UNIDAD 13: Combinatoria

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 256

1. Mario tiene 4 pantalones y 3 camisas:

a) **¿De cuántas formas diferentes puede vestirse?** Puede vestirse de $4 \cdot 3 = 12$ formas distintas.

b) **Si además Mario tiene 4 zapatos distintos, ¿de cuántas formas distintas puede vestirse ahora?** Podrá combinar cada par de zapatos con cada una de las 12 formas de vestir, de modo que en total podrá vestirse de $4 \cdot 12 = 48$ formas distintas.

2. En un restaurante se ofrecen distintos platos: 4 primeros, 4 segundos y 3 postres distintos. ¿Cuántos menús distintos se pueden elaborar?

Se pueden elaborar $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ menús diferentes.

3. Juan tiene 3 felpas, 2 bufandas y 4 guantes distintos. ¿De cuántas formas distintas puede combinar las prendas?

Puede combinarlas de $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ maneras diferentes.

4. En una estantería queda hueco para 3 libros más. Queremos colocar uno de cada tipo elegidos entre 2 de matemáticas, 5 de música y 4 de ciencias. ¿De cuántas formas posibles se pueden colocar estos libros?

Se pueden colocar de $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ formas posibles.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 257

5. Calcula:

a) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

d) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

e) $P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$

6. Van al cine 6 amigos y se sientan en una sola fila. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse los 6 amigos?

Pueden sentarse de $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas distintas.

7. Ernesto tiene una enciclopedia de 24 tomos, 9 son de historia universal y los otros 15 tomos son de historia de España. ¿De cuántas formas puede colocar la enciclopedia en una estantería? ¿Y si no quiere mezclar los tomos de historia universal con los de historia de España?

Puede colocarlos de $P_{24} = 24! = 6,2 \cdot 10^{23}$ formas diferentes.

Si no quiere mezclarlos, podrá colocar primero los de historia universal o los de España, de modo que tendrá: $2 \cdot 9! \cdot 15! = 9,49 \cdot 10^{17}$ formas diferentes de hacerlo.

8. ¿Cuántas palabras de 5 letras, con o sin sentido, se pueden hacer con la palabra LARGO?

Se pueden hacer $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ palabras con esas cinco letras.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 258

9. Calcula:

a) $V_{5,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60$

b) $V_{8,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$

c) $V_{7,5} = \dfrac{7!}{2!} = 2520$

d) $V_{10,4} = \dfrac{10!}{6!} = 5040$

e) $V_{12,8} = \dfrac{12!}{4!} = 19958400$

10. ¿Cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I sin repetir letras?

Se pueden formar $V_{8,5} = \dfrac{8!}{3!} = 6720$ palabras distintas.

11. En un parking hay 5 plazas libres y llegan 3 amigos cada uno con su vehículo. ¿De cuántas formas distintas podrán ocupar las plazas de aparcamiento?

Se pueden ocupar de $V_{5,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60$ formas diferentes.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 259

12. Calcula:

a) $VR_{5,4} = 5^4 = 625$

b) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

c) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$

d) $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

e) $VR_{8,5} = 8^5 = 32768$

13. ¿Cuántas palabras de 4 letras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra REMANDO, repitiendo o no las letras?

Repitiendo letras se pueden formar $VR_{7,4} = 7^4 = 2401$ palabras. Si no es posible repetir letras, entonces se pueden formar $V_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 840$ palabras.

14. Si tiramos un dado dos veces, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

Podemos obtener $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ resultados diferentes.

