UNIDAD 6: Trigonometría en ángulos agudos

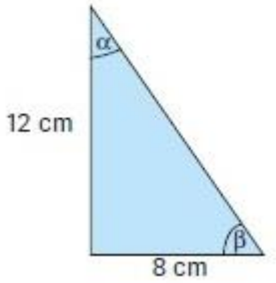
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 118

1. Calcula el valor de las razones trigonométricas en los siguientes triángulos rectángulos.

a) Calculamos la hipotenusa utilizando el Teorema de Pitágoras:

$h=\sqrt{12^2+8^2}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}\,cm$.

Las razones trigonométricas de α son:



$$\text{sen}\,\alpha=\frac{8}{4\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{4\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

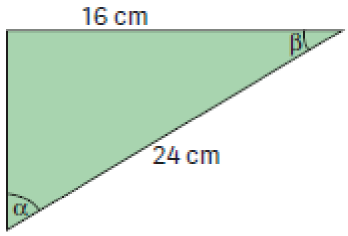
$$\tan\alpha=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Las razones trigonométricas de β son: $\text{sen}\,\beta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos\beta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\tan\beta=\frac{3}{2}$

b) Calculamos el cateto restante usando el Teorema de Pitágoras:

$a=\sqrt{24^2-16^2}=\sqrt{320}=8\sqrt{5}\,cm$.

Las razones trigonométricas de α son:



$$\text{sen}\,\alpha=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{8\sqrt{5}}{24}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

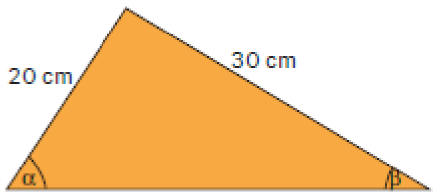
$$\tan\alpha=\frac{16}{8\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, las razones trigonométricas de β son: $\text{sen}\,\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\tan\beta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) Calculamos la hipotenusa usando el Teorema de Pitágoras:

$h=\sqrt{20^2+30^2}=\sqrt{1300}=10\sqrt{13}\,cm$.

Las razones trigonométricas de α son:



$$\text{sen}\,\alpha=\frac{30}{10\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\alpha=\frac{20}{10\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan\alpha=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

Las razones trigonométricas de β son: $\text{sen}\,\beta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\beta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\tan\beta=\frac{2}{3}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 119

2. Calcula el resto de razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0,3$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\cos^2\alpha = 1 - 0,3^2 = 0,91 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,91} \approx 0,95$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \approx \dfrac{0,3}{0,96} \approx 0,31$

b) $\cos\alpha = 0,5$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 0,5^2 = 0,75 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{0,75} \approx 0,87$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \approx \dfrac{0,87}{0,5} \approx 1,73$

c) $\tan\alpha = 5$. Utilizando la definición de tangente, tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 5 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 5\cos\alpha$$

Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 25\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{26}} \approx 0,196.$$

Calculamos el seno: $\operatorname{sen}\alpha = 5\cos\alpha = 5\sqrt{\dfrac{1}{26}} = 0,98$

3. Calcula el seno y el coseno de un ángulo sabiendo que:

a) $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. Utilizando la definición de tangente, tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha$$

Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Calculamos el coseno: $\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$. Utilizando la definición de tangente, tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}\cos\alpha$$

Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Calculamos el seno: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

c) $\tan\alpha = \dfrac{1}{4}$. Utilizando la definición de tangente, tenemos que:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha$$

Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + 16\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{7}.$$

Calculamos el coseno: $\cos\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 120

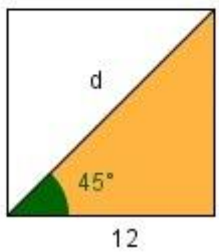
4. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 45º utilizando un cuadrado de 12 cm de lado.

La diagonal del cuadrado es la hipotenusa de triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 12 cm.
Por el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 12^2 + 12^2 \Rightarrow d = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}\,cm$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45º son, por tanto:

$$\operatorname{sen}45^{o} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^{o} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^{o} = \frac{12}{12} = 1$$



5. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 30º y 60º utilizando un triángulo equilátero de 16 cm de lado.

Trazando la altura h desde un vértice tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado del triángulo y los catetos la altura y la mitad de la base. Por el Teorema de Pitágoras:

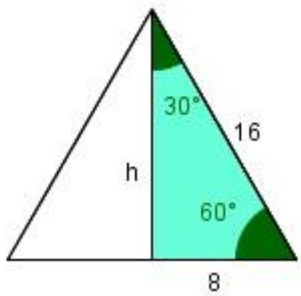
$$h^2 = 16^2 - 8^2 \Rightarrow d = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}\,cm$$

Las razones trigonométricas de 30º y de 60º son:

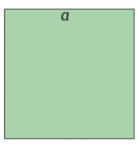
$$\operatorname{sen}30^{o} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}60^{o} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^{o} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^{o} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^{o} = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^{o} = \frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$$



6. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 45º utilizando un cuadrado de lado a.



Trazando la diagonal d del cuadrado obtenemos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden a 12 cm y la diagonal, por el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}\,cm$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45º son, por tanto:

$$\operatorname{sen}45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45^{o} = \frac{a}{a} = 1$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 121

7. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos utilizando la calculadora:

a) $42^\circ 12' 17''$

$\operatorname{sen}(42^\circ 12' 17'') \approx 0,67 \quad \cos(42^\circ 12' 17'') \approx 0,74 \quad \tan(42^\circ 12' 17'') \approx 0,91$

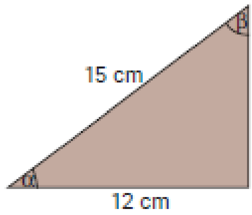
b) $84^\circ 32'$

$\operatorname{sen}(84^\circ 32') \approx 0,995 \quad \cos(84^\circ 32') \approx 0,095 \quad \tan(84^\circ 32') \approx 10,449$

c) $20^\circ 12'$

$\operatorname{sen}(20^\circ 12') \approx 0,35 \quad \cos(20^\circ 12') \approx 0,94 \quad \tan(20^\circ 12') \approx 0,37$

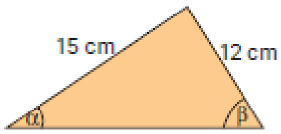
8. Calcula los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos:



En el primer triángulo, podemos usar el arcocoseno de α :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{15}\right) \approx 36,87 \approx 36^\circ 52' 12''$$

Por tanto: $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53,13 \approx 53^\circ 7' 48''$



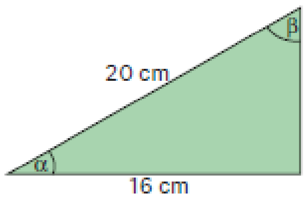
En el segundo triángulo utilizamos la arcotangente de α :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{12}{15}\right) \approx 38,66 \approx 38^\circ 39' 35''$$

Por tanto: $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 51,34 \approx 51^\circ 20' 25''$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 122

9. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

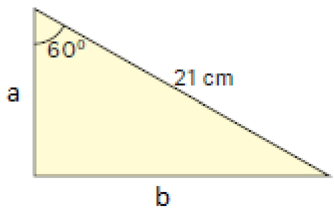


Para conocer el cateto a que falta podemos utilizar el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 20^2 - 16^2 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12\,cm$$

El ángulo α es $\alpha = \arccos\left(\frac{16}{20}\right) \approx 36,87 \approx 36^\circ 52' 12''$

y por tanto: $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53,13 \approx 53^\circ 7' 48''$



En el segundo caso, faltan los dos catetos a y b .

