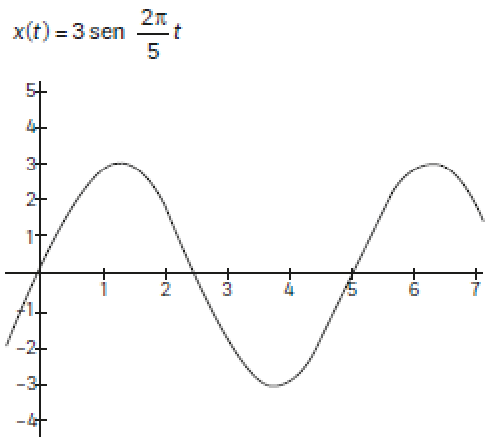
**47. Unos operarios están poniendo los bordillos de una isleta con forma de sector circular de 4 m de radio. Si el ángulo que forma este parterre es de $120^{\circ}$, ¿qué área encierra la isleta?**

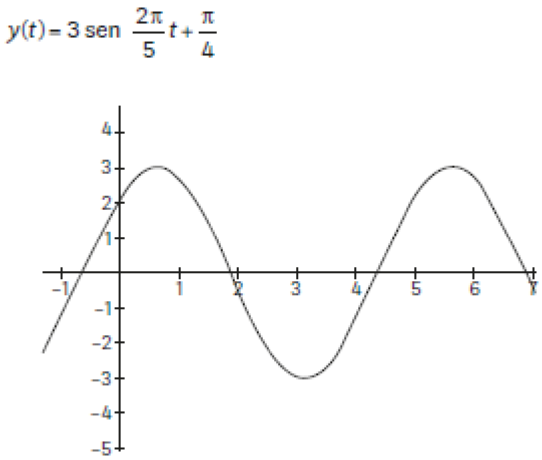
$$A_{sector}=\frac{120}{360}\cdot\pi r^{2}=\frac{16\pi}{3}m^{2}\approx 16,76\,m^{2}$$

## DESAFÍO PISA - PÁG. 147

**UNA ONDA SINUOSA**

**La elongación de una onda simple está determinada por la fórmula $x(t)=A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$, donde $\omega$ es la velocidad angular, $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $A$ es la amplitud máxima, $\varphi$ el ángulo de desfase, es decir, el ángulo de posición inicial, y $T$ es el tiempo que transcurre hasta que está en la misma posición inicial, esto es, el periodo. Observa las gráficas, donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos.**




**ACTIVIDAD 1. La amplitud máxima en ambas ondas es:**

B: 3 m

**ACTIVIDAD 2. El tiempo que tiene que pasar para que $y(t)=0$ por primera vez es:**

C: 1,875 s. $y(t)=0 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow t=-\frac{5}{8}+\frac{5}{2}k$ .

Tomando $k=1$ tendremos que $t=-\frac{5}{8}+\frac{5}{2}=\frac{15}{8}=1{,}875$

**ACTIVIDAD 3. El tiempo que tiene que pasar para que $y(t)=0$ por segunda vez es:**

B: 4,375. Tomando $k=2$ tendremos que $t=-\frac{5}{8}+5=\frac{35}{8}=4{,}375$

**ACTIVIDAD 4: Si el desfase en la onda $y(t)$ es $\pi$ , entonces la onda tiene amplitud cero pasados:**

A: 2,5 s. $y(t)=0 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t+\pi\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t+\pi=k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t=-\pi+k\pi \Leftrightarrow t=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}k$ .

Tomando $k=2$ tendremos que $t=-\frac{5}{8}+5=\frac{5}{2}=2{,}5$

**ACTIVIDAD 5: Si $y(t)=1{,}5$ m, los segundos transcurridos son, aproximadamente:**

C: 4,79 s. $y(t)=1{,}5 \Leftrightarrow 3\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

Por tanto, $\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5}t=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \Leftrightarrow t=-\frac{5}{24}+5k$

Tomando $k=1$ tendremos que $t=-\frac{5}{24}+5\approx 4{,}79$