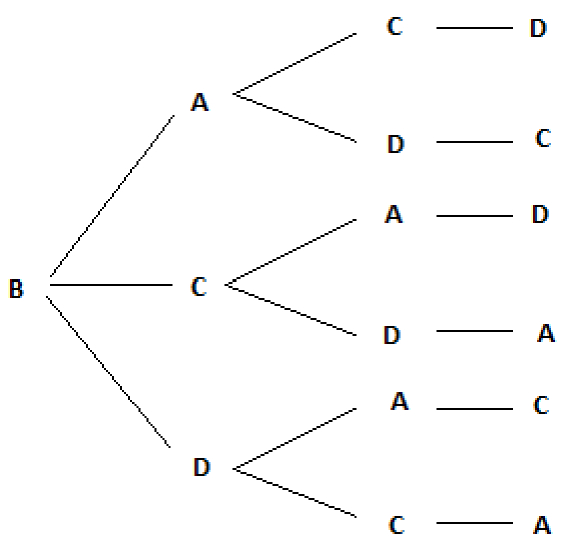
15. ¿Cuántos números de 3 cifras podemos formar con los dígitos del número 345 897?

Repitiendo dígitos se pueden formar $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ números. Si no es posible repetir los dígitos, entonces se pueden formar $V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$ palabras.

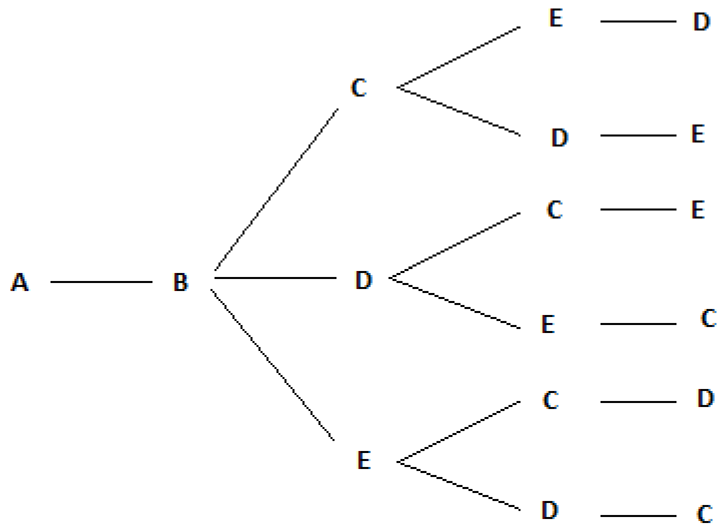
EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 260

16. Representa un diagrama de árbol de:

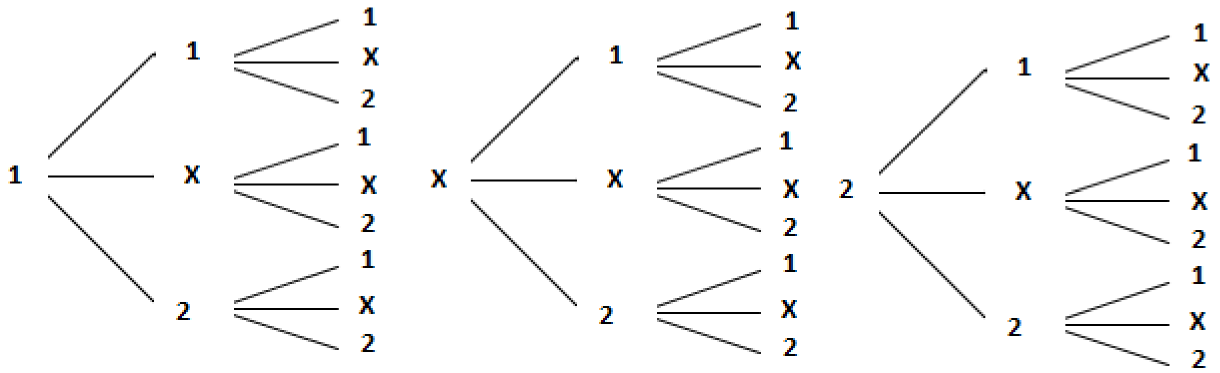
a) **Las permutaciones del conjunto $\{A, B, C, D\}$ que empiezan por B.**