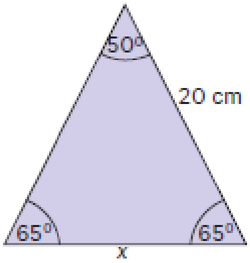
$$\cos 60^\circ = \frac{a}{21} \Rightarrow a = 21 \cdot \cos 60^\circ = \frac{21}{2} = 10,5\,cm$$

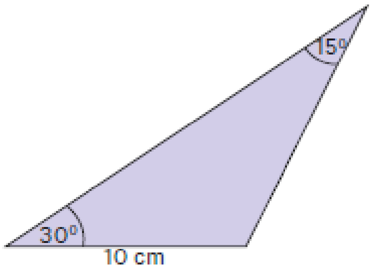
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{b}{21} \Rightarrow b = 21 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{2}\,cm \approx 18,19\,cm$$

El ángulo que falta es $\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 123

10. Aplica el teorema del seno para calcular el lado que falta en cada uno de los siguientes triángulos:





Triángulo 1:

$$\frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{x}=\frac{\operatorname{sen} 65^\circ}{20}\Rightarrow x=\frac{20\cdot\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 65^\circ}\approx 16,9\,cm$$

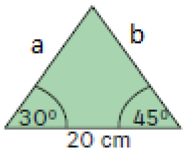
Triángulo 2:

$$\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{a}=\frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{10}\Rightarrow a=\frac{10\cdot\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ}\approx 19,32\,cm$$

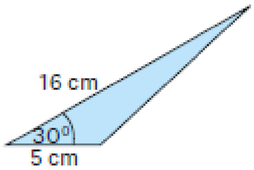
$$\frac{\operatorname{sen} 135^\circ}{b}=\frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{10}\Rightarrow b=\frac{10\cdot\operatorname{sen} 135^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ}\approx 27,32\,cm$$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 124

11. Resuelve los siguientes triángulos:



El ángulo que falta es $180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$.
Aplicando el teorema del seno:



$$\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{a}=\frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{20}\Rightarrow a=\frac{20\cdot\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ}\approx 14,64\,cm$$

$$\frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{b}=\frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{20}\Rightarrow b=\frac{20\cdot\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ}\approx 10,35\,cm$$

En el segundo triángulo, podemos utilizar el teorema del coseno para hallar el lado x que falta:

$$x^2=16^2+5^2-2\cdot 16\cdot 5\cdot\cos 30^\circ\Rightarrow x^2\approx 419,56\Rightarrow x\approx 20,48\,cm$$

Por el teorema del seno, el ángulo agudo α es:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{5}=\frac{\operatorname{sen} 30}{20,48}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{5\cdot\operatorname{sen} 45^\circ}{20,48}\approx 0,17\Rightarrow \alpha=\operatorname{arcsen} 0,17\approx 9^\circ 56' 22''$$

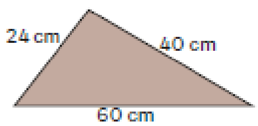
El tercer ángulo es, por tanto: $180^\circ-(30^\circ+9^\circ 56' 22'')\approx 140^\circ 3' 38''$

Por último, en el tercer triángulo podemos hallar el ángulo de la izquierda utilizando el teorema del coseno:

$$40^2=24^2+60^2-2\cdot 24\cdot 60\cdot\cos\alpha\Rightarrow \cos\alpha=0,89\widehat{4}\Rightarrow \alpha=\arccos\left(0,89\widehat{4}\right)\approx 26^\circ 33' 46''$$

Por tanto, el ángulo β opuesto al lado corto:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{24}=\frac{\operatorname{sen} 26^\circ 33' 46''}{40}$$



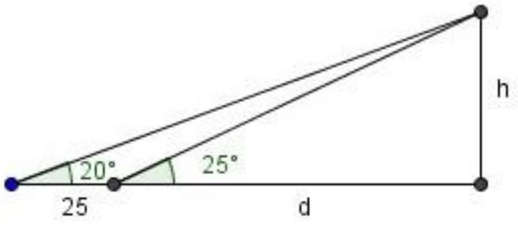
$$\operatorname{sen}\beta=\frac{24\cdot\operatorname{sen} 26^\circ 33' 46''}{40}\approx 0,27\Rightarrow \beta=\operatorname{arcsen} 0,27\approx 15^\circ 33' 49''$$

El tercer ángulo será $180^\circ-(26^\circ 33' 46''+15^\circ 33' 49'')\approx 137^\circ 52' 25''$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 125

12. El conductor de un automóvil que circula en línea recta por una carretera observa una luz que proviene del piso 10 de un bloque de pisos que tiene en frente bajo un ángulo de 20^o , avanza hacia el bloque 25 m y el ángulo es de 25^o . ¿A qué distancia del bloque de pisos se encuentra el conductor?

Construimos el siguiente sistema:



$$\begin{cases} \tan 20^o = \dfrac{h}{d+25} \\ \tan 25^o = \dfrac{h}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d+25)\cdot \tan 20^o = h \\ d\cdot \tan 25^o = h \end{cases}$$

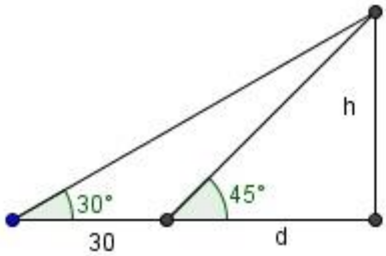
Igualando:

$$(d+25)\cdot \tan 20^o = d\cdot \tan 25^o \Rightarrow d = \frac{25\cdot \tan 20^o}{\tan 25^o - \tan 20^o} \approx 88{,}91m$$

Por tanto, el conductor se encuentra a $88{,}91m$ del bloque de pisos.

13. Desde la playa observamos que la cima de un risco próximo está bajo un ángulo de 30^o , avanzamos 30 m en dirección al acantilado y vemos que éste queda bajo un ángulo de 45^o . Calcula la altura del risco.

Construimos el siguiente sistema:



$$\begin{cases} \tan 30^o = \dfrac{h}{d+30} \\ \tan 45^o = \dfrac{h}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{h}{\tan 30^o} - 30 \\ d = \dfrac{h}{\tan 45^o} \end{cases}$$

Igualando:

$$\frac{h}{\tan 30^o} - 30 = \frac{h}{\tan 45^o} \Rightarrow h = \frac{30 \tan 30^o \tan 45^o}{\tan 45^o - \tan 20^o} \approx 40{,}98m$$

Por tanto, el risco está a $40{,}98m$ de altura.

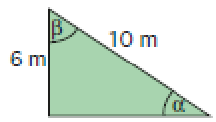
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁGINAS 128-130

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos utilizando la definición:

Triángulo 1. Calculamos el cateto que falta utilizando el Teorema de Pitágoras :

$a = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8m$. Las razones trigonométricas de α son:



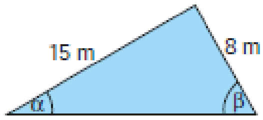
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, las razones trigonométricas de β son:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad \tan\beta = \frac{4}{3}$$

Triángulo 2. La hipotenusa es: $h=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17\,m$. Las razones de α son:

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{8}{17}$ $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ $\tan\alpha=\frac{8}{15}$

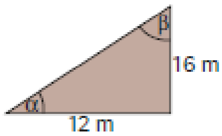


Por tanto, las razones trigonométricas de β son:

$\operatorname{sen}\beta=\frac{15}{17}$ $\cos\beta=\frac{8}{17}$ $\tan\beta=\frac{15}{8}$

Triángulo 3. La hipotenusa es: $h=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20\,m$. Las razones de α son:

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ $\cos\alpha=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ $\tan\alpha=\frac{4}{3}$



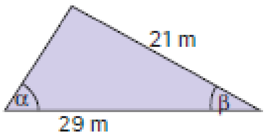
Por tanto, las razones trigonométricas de β son:

$\operatorname{sen}\beta=\frac{4}{5}$ $\cos\beta=\frac{3}{5}$ $\tan\beta=\frac{4}{3}$

Triángulo 4. Calculamos el cateto que falta utilizando el Teorema de Pitágoras :

$a=\sqrt{29^2-21^2}=\sqrt{400}=20\,m$. Las razones trigonométricas de α son:

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{21}{29}$ $\cos\alpha=\frac{20}{29}$ $\tan\alpha=\frac{21}{20}$

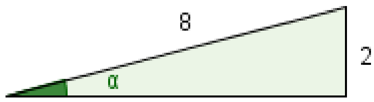


Por tanto, las razones trigonométricas de β son:

$\operatorname{sen}\beta=\frac{20}{29}$ $\cos\beta=\frac{21}{29}$ $\tan\beta=\frac{20}{21}$

2. Construye un triángulo rectángulo de forma que el seno de uno de sus ángulos tome el valor 0,25.

Si el seno de uno de los ángulos es $\operatorname{sen}\alpha=0,25=\frac{1}{4}$, esto quiere decir que la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa es $1:4$. Cualquier triángulo que construyamos con esas dimensiones cumplirá la condición del enunciado.



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

3. Calcula el resto de razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\operatorname{sen}\alpha=0,35$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\cos^2\alpha=1-0,35^2=0,8775\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{0,8775}\approx0,94$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\approx\frac{0,35}{0,94}\approx0,37$

b) $\cos\alpha=0,5$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\operatorname{sen}^2\alpha=1-0,5^2=0,75\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{0,75}\approx0,87$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\approx\frac{0,87}{0,5}\approx1,73$

c) $\cos\alpha=1$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\operatorname{sen}^2\alpha=1-1^2=0\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=0$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0$

d) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$

4. Calcula el resto de razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 1$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Aplicando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos que

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Calculamos la tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5. Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente es:

a) $\tan\alpha = 2$. Por la definición de tangente, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$.

Utilizando la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) $\tan\alpha = 1$. Por la definición de tangente, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 1$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$.

Utilizando la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\tan\alpha = 0$. Por la definición de tangente, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = 0$. Utilizando la igualdad fundamental de la trigonometría:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1$

d) $\tan\alpha = 0{,}5$. Por la definición de tangente, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}5$ y por tanto $2\,\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$. Utilizando la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + 4\,\text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

6. Calcula el resto de razones trigonométricas sabiendo que:

a) $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$. Utilizando la definición de tangente, tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{2}$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\cos\alpha}{2}$. Por la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{9\cos^2\alpha}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{13}}{13} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

b) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Por la definición de tangente, tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}$. Por la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{3\cos^2\alpha}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Por la definición de tangente, tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2}$. Por la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{3\cos^2\alpha}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

d) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Por la definición de tangente, tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ y por tanto $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{5}\cos\alpha}{4}$. Por la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{5\cos^2\alpha}{16} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

El seno del ángulo es: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}\cdot\dfrac{4\sqrt{21}}{21} = \dfrac{\sqrt{105}}{21}$.

7. ¿Existe un ángulo que verifique que $\operatorname{sen}\alpha = 0,4$ y que $\cos\alpha = 0,6$? Justifica tu respuesta.

No, ya que en ese caso $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 0,4^2 + 0,6^2 = 0,16 + 0,36 = 0,52 \neq 1$ y no se verificaría la igualdad fundamental de la trigonometría.

8. ¿Puedes calcular la tangente de un ángulo cuyo seno sea 1? Justifica tu respuesta.

Si $\operatorname{sen}\alpha = 1$ entonces $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 1 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ y la tangente no se puede calcular ya que $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ y no es posible dividir por cero. En este caso no se trata de un triángulo ya que si $\operatorname{sen}\alpha = 1$ entonces el cateto opuesto y la hipotenusa son iguales, lo que implica que no existe el cateto contiguo (es igual a cero).

9. Puede existir un ángulo cuyo seno sea 1,2? ¿Y un ángulo cuyo seno sea 2? Razona tu respuesta.

Ambas cosas son imposibles, ya que, por la definición del seno de un ángulo agudo, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ y como el cateto de un triángulo es siempre menor que la hipotenusa, no existe un ángulo con seno mayor que 1.
También, por la igualdad fundamental de la trigonometría, $0 \leq \operatorname{sen}^2\alpha \leq 1$ y por tanto no puede ser mayor que 1.

10. ¿Puede existir un ángulo cuyo coseno sea mayor que 1? Razona tu respuesta.

No, ya que, por la definición del coseno de un ángulo agudo, $\cos\alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$ y como el cateto de un triángulo es siempre menor que la hipotenusa, no existe un ángulo cuyo coseno sea mayor que 1.
También, por la igualdad fundamental de la trigonometría, $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$ y por tanto no puede ser mayor que 1.

11. Determina el ángulo cuyo seno vale 0 y cuyo coseno vale 1.

Aplicando la definición del coseno: $\cos\alpha = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = 1$, tenemos que el cateto contiguo es igual que la hipotenusa. Por tanto, el ángulo que forman es 0°, lo cual es congruente con el valor del seno propuesto ya que si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = 0$ entonces el cateto opuesto debe ser cero, esto es, el ángulo será 0°.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENCILLAS

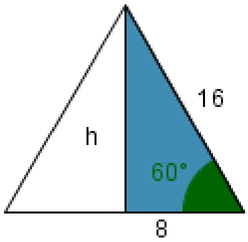
12. Calcula, sin utilizar el teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de 20 cm de lado.

La diagonal d es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son los lados del cuadrado, y por tanto los ángulos iguales de dicho triángulo miden 45°.

$$\text{sen}\,45^\circ = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\text{sen}\,45^\circ} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}\,cm \approx 28,28\,cm$$

13. Calcula, si utilizar el teorema de Pitágoras, la altura de un triángulo equilátero de 16 cm de lado.

Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°. La altura h es un cateto de un triángulo cuya hipotenusa es un lado del triángulo y el otro cateto mide la mitad del lado, como se ve en la figura. Por tanto:



$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{h}{16} \Rightarrow h = 16\,\text{sen}\,60^\circ = 16\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\,cm \approx 13,86\,cm$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON LA CALCULADORA

14. Calcula el seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos utilizando la calculadora:

a) $\text{sen}(28^\circ 21' 12'') \approx 0,475 \quad \cos(28^\circ 21' 12'') \approx 0,88 \quad \tan(28^\circ 21' 12'') \approx 0,54$

b) $\text{sen}(52^\circ 32') \approx 0,794 \quad \cos(52^\circ 32') \approx 0,608 \quad \tan(52^\circ 32') \approx 1,305$

c) $\text{sen}(45^\circ 12') \approx 0,71 \quad \cos(45^\circ 12') \approx 0,705 \quad \tan(45^\circ 12') \approx 1,007$

d) $\text{sen}(45^\circ) \approx 0,707 \quad \cos(45^\circ) \approx 0,707 \quad \tan(45^\circ) = 1$

e) $\text{sen}(56^\circ 53' 38'') \approx 0,838 \quad \cos(56^\circ 53' 38'') \approx 0,546 \quad \tan(56^\circ 53' 38'') \approx 1,534$

f) $\text{sen}(12^\circ 32' 56'') \approx 0,217 \quad \cos(12^\circ 32' 56'') \approx 0,976 \quad \tan(12^\circ 32' 56'') \approx 0,223$

15. Calcula el ángulo agudo, utilizando la calculadora, que verifica:

a) $\text{sen}\,\alpha = 0,32 \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}(0,32) \approx 18^\circ 39' 47''$

b) $\cos\alpha = 0,5677 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,5677) \approx 55^\circ 24' 36''$

c) $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

d) $\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$

e) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4}) \approx 25^\circ 39' 32''$

f) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^\circ$

16. Calcula, utilizando la calculadora, un ángulo que verifica:

a) $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$

b) $\text{sen}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}(1) = 90^\circ$

c) $\text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \text{sen}^{-1}(0) = 0^\circ$

d) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$

17. Comprueba con la calculadora que no puede existir un ángulo cuyo coseno sea mayor que 1.

Introduciendo en la calculadora $\cos^{-1}(a)$ con $a > 1$, se obtiene un mensaje de error, ya que no puede existir tal ángulo.