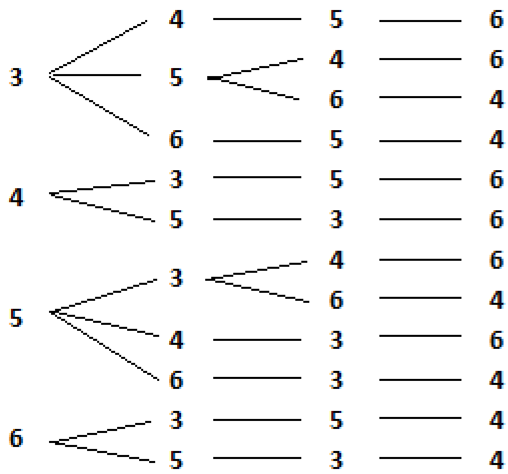
b) **Las permutaciones del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ que empiezan por AB.**



c) **Todas las apuestas posibles para acertar una quiniela con tan solo tres partidos.**



17. Representa con un diagrama de árbol todos los números pares de tres cifras que se pueden hacer con los dígitos 3, 4, 5 y 6.



EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 261

18. Calcula utilizando la calculadora:

a) $C_{4,3}=\binom{4}{3}=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$

b) $C_{8,2}=\binom{8}{2}=\dfrac{8!}{2!(8-2)!}=28$

c) $C_{10,9}=\binom{10}{9}=\dfrac{10!}{9!(10-9)!}=10$

d) $C_{4,4}=\binom{4}{4}=\dfrac{4!}{4!(4-4)!}=1$

e) $C_{10,7}=\binom{10}{7}=\dfrac{10!}{7!(10-7)!}=120$

19. En una pizzería te permiten elegir 4 ingredientes de una lista de 7. ¿Cuántas pizzas distintas se pueden elaborar?

Se podrán elaborar $C_{7,4}=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=35$ pizzas diferentes.

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 262

20. Demuestra la siguiente igualdad: $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\binom{n}{r}$

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}=$$
$$=\frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

21. Comprueba si se verifican las siguientes afirmaciones:

a) $C_{5,3}=C_{5,2} \quad \Rightarrow \quad C_{5,3}=\dfrac{5!}{3!(5-3)!}=\dfrac{5!}{(5-2)!2!}=C_{5,2}$

b) $C_{12,1}=12 \quad \Rightarrow \quad C_{12,1}=\dfrac{12!}{1!(12-1)!}=\dfrac{12!}{11!}=12$

c) $C_{7,4}+C_{7,3}=C_{8,4} \quad \Rightarrow \quad C_{7,4}+C_{7,3}=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}+\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}=\dfrac{2\cdot 7!}{3!\cdot 4!}=\dfrac{8\cdot 7!}{4\cdot 3!\cdot 4!}=\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}=C_{8,4}$

22. Calcula, sin utilizar la calculadora científica, los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{10}{10}=1$

b) $\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$

c) $\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{2!\cdot \cancel{7!}}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$

d) $\binom{42}{40}=\frac{42!}{40!(42-40)!}=\frac{42\cdot 41\cdot \cancel{40!}}{\cancel{40!}\cdot 2!}=\frac{42\cdot 41}{2}=861$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES - PÁG. 263

23. Escribe el desarrollo del binomio de Newton de:

a) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

b) $(a-b)^6=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$

c) $(a-2b)^4=a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$

24. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

b) $(x-2)^4=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

c) $(2x-1)^4=16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

EJERCICIOS Y ACTIVIDADES DE RECAPITULACIÓN - PÁG. 266-268

UTILIZACIÓN DEL PRODUCTO PARA CONTAR

1. María tiene un juego que consiste en construir muñecos de madera componiendo tres partes, cabeza, cuerpo y piernas. Si tenemos 5 tipos diferentes de cabeza, 4 de cuerpos y 6 de piernas, ¿cuántos muñecos diferentes se pueden componer?

Puede componer $5\cdot 4\cdot 6=120$ diferentes muñecos

2. El abuelo de Juan le ha regalado un móvil que puede personalizar como quiera. En concreto tiene cuatro carátulas distintas y tres tipos de teclado. ¿De cuántas formas puede montar Juan su móvil?