18. Comprueba con la calculadora que no puede existir un ángulo cuyo seno sea mayor que 1.

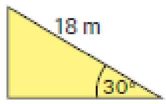
Introduciendo en la calculadora $\operatorname{sen}^{-1}(a)$ con $a > 1$, se obtiene un mensaje de error, ya que no puede existir tal ángulo.

19. ¿Existen ángulos cuyo coseno sea negativo? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Si introducimos en la calculadora $\cos^{-1}(-0,5)$, por ejemplo, obtenemos un ángulo de 120°. Existen ángulos con coseno negativo y son mayores que 90° pero menores o iguales que 180°.

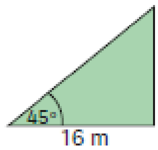
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

20. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Triángulo 1: El ángulo que falta es $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Por tanto, el cateto corto será:
$\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{a}{18} \Rightarrow a = 18 \operatorname{sen} 30^\circ = 9\, m$. El cateto más largo es:

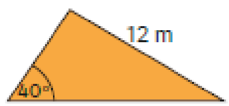
$\cos 30^\circ = \dfrac{b}{18} \Rightarrow b = 18 \cos 30^\circ = \dfrac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\, m \approx 15,59\, m$.



Triángulo 2: El ángulo que falta es $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Por tanto, es un triángulo isósceles y el cateto que falta es igual a $16\, m$. La hipotenusa es:

$\cos 45^\circ = \dfrac{16}{h} \Rightarrow h = \dfrac{16}{\cos 45^\circ} = \dfrac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}\, m \approx 22,63\, m$.

Triángulo 3: El ángulo que falta es $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

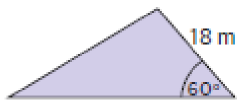


Por tanto, el cateto corto será: $\tan 40^\circ = \dfrac{12}{a} \Rightarrow a = \dfrac{12}{\tan 40^\circ} \approx 14,3\, m$.

La hipotenusa es: $\operatorname{sen} 40^\circ = \dfrac{12}{h} \Rightarrow h = \dfrac{12}{\operatorname{sen} 40^\circ} \approx 18,67\, m$.

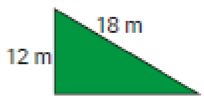
Triángulo 4: El ángulo que falta es $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Por tanto, el cateto largo será:

$\tan 60^\circ = \dfrac{a}{18} \Rightarrow a = 18 \tan 60^\circ = 18\sqrt{3}\, m \approx 31,18\, m$.



La hipotenusa es: $\cos 60^\circ = \dfrac{h}{18} \Rightarrow h = 18 \cos 60^\circ = 9\, m$.

21. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



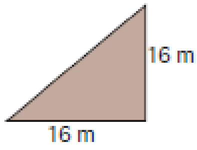
Triángulo 1: Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto que falta:
$a^2 = 18^2 - 12^2 \Rightarrow a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\, m \approx 13,42\, m$.
Llamando al ángulo menor α y el mayor β

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{2}{3} \approx 41^\circ 48' 37''$

$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 48^\circ 11' 23''$.

<u>Triángulo 2</u>: Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos la hipotenusa:

$h^2 = 16^2 + 16^2 \Rightarrow h = 16\sqrt{2}\,m \approx 22{,}63\,m$.

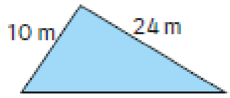


Como el triángulo es isósceles, los dos ángulos agudos son iguales:

$\tan\alpha = \frac{16}{16} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = 45^\circ$

<u>Triángulo 3</u>: Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos la hipotenusa:

$h^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow h = \sqrt{676} = 26\,m$.

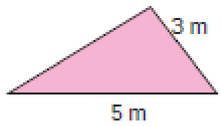


Llamando al ángulo menor α y el mayor β

$\cos\alpha = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{12}{13} \approx 22^\circ 37' 12''$

$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 67^\circ 22' 49''$

<u>Triángulo 4</u>: Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto que falta: $a^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4\,m$.



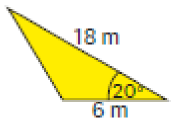
Llamando al ángulo menor α y el mayor β :

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \approx 36^\circ 52' 12''$

$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ 7' 48''$.

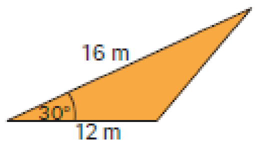
22. Calcula la altura de los siguientes triángulos utilizando la resolución de triángulos rectángulos:

<u>Triángulo 1</u>: Si trazamos la altura desde el vértice superior a la prolongación de la base, se forma un triángulo rectángulo y, aplicando la definición del seno:



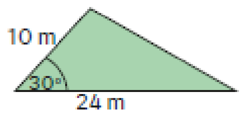
$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{h}{18} \Rightarrow h = 18 \operatorname{sen} 20^\circ \approx 6{,}16\,m$

<u>Triángulo 2</u>: Trazando la altura obtenemos un triángulo rectángulo y, por la definición del seno:



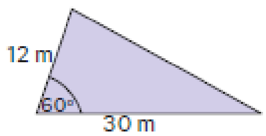
$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{16} \Rightarrow h = 16 \operatorname{sen} 30^\circ = 8\,m$

<u>Triángulo 3</u>: Trazando la altura obtenemos un triángulo rectángulo y, por la definición del seno:



$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \operatorname{sen} 30^\circ = 5\,m$

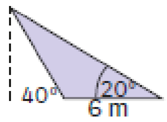
<u>Triángulo 4</u>: Trazando la altura obtenemos un triángulo rectángulo y, por la definición del seno:



$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \operatorname{sen} 60^\circ = 6\sqrt{3}\,m \approx 10{,}39\,m$

23. Calcula la altura de los siguientes triángulos utilizando la resolución de triángulos rectángulos:

<u>Triángulo 1</u>: Llamando x a la longitud desde el vértice inferior izquierdo hasta el pie de la altura, podemos plantear el siguiente sistema:



$$\begin{cases} \tan 20^\circ = \dfrac{h}{x+6} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 20^\circ} - 6 \\ \tan 40^\circ = \dfrac{h}{x} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 40^\circ} \end{cases}$$

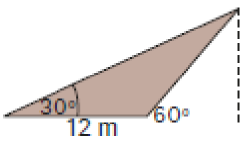
Igualando, obtenemos:

$$\frac{h}{\tan 20^\circ} - 6 = \frac{h}{\tan 40^\circ}$$

$$\frac{h}{\tan 20^\circ} - \frac{h}{\tan 40^\circ} = 6$$

$$h(\tan 40^\circ - \tan 20^\circ) = 6\tan 40^\circ \tan 20^\circ \quad \Rightarrow h = \frac{6\tan 40^\circ \tan 20^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 20^\circ} \approx 3{,}86\, m$$

Triángulo 2: Llamando x a la longitud desde el vértice inferior izquierdo hasta el pie de la altura, podemos plantear el siguiente sistema:



$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \dfrac{h}{x+12} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 30^\circ} - 12 \\ \tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} \end{cases}$$