Lo puede personalizar de $4\cdot 3=12$ formas distintas.

3. En una fábrica de lámparas preparan un tipo de lámpara combinando los tipos de pantalla, pie y cuerpo, de forma que los clientes pueden personalizar su lámpara combinando estas partes. Si tienen 9 tipos de pantalla, 7 cuerpos y 6 pies, ¿cuántos tipos distintos de lámpara se pueden construir?

Es posible componer $9 \cdot 7 \cdot 6 = 378$ lámparas diferentes.

PERMUTACIONES. FACTORIAL DE UN NÚMERO

4. Calcula:

a) **El número de permutaciones de 8 elementos** - $P_8 = 8! = 40320$

b) **El número de permutaciones de 15 elementos** - $P_{15} = 15! = 1{,}31 \cdot 10^{12}$

c) **El número de permutaciones de 10 elementos** - $P_{10} = 10! = 3628800$

5. Calcula el número de permutaciones de:

a) $P_4 = 4! = 24$

b) $P_1 = 1! = 1$

c) $P_6 = 6! = 720$

d) $P_{10} = 10! = 3628800$

6. Utiliza la calculadora para calcular los siguientes números:

a) $6! = 720$

b) $4 \cdot 3! = 24$

c) $7! = 5040$

d) $5 \cdot 4! = 120$

7. Raúl quiere colocar una colección de 8 cuentos en el estante de su habitación. ¿De cuántas formas distintas los puede colocar en dicho estante?

Puede colocarlos de $8! = 40320$ formas distintas.

8. En el sorteo de la ONCE ha salido el número 18492. ¿Cuántos números con los mismo dígitos se pueden hacer?

Se pueden formar $5! = 120$ números diferentes.

VARIACIONES

9. Calcula:

a) **El número de variaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4.** - $V_{8,4}=\frac{8!}{4!}=1680$

b) **El número de variaciones de 7 elementos tomados de 6 en 6.** - $V_{7,6}=\frac{7!}{1!}=5040$

c) **El número de variaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3.** - $V_{10,3}=\frac{10!}{7!}=720$

d) **El número de variaciones de 12 elementos tomados de 8 en 8.** - $V_{12,8}=\frac{12!}{4!}=19\,958\,400$

10. Calcula:

a) **El número de variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 2 en 2.** - $VR_{5,2}=5^2=25$

b) **El número de variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3.** - $VR_{4,3}=4^3=64$

c) **El número de variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 5 en 5.** - $VR_{2,5}=2^5=32$

d) **El número de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4.** - $VR_{3,4}=3^4=81$

11. Calcula:

a) $V_{6,5}=\frac{6!}{1!}=720$

b) $V_{18,15}=\frac{18!}{3!}=1,07\cdot 10^{15}$

c) $V_{9,3}=\frac{9!}{6!}=504$

d) $V_{16,12}=\frac{16!}{4!}=8,72\cdot 10^{11}$

e) $V_{24,20}=\frac{24!}{4!}=2,58\cdot 10^{22}$

f) $V_{10,5}=\frac{10!}{5!}=30240$

12. Calcula:

a) $VR_{5,2}=5^2=25$

b) $VR_{2,8}=2^8=256$

c) $VR_{3,5}=3^5=243$

d) $VR_{7,3}=7^3=343$

e) $VR_{10,3}=10^3=1000$

f) $VR_{3,4}=3^4=81$

13. ¿Cuántos números de tres cifras distintas podemos hacer con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

Podremos hacer $V_{7,3}=\frac{7!}{4!}=210$ números distintos.

14. ¿Cuántas palabras de cinco letras distintas, con o sin sentido, se pueden construir con las letras de la palabra MURCIÉLAGO?

Sin repetir letras, podremos construir $V_{10,5} = \dfrac{10!}{5!} = 30240$ palabras distintas. Si se acepta repetir letra, podríamos hacer $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ palabras diferentes.

15. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden hacer con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4?

Podemos formar $V_{5,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60$ números diferentes sin repetir dígitos. Repitiendo dígitos podremos hacer $VR_{5,3} = 5^3 = 125$ números diferentes.

16. ¿Cuántos números pares de 4 cifras se pueden hacer con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8 y 9?

Sin repetir cifras, podemos formar $V_{8,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$ números distintos. De ellos, la mitad son pares (ya que la mitad de las cifras ofrecidas son pares). Repitiendo cifras, podremos escoger cualquiera de los 4 dígitos impares para la última cifra y elegir entre las $VR_{8,3} = 8^3 = 512$ formas diferentes para las tres primeras. En total tendremos $512 \cdot 4 = 2048$ números diferentes.

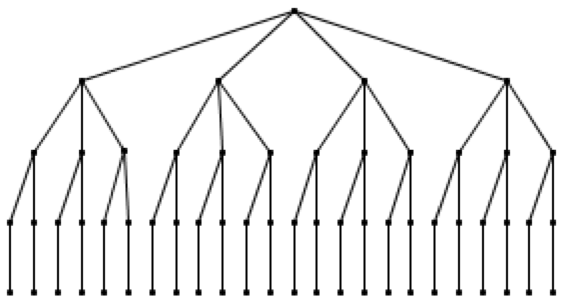
17. ¿Cuántos números menores de 10000 se pueden hacer con las cifras 0, 1, 2 y 3?

Todos los números que se forman con esas cuatro cifras son menores de diez mil. Sin repetir cifras, podremos escoger $4! = 24$ números diferentes. Si podemos repetir cifras, el número es de $4^4 = 256$.

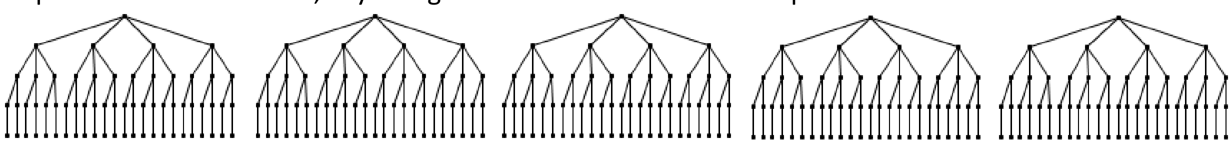
DIAGRAMAS DE ÁRBOL

18. Construye un diagrama de árbol que muestre las permutaciones de las letras A, B, C, D y E.

Un esquema de todas las permutaciones que comienzan por la letra A sería el siguiente:



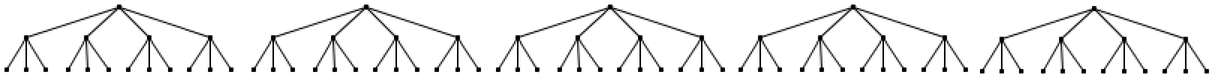
En total hay $4! = 24$ permutaciones que comienzan por la letra A y, por tanto, $5! = 120$ permutaciones en total, cuyo diagrama de árbol tendría este aspecto:



19. Haz un diagrama de árbol y enumera las variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

Tenemos en total: $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ variaciones diferentes. Tomemos los elementos como A, B, C, D y E.

En un diagrama de árbol las opciones son:



ABC
ABD
ABE
ACB
ACD
ACE
ADB
ADC
ADE
AEB
AEC
AED

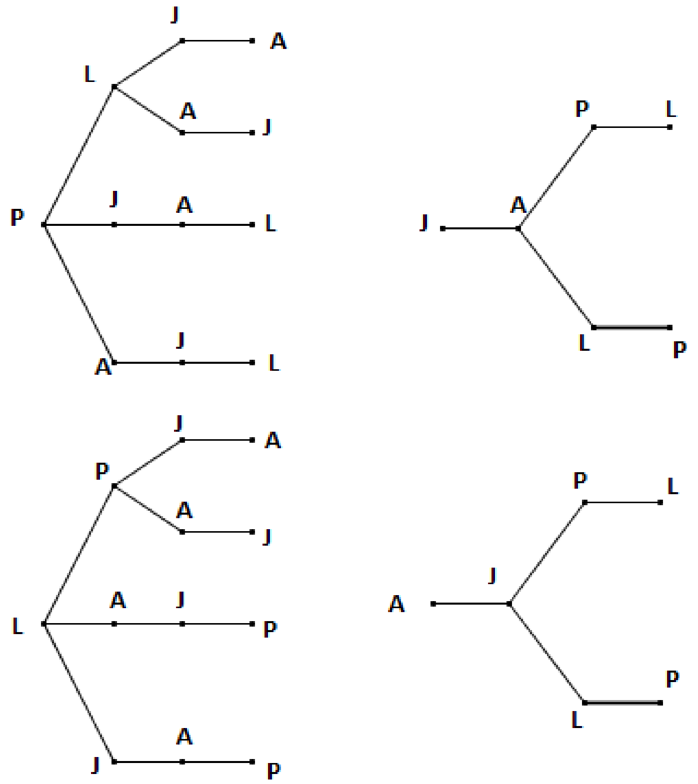
BAC
BAD
BAE
BCA
BCD
BCE
BDA
BDC
BDE
BEA
BEC
BED

CAB
CAD
CAE
CBA
CBD
CBE
CDA
CDB
CDE
CEA
CEB
CED

DAB
DAC
DAE
DBA
DBC
DBE
DCA
DCB
DCE
DEA
DEB
DEC

EAB
EAC
EAD
EBA
EBC
EBD
ECA
ECB
ECD
EDA
EDB
EDC

20. Cuatro amigos, Juan, Ana, Pedro y Lucía, van al cine. Si Juan y Ana son novios y tienen que sentarse juntos, ¿de cuántas formas podrán hacerlo? *(Nota: Utiliza un diagrama de árbol para hacer el ejercicio)*



Se podrán sentar de 12 maneras diferentes.

COMBINACIONES. NÚMERO COMBINATORIO

21. Calcula:

a) **El número de combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2**

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$$

b) **El número de combinaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3**

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$$

c) **El número de combinaciones de 50 elementos tomados de 2 en 2**

$$C_{50,2} = \binom{50}{2} = \frac{50!}{2!\cdot 48!} = 1225$$

d) **El número de combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3**

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$$

e) **El número de combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5**

$$C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$$

22. Calcula, utilizando la calculadora, los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{6}{4}=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

b) $\binom{17}{16}=\dfrac{17!}{16!\cdot 1!}=17$

c) $\binom{16}{14}=\dfrac{16!}{14!\cdot 2!}=120$

d) $\binom{12}{0}=\dfrac{12!}{0!\cdot 12!}=1$

e) $\binom{35}{35}=\dfrac{35!}{35!\cdot 0!}=1$

f) $\binom{27}{1}=\dfrac{27!}{1!\cdot 26!}=27$

23. Calcula, utilizando la fórmula de número combinatorio:

a) $\binom{20}{18}=\dfrac{20!}{18!\cdot 2!}=190$

b) $\binom{10}{2}=\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}=45$

c) $\binom{12}{9}=\dfrac{12!}{9!\cdot 3!}=220$

d) $\binom{15}{3}=\dfrac{15!}{3!\cdot 12!}=455$

e) $\binom{100}{99}=\dfrac{100!}{99!\cdot 1!}=100$

f) $\binom{125}{2}=\dfrac{125!}{2!\cdot 123!}=7750$

24. De una caja de 20 colores elegimos tres para hacer un dibujo. ¿De cuántas formas podemos elegir los tres colores?

Podremos escoger los colores de $C_{20,3}=\binom{20}{3}=\dfrac{20!}{3!\cdot 17!}=1140$ maneras diferentes.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

25. Calcula las siguientes expresiones utilizando las propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{20}{20}=1$

b) $\binom{1000}{0}=1$

c) $\binom{64}{63}=64$

d) $\binom{100}{1}=100$

e) $\binom{25}{22}+\binom{25}{23}=\binom{26}{23}=\dfrac{26!}{23!\cdot 3!}=2600$

f) $\binom{24}{22}+\binom{24}{1}=\binom{24}{22}+\binom{24}{23}=\binom{25}{23}=\dfrac{25!}{23!\cdot 2!}=300$

EL BINOMIO DE NEWTON

26. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

b) $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

27. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2+x)^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $(x-1)^7=x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$

c) $(x-2)^4=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

d) $\left(x^2+1\right)^4=x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1$

28. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$

b) $(-x+2)^5=-x^5+10x^4-40x^3+80x^2-80x+32$

c) $\left(2x^3-3x\right)^3=8x^9-12x^7+18x^5-27x^3$

d) $(-2x-3)^4=16x^4+96x^3+216x^2+72x+27$

29. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{1}{5}-x\right)^3=\dfrac{1}{125}-\dfrac{3}{25}x+\dfrac{3}{5}x^2-x^3$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)^4=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}x+\frac{3}{32}x^2-\frac{1}{32}x^3+x^4$

c) $\left(1+\frac{x}{2}\right)^5=1+\frac{5x}{2}+\frac{5x^2}{2}+\frac{5x^3}{4}+\frac{5x^4}{16}+\frac{x^5}{32}$

d) $\left(-\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{x^3}{27}+\frac{x^2}{2}-\frac{9x}{4}+\frac{27}{8}$

PROBLEMAS

30. Tres amigos se quieren repartir unas zapatillas, una gorra y un móvil. ¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo?

Se trata de una permutación ya que se reparten todos los elementos, sin repeticiones e importando el orden en que se hace. Por tanto, pueden hacerlos de $P_3=3!=6$ maneras distintas.

31. Seis amigos quieren repartirse tres camisetas iguales. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

Debemos escoger tres amigos de entre los 6, sin repetir y sin importar el orden. Se trata pues de una combinación: pueden repartirse las camisetas de $C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 6!}=20$ formas diferentes.

32. Seis amigos van a comprar las entradas para una sesión de cine, pero solo quedan cuatro. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse las entradas?

Se trata de escoger cuatro amigos de entre los seis posibles, sin repetir y sin que importe el orden en que lo hagamos. Para calcular el número de formas diferentes de repartirse las entradas debemos usar por tanto una combinación: $C_{6,4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$

33. En la radio tienen un concurso abierto que utiliza los mensajes a móviles para participar. Consiste en enviar un mensaje de texto con 5 letras ordenadas, que son las respuestas a dichas preguntas, y cada pregunta tiene tres opciones: a, b y c. De esta forma, a cada acertante de la serie que da la respuesta correcta a todas las preguntas se le obsequia con la entrada a un concierto. ¿Cuántos mensajes de móvil tenemos que enviar para acertar las cinco preguntas con toda seguridad?

Puesto que el orden en que situemos las letras importa y se pueden repetir, se trata de una variación con repetición de tres elementos tomados de 5 en 5: debemos enviar por tanto $VR_{3,5}=3^5=243$ mensajes para acertar con total seguridad.

34. En el armario de mi abuelo hay 5 trajes distintos, 6 camisas y 4 corbatas. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir mi abuelo?

Puede vestirse de $5\cdot 6\cdot 4=120$ formas distintas.

35. En mi habitación tengo 12 maquetas de automóviles antiguos. ¿De cuántas formas distintas los puedo ordenar en un estante?

Se trata de una permutación ya que se reparten todos los elementos, sin repeticiones e importando el orden en que se hace. Por tanto, puedo ordenarlas de $P_{12} = 12! = 479001600$ maneras distintas.