Igualando, obtenemos:

$$\frac{h}{\tan 30^\circ} - 12 = \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

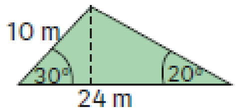
$$\frac{h}{\tan 30^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ} = 12$$

$$h(\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 12\tan 60^\circ \tan 30^\circ \quad \Rightarrow h = \frac{12\tan 60^\circ \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}$$

Teniendo en cuenta que $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y que $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, tenemos:

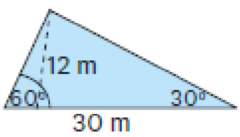
$$h = \frac{12\tan 60^\circ \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{12}{\dfrac{3-1}{\sqrt{3}}} = \frac{12}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = 6\sqrt{3}\, m = 10{,}39\, m$$

Triángulo 3: La altura forma un triángulo rectángulo con el lado que mide $10\, m$. Aplicando la definición del seno:



$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \operatorname{sen} 30^\circ = 5\, m$$

Triángulo 4: Si llamamos x a la distancia desde el vértice inferior izquierdo hasta el pie de la altura, podemos plantear el siguiente sistema:



$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \dfrac{h}{30-x} & \Rightarrow x = 30 - \dfrac{h}{\tan 30^\circ} \\ \tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} \end{cases}$$

$$30 - \frac{h}{\tan 30^\circ} = \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

$$\frac{h}{\tan 30^\circ} + \frac{h}{\tan 60^\circ} = 30$$

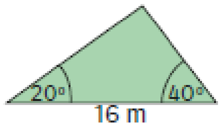
$$h\left(\tan 60^\circ + \tan 30^\circ\right) = 30\tan 60^\circ \tan 30^\circ \quad \Rightarrow h = \frac{30\tan 60^\circ \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ}$$

Teniendo en cuenta que $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y que $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, tenemos:

$$h = \frac{30\tan 60^\circ \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ} = \frac{30}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{30}{\frac{3+1}{\sqrt{3}}} = \frac{30}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{15\sqrt{3}}{2}\,m = 12{,}99\,m$$

RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

24. Calcula el perímetro de los siguientes triángulos:

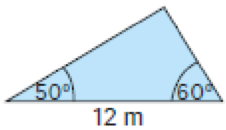


Triángulo 1: El ángulo que falta es $180^\circ - \left(20^\circ + 40^\circ\right) = 120^\circ$. Llamamos a y b a los lados opuestos a los ángulos 40° y 20°, respectivamente, y aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{16}{\operatorname{sen} 120^\circ} \Rightarrow a = \frac{16\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ} \approx 11{,}88\,m$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{16}{\operatorname{sen} 120^\circ} \Rightarrow b = \frac{16\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ} \approx 6{,}32\,m$$

Por tanto, el perímetro del triángulo es: $p = 16 + a + b = 34{,}19\,m$

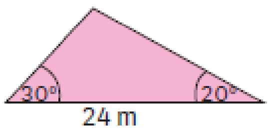


Triángulo 2: El ángulo que falta es $180^\circ - \left(50^\circ + 60^\circ\right) = 70^\circ$. Llamamos a y b a los lados opuestos a los ángulos 60° y 50°, respectivamente, y aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{12}{\operatorname{sen} 70^\circ} \Rightarrow a = \frac{12\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 11{,}06\,m$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{12}{\operatorname{sen} 70^\circ} \Rightarrow b = \frac{12\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 9{,}78\,m$$

Por tanto, el perímetro del triángulo es: $p = 12 + a + b = 32{,}84\,m$

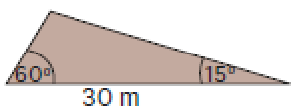


Triángulo 3: El ángulo que falta es $180^\circ - \left(30^\circ + 20^\circ\right) = 130^\circ$. Llamamos a y b a los lados opuestos a los ángulos 30° y 20°, respectivamente, y aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{24}{\operatorname{sen} 130^\circ} \Rightarrow a = \frac{24\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} \approx 15{,}66\,m$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{24}{\operatorname{sen} 130^\circ} \Rightarrow b = \frac{24\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} \approx 10{,}72\,m$$

Por tanto, el perímetro del triángulo es: $p = 24 + a + b = 50{,}38\,m$



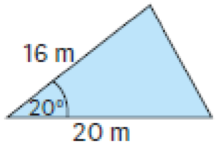
Triángulo 4: El ángulo que falta es $180^\circ - \left(15^\circ + 60^\circ\right) = 105^\circ$. Llamamos a y b a los lados opuestos a los ángulos 15° y 60°, respectivamente, y aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{30}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Rightarrow a = \frac{30\operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ} \approx 8{,}04\,m$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{30}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Rightarrow b = \frac{30\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ} \approx 26{,}9\,m$$

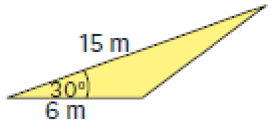
Por tanto, el perímetro del triángulo es: $p = 30 + a + b = 64{,}94\,m$

25. Calcula el lado que falta en los siguientes triángulos:



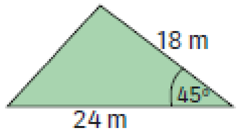
Triángulo 1: Llamando x al lado que falta, podemos aplicar el teorema del coseno para hallarlo:

$x^2 = 16^2 + 20^2 - 2\cdot 16\cdot 20\cdot \cos 20^{\circ} \Rightarrow x \approx \sqrt{54,6} \approx 7,39\,m$



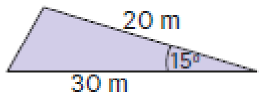
Triángulo 2: Llamando x al lado que falta, podemos aplicar el teorema del coseno para hallarlo:

$x^2 = 6^2 + 15^2 - 2\cdot 6\cdot 15\cdot \cos 30^{\circ} \Rightarrow x \approx \sqrt{105,12} \approx 10,25\,m$



Triángulo 3: Llamando x al lado que falta, podemos aplicar el teorema del coseno para hallarlo:

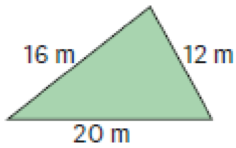
$x^2 = 18^2 + 24^2 - 2\cdot 18\cdot 24\cdot \cos 45^{\circ} \Rightarrow x \approx \sqrt{289,06} \approx 17\,m$



Triángulo 4: Llamando x al lado que falta, podemos aplicar el teorema del coseno para hallarlo:

$x^2 = 20^2 + 30^2 - 2\cdot 20\cdot 30\cdot \cos 15^{\circ} \Rightarrow x \approx \sqrt{140,89} \approx 11,87\,m$

26. Determina los ángulos interiores de los siguientes triángulos:



Triángulo 1: Sean α, β y γ los ángulos opuestos, respectivamente, a los lados que miden $12\,m$, $16\,m$ y $20\,m$.

Aplicando el teorema del coseno:

$$12^2 = 16^2 + 20^2 - 2\cdot 16\cdot 20\cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{16^2 + 20^2 - 12^2}{2\cdot 16\cdot 20} = 0,8$$

Por tanto, $\alpha = \cos^{-1} 0,8 \approx 36^{\circ}\,52'\,12''$.

De manera análoga:

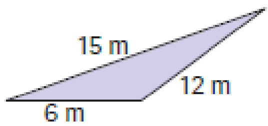
$$16^2 = 12^2 + 20^2 - 2\cdot 12\cdot 20\cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{12^2 + 20^2 - 16^2}{2\cdot 12\cdot 20} = 0,6\,.$$

Por tanto, $\beta = \cos^{-1} 0,6 \approx 53^{\circ}\,7'\,48''$

El tercer ángulo es $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 90^{\circ}$ y por tanto se trata de un triángulo rectángulo.

Triángulo 2: Sean α, β y γ los ángulos opuestos, respectivamente, a los lados que miden $12\,m$, $15\,m$ y $6\,m$.

Aplicando el teorema del coseno:



$$6^2 = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12^2 + 15^2 - 6^2}{2\cdot 12\cdot 15} = 0,925$$

Por tanto, $\alpha = \cos^{-1} 0,925 \approx 22^{\circ}19'54''$.

Aplicando el teorema del seno:

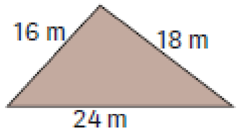
$$\frac{12}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{15}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{15\operatorname{sen}\alpha}{12} \approx 0,47 \Rightarrow \beta \approx \operatorname{sen}^{-1} 0,47 \approx 28^{\circ}\,21'\,24''$$

El tercer ángulo es $\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 129^{\circ}18'42''$.

Triángulo 3: Sean α, β y γ los ángulos opuestos, respectivamente, a los lados que miden $18\,m$, $16\,m$ y $24\,m$.

Aplicando el teorema del coseno:

$$18^2 = 16^2 + 24^2 - 2\cdot 16\cdot 24\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{16^2+24^2-18^2}{2\cdot 16\cdot 24} \approx 0,66$$



Por tanto, $\alpha \approx \cos^{-1} 0,66 \approx 48^\circ 35' 20''$.

De manera análoga:

$$16^2 = 18^2 + 24^2 - 2\cdot 18\cdot 24\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{18^2+24^2-16^2}{2\cdot 18\cdot 24} \approx 0,75$$

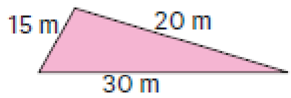
Por tanto, $\beta \approx \cos^{-1} 0,75 \approx 41^\circ 48' 33''$

El tercer ángulo es $\gamma = 180 - (\alpha+\beta) = 89^\circ 36' 8''$

<u>Triángulo 4</u>: Sean α , β y γ los ángulos opuestos, respectivamente, a los lados que miden $20\,m$, $15\,m$ y $30\,m$.

Aplicando el teorema del coseno:

$$20^2 = 30^2 + 15^2 - 2\cdot 30\cdot 15\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{30^2+15^2-20^2}{2\cdot 30\cdot 15} = 0,80\widehat{5}$$



Por tanto, $\alpha = \cos^{-1} 0,80\widehat{5} \approx 36^\circ 20' 10''$.

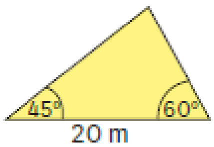
Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{20}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{15}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{15\operatorname{sen}\alpha}{20} \approx 0,44 \Rightarrow \beta \approx \operatorname{sen}^{-1} 0,44 \approx 26^\circ 23' 4''$$

El tercer ángulo es $\gamma = 180 - (\alpha+\beta) = 117^\circ 16' 47''$.

27. Calcula el área de los siguientes triángulos:

<u>Triángulo 1</u>: Sea h la altura y x la distancia desde el vértice inferior izquierdo hasta el pie de la altura.



Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan 45^\circ = \dfrac{h}{20-x} & \Rightarrow x = 30 - \dfrac{h}{\tan 45^\circ} = 30 - h \\ \tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} & \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} \end{cases}$$

Igualando, obtenemos:

$$30 - h = \frac{h}{\tan 60^\circ} \Rightarrow h + \frac{h}{\tan 60^\circ} = 30 \Rightarrow h(\tan 60^\circ + 1) = 30\tan 60^\circ \Rightarrow h = \frac{30\tan 60^\circ}{\tan 60^\circ + 1}$$

Teniendo en cuenta que $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, obtenemos:

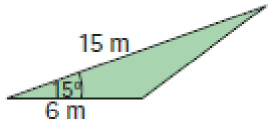
$$h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 15\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 45 - 15\sqrt{3}\,m \approx 19,02\,m$$

Por tanto, el área del triángulo es: $A = \dfrac{b\cdot h}{2} \approx 190,19\,m^2$

<u>Triángulo 2</u>: Sea h la altura trazada desde el vértice superior.

Por la definición del seno tenemos que:

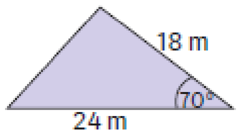
$$\operatorname{sen}15^{\circ}=\frac{h}{15}\Rightarrow h=15\operatorname{sen}15^{\circ}\approx 3{,}88\,m$$



Por tanto, el área del triángulo es: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}\approx 11{,}65\,m^2$

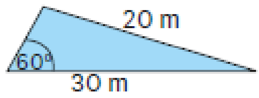
Triángulo 3: Sea h la altura trazada desde el vértice superior.
Por la definición del seno tenemos que:

$$\operatorname{sen}70^{\circ}=\frac{h}{18}\Rightarrow h=18\operatorname{sen}70^{\circ}\approx 16{,}91\,m$$



Por tanto, el área del triángulo es: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}\approx 20{,}3\,m^2$

Triángulo 4: Sea α al ángulo opuesto al lado que mide $30\,m$.
Por el teorema del seno:



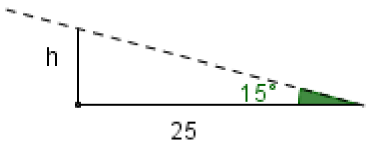
$$\frac{20}{\operatorname{sen}60^{\circ}}=\frac{30}{\operatorname{sen}\alpha}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{30\cdot\operatorname{sen}60^{\circ}}{20}\approx 1{,}3\,.$$

Sin embargo, esto es imposible ya que el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1.
¿Qué quiere decir esto? Que el triángulo planteado es imposible: no hay ningún triángulo con esas dimensiones.

PROBLEMAS

28. Un edificio proyecta una sombra de 25 m y los rayos solares inciden en la horizontal con un ángulo de 15°. ¿Qué altura tiene el edificio?

Los rayos solares, el edificio y la sombra forman un triángulo rectángulo en el que podemos aplicar la definición de tangente para hallar:

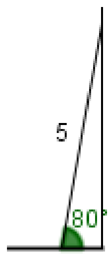


$$\tan 15^{\circ}=\frac{h}{25}\Rightarrow h=25\tan 15^{\circ}\approx 6{,}7\,m$$

El edificio tiene una altura de $6{,}7\,m$.

29. Un poste de 5 m está apoyado en una pared formando un ángulo de 80° con el suelo. ¿A qué altura de la pared estará apoyado el poste?

Aplicando la definición del seno al triángulo rectángulo que forma el poste con la pared y el suelo, tenemos:

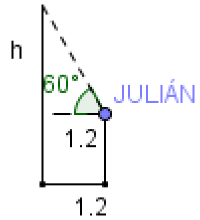


$$\operatorname{sen}80^{\circ}=\frac{h}{5}\Rightarrow h=5\operatorname{sen}80^{\circ}\approx 4{,}92\,m$$

El poste estará apoyado a una altura de $4{,}92\,m$.

30. Julián está a 1,2 m de un árbol y mirando al punto más alto del árbol, lo ve bajo un ángulo de 60°. ¿Qué altura tiene el árbol?

Aplicando la definición de tangente en el triángulo que forman Julián, el árbol y el suelo tenemos que:



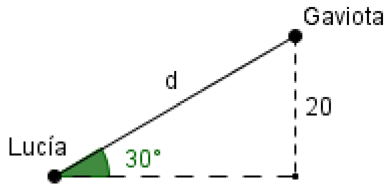
$$\tan 60^{\circ} = \frac{h}{1,2} \Rightarrow h = 1,2\tan 60^{\circ} \approx 2,08\,m$$

La altura del árbol es por tanto de $2,08\,m$ (desde la altura de los ojos de Julián)

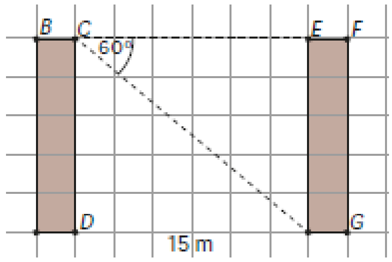
31. Lucía está mirando una gaviota que está posada sobre un risco en la playa. Si la elevación media del risco es de 30° y la altura es de 20 m, ¿qué distancia habrá hasta la gaviota?

La distancia d hasta la gaviota, usando la definición del seno de un ángulo, es:

$$\text{sen}\,30^{\circ} = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\text{sen}\,30^{\circ}} \approx 40\,m$$



32. En una ciudad se construyen dos edificios iguales separados entre sí por 15 m. Si desde la azotea de un edificio se ve la base del otro edificio bajo un ángulo de 60°, qué altura tienen los edificios?



$$\tan 60^{\circ} = \frac{h}{15} \Rightarrow h = 15\tan 60^{\circ} = 15\sqrt{3}\,m \approx 25,98\,m$$

33. El padre de Antonio es pintor y está trabajando subido a una escalera. Si la escalera mide 6 m de altura y él se encuentra a 5,2 m del suelo, ¿qué ángulo forma la escalera con el suelo?

La escalera, la altura y el suelo forman un triángulo rectángulo del que la longitud de la escalera es la hipotenusa y la altura el cateto opuesto al ángulo que forma con el suelo. Por tanto:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5,2}{6} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,0,8\widehat{6} \approx 60^{\circ}\,4'25''$$

34. La casa de mi primo Julián tiene unos 6 m de altura y proyecta una sombra de 10 m en el suelo. ¿Cuál es el ángulo con el que inciden los rayos solares en ese momento?

La casa, la sombra y los rayos solares forman un triángulo rectángulo. Considerando que la casa y la sombra son los catetos del triángulo:

$$\tan\alpha = \frac{6}{10} \Rightarrow h = \arctan 0,6 \approx 30^{\circ}\,57'50''\,\text{¨}$$

35. Desde el centro de una calle, Ángela observa dos edificios, uno a cada lado. Si la cúspide del edificio de la izquierda la ve bajo un ángulo de 30° y el edificio de la derecha bajo un ángulo de 50°, sabiendo que la altura del edificio de la izquierda es de 12 m, ¿qué altura tendrá el edificio de la derecha? ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?

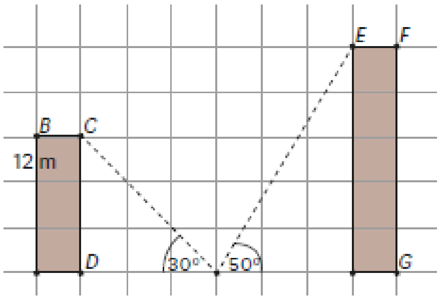
Llamamos h a la altura del edificio de la derecha y d a la distancia desde el punto en el que se encuentra Ángela hasta cada uno de los edificios, tenemos que:

$$\tan 30^\circ = \frac{12}{d} \Rightarrow d = \frac{12}{\tan 30^\circ} \approx 20,78\,m$$

Por tanto, la distancia entre los dos edificios es:
$2d \approx 41,57\,m$.

Además, para el edificio de la derecha tenemos que:

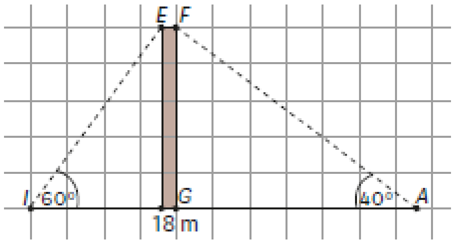
$$\tan 50^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\tan 50^\circ \approx 24,77\,m.$$



36. Juan y Raúl miran la cúspide de un árbol bajo un ángulo de 40° y 60° con la horizontal, respectivamente. Si la distancia entre ambos es de 18 m, ¿qué altura tendrá el árbol?

Sea h la altura del árbol y x la distancia de Raúl al árbol.
Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \dfrac{h}{x} \quad \Rightarrow x = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} \\ \tan 40^\circ = \dfrac{h}{18-x} \Rightarrow x = 18 - \dfrac{h}{\tan 40^\circ} \end{cases}$$



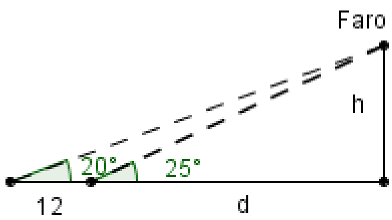
Igualando ambas expresiones:

$$\frac{h}{\tan 60^\circ} = 18 - \frac{h}{\tan 40^\circ} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{18\tan 40^\circ \tan 60^\circ}{\tan 40^\circ + \tan 60^\circ} \approx 10,17\,m$$

37. Desde un barco se ve un faro a lo lejos, de forma que se observa la parte más alta bajo un ángulo con la horizontal de 20°. Si nos aproximamos 12 m, observamos que el ángulo es ahora de 25°. ¿Qué altura tiene el faro? ¿A qué distancia nos encontramos?

Sea d la distancia hasta el faro y h su altura.
Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan 20^\circ = \dfrac{h}{d+12} \quad \Rightarrow h = (d+12)\tan 20^\circ \\ \tan 25^\circ = \dfrac{h}{d} \qquad \Rightarrow h = d\tan 25^\circ \end{cases}$$



Igualando ambas expresiones:

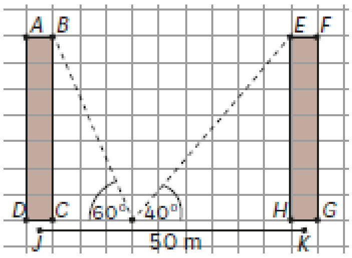
$$(d+12)\tan 20^\circ = d\tan 25^\circ \Rightarrow d = \frac{12\tan 20^\circ}{\tan 25^\circ - \tan 20^\circ} \approx 42,68\,m.$$

Por tanto, la distancia hasta el faro es de 42,68 metros y su altura: $h = d\tan 25 \approx 19,9\,m$

38. Situada entre dos edificios iguales, Lorena, desde ese punto, observa que el ángulo que forma la cúspide del edificio de la izquierda con la horizontal es de 60° y el ángulo que el edificio de la derecha forma con la horizontal es 40°. Si la distancia entre los edificios es de 50 m, ¿qué altura tienen los edificios? ¿a qué distancia de los edificios está situada Lorena?

Llamemos h a la altura de los edificios y d a la distancia de Lorena al edificio de la izquierda. Utilizando la definición de tangente, planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \dfrac{h}{d} & \Rightarrow h = d\tan 60^\circ \\ \tan 40^\circ = \dfrac{h}{50-d} & \Rightarrow h = (50-d)\tan 40^\circ \end{cases}$$



Igualando ambas expresiones:

$$d\tan 60^\circ = (50-d)\tan 40^\circ$$

$$d = \frac{50\tan 40^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 40^\circ} \approx 16{,}32\,m$$

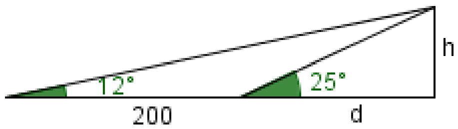
Por tanto: $h = d\tan 60^\circ \approx 28{,}26\,m$

La altura de los edificios es 28,26 m y la distancia a los edificios es de 16,32 m al de la derecha y 33,68 m al de la izquierda.

39. En una llanura se observa que una elevación del terreno se queda bajo un ángulo de 12° con la horizontal. Cuando avanzamos 200 m este ángulo pasa a ser de 25°. ¿A qué distancia del promontorio nos encontramos?

Llamemos d a la distancia hasta el promontorio y h a su altura:

$$\begin{cases} \tan 12^\circ = \dfrac{h}{d+200} & \Rightarrow h = (d+200)\tan 12^\circ \\ \tan 25^\circ = \dfrac{h}{d} & \Rightarrow h = d\tan 25^\circ \end{cases}$$



$$(d+200)\tan 12^\circ = d\tan 25^\circ$$

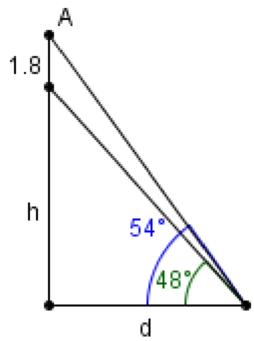
$$d = \frac{200\tan 12^\circ}{\tan 25^\circ - \tan 12^\circ} \approx 167{,}53\,m$$

Por tanto, nos encontramos a una distancia de 167,53 metros del promontorio.

40. Alberto está en la azotea de un edificio. Desde la calle se observa que la base de la azotea con la horizontal forma un ángulo de 48° y que desde la cabeza de Alberto forma un ángulo con la horizontal de 54°. Sabiendo que Alberto mide 1,80 m, ¿qué altura tiene el edificio?

Sea h la altura del edificio y d la distancia a la que está el observador desde la calle:

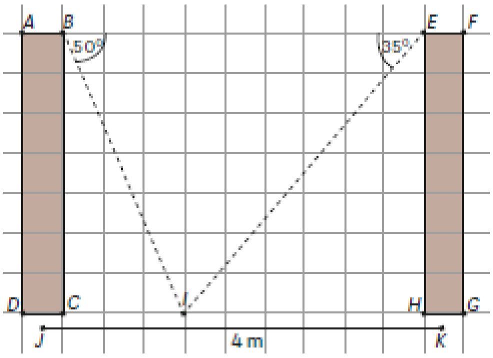
$$\begin{cases} \tan 48^\circ = \dfrac{h}{d} & \Rightarrow d = \dfrac{h}{\tan 48^\circ} \\ \tan 54^\circ = \dfrac{h+1{,}8}{d} & \Rightarrow d = \dfrac{h+1{,}8}{\tan 54} \end{cases}$$



$$\frac{h}{\tan 48^\circ} = \frac{h+1{,}8}{\tan 54} \Rightarrow h\tan 54^\circ = (h+1{,}8)\tan 48^\circ$$

$$h = \frac{1{,}8\tan 48^\circ}{\tan 54^\circ - \tan 48^\circ} \approx 7{,}52\,m$$

41. Dos palomas están posadas en sendos postes de igual altura. Se encuentran una frente a la otra a una distancia de 4 m. En el suelo, entre ambas, se encuentra un niño tirando migas. El niño ve las palomas bajo un ángulo de 35º y 50º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué distancia del niño está cada paloma?



Sean a y b las distancias del niño a las palomas de la izquierda y de la derecha respectivamente.

El ángulo I es igual a $180^\circ - (50^\circ + 35^\circ) = 95^\circ$.

Por el teorema del seno:

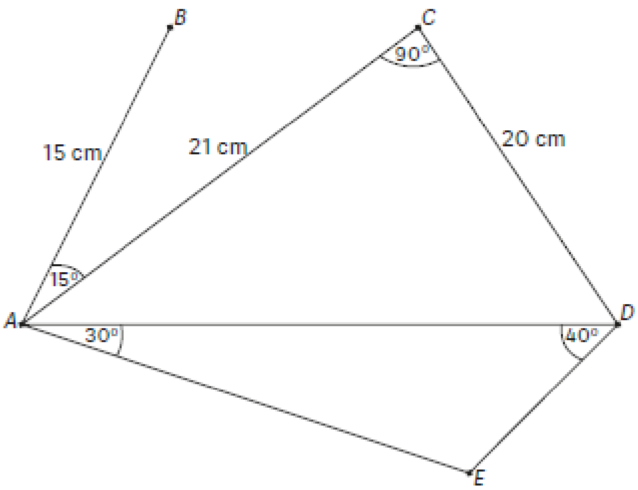
$$\frac{4}{\text{sen}\, 95^\circ} = \frac{a}{\text{sen}\, 35^\circ} \Rightarrow a = \frac{4\,\text{sen}\, 35^\circ}{\text{sen}\, 95^\circ} \approx 2,3\,m$$

$$\frac{4}{\text{sen}\, 95^\circ} = \frac{b}{\text{sen}\, 50^\circ} \Rightarrow b = \frac{4\,\text{sen}\, 50^\circ}{\text{sen}\, 95^\circ} \approx 3,08\,m$$

DESAFÍO PISA - PÁG. 131

UN VIAJE EN AUTOBÚS

Un autobús hace un recorrido circular pasando por las poblaciones A, B, C, D y E hasta que vuelve otra vez al punto de partida.
El siguiente plano muestra una serie de medidas entre unas paradas y otras; está a escala 3:100 000.
La velocidad media de un autobús de línea es de 40 km/h, contando el tiempo que pierde en la subida y bajada de viajeros en cada parada.



ACTIVIDAD 1. La distancia de la población B a la C es de:

B: 2,5 km. Aplicando el teorema del coseno:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 15 = 21^2 + 15^2 - 2 \cdot 21 \cdot 15 \cdot \cos 15 = 57,5$$

Por tanto, $BC = \sqrt{57,5} \approx 7,6\,cm$. Como la escala es $3\,cm = 1\,km$ La distancia real será $7,6:3 \approx 2,5\,km$

ACTIVIDAD 2. La distancia entre las poblaciones A y D es de:

C: 10 km. Por el Teorema de Pitágoras, $AD=\sqrt{21^2+20^2}=29\,cm$ y la distancia real será $29:3\approx 9,7\,km$

ACTIVIDAD 3. La distancia entre las poblaciones D y E es de:

B: 5 km. El ángulo en E es: $E=180^{o}-\left(40^{o}+30^{o}\right)=110^{o}$. Por el teorema del seno:

$$\frac{DE}{\text{sen}\,30^{o}}=\frac{AD}{\text{sen}\,110^{o}}\Rightarrow DE=\frac{9,7\cdot\text{sen}\,30^{o}}{\text{sen}\,110^{o}}=5,14\,km$$

ACTIVIDAD 4. El recorrido completo, desde que el autobús sale del municipio A hasta que vuelve de nuevo a su destino, cubre una distancia de:

A: 26 km. Por el teorema del seno: $\dfrac{EA}{\text{sen}\,40^{o}}=\dfrac{AD}{\text{sen}\,110^{o}}\Rightarrow EA=\dfrac{9,7\cdot\text{sen}\,40^{o}}{\text{sen}\,110^{o}}=6,64\,km$

El recorrido es $AB+BC+CD+DE+EA\approx 5+2,5+6,7+5,1+6,6\approx 26\,km$

ACTIVIDAD 5. El tiempo que tardará el autobús en hacer un recorrido completo es de:

B: 39 min, ya que $t=\dfrac{e}{v}=\dfrac{26}{40}=0,65\,h=0,65\cdot 60=39\,\text{min}$

ACTIVIDAD 6: Durante un día de lluvia, la velocidad media del autobús se reduce de forma considerable, pasando de 40 km/h a 25 km/h. El tiempo que empleará en el recorrido es de:

C: 1 h, ya que $t=\dfrac{e}{v}=\dfrac{26}{25}=1,04\,h=1\,h\;2,4\,\text{min}$