36. En un cajón hay 12 canicas distintas. ¿De cuántas formas distintas podemos coger cuatro canicas?

Se trata de escoger cuatro canicas de entre las doce posibles, sin repetir y sin que importe el orden en que lo hagamos. Para calcular el número de formas diferentes coger las canicas debemos usar por tanto una combinación: $C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = 495$

37. Un equipo de fútbol está compuesto por 1 portero, 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros. Si el entrenador dispone de 3 porteros, 7 defensas, 5 centrocampistas y 6 delanteros, ¿cuántos equipos distintos puede confeccionar el entrenador?

Para la portería tiene 3 opciones diferentes.
Para la defensa puede escoger 4 de entre 7. Si suponemos que no importa el orden (no distinguimos entre puestos en la defensa), tiene $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$ opciones.

En cuanto a los centrocampistas, dispone de $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ opciones.

En la delantera puede escoger entre $C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ posibilidades diferentes.

En total, dispone de $3\cdot 35\cdot 10\cdot 20 = 21000$ opciones distintas para confeccionar el equipo.

38. ¿Cuántos números distintos pueden formarse con las cifras del número 333355?

Cualquier número que formemos tendrá seis dígitos, dos de los cuales serán un 5. Por tanto, son $C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$ números diferentes.

39. Ángela está comprando ropa con su padre. El padre le dice que escoja 3 vestidos de entre los 15 que hay en la tienda. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo?

Puesto que no importa el orden en que los coja y no puede repetir, se trata de una combinación. Puede escoger los tres vestidos de $C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$ maneras diferentes.

40. El examen final de la facultad consta de 8 preguntas. Para aprobar es necesario contestar de forma correcta a la mitad de ellas, sin importar el orden:

a) **¿De cuántas formas distintas puedo elegir las cuatro preguntas?**

Puedo elegirlas de $C_{8,4}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$ formas distintas.

b) **Si hay una pregunta de la que no tengo ni idea, ¿de cuántas formas puedo elegir ahora entre las cuatro preguntas?**

En este caso solo tenemos $C_{7,4}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ formas diferentes.

41. En un estudio de diseño quieren confeccionar tres tipos de banderas, una con tres franjas horizontales, otra con dos franjas verticales y otra con tres franjas horizontales y un escudo. Si disponen de 11 colores distintos y 3 tipos de escudo, ¿cuántas banderas distintas se pueden hacer?

Para la bandera de tres franjas horizontales tenemos que tener en cuenta que el orden sí importa. Si no se admiten repeticiones tendrán $V_{11,3}=\frac{11!}{8!}=990$ banderas diferentes.

Para la bandera con dos franjas verticales, en cambio, tenemos: $V_{11,2}=\frac{11!}{9!}=110$ banderas diferentes.

Para la de tres franjas verticales con un escudo, serán: $3\cdot V_{11,3}=3\cdot\frac{11!}{8!}=2970$

En total, por tanto, podrán diseñar $990+110+2970=4070$ banderas diferentes.

Podríamos plantear banderas diferentes si se pueden repetir colores o si permitimos la repetición de colores "alterna", a la manera de las banderas de Andalucía o España. Para este caso, podemos escoger dos colores, importando el orden (exterior e interior), por lo que serán $V_{11,2}=\frac{11!}{9!}=110$ banderas más.

A este número habrá que añadirle las banderas con este diseño en vertical y un escudo, que serán $3\cdot V_{11,2}=3\cdot 110=330$. Finalmente, hay 11 banderas con un solo color (todas las franjas iguales) y 33 banderas con un solo color y un escudo encima. En total tenemos, por tanto: $4070+110+330+11+33=4543$ banderas.

Aún podríamos ampliar el número posible de diseños si admitimos dos franjas juntas de un color y la tercera de otro. De estas tendríamos $2\cdot V_{11,2}=\frac{11!}{9!}=220$ sin escudo (multiplicamos por dos puesto que las dos franjas iguales pueden ser las superiores o las inferiores) y $3\cdot 2\cdot V_{11,2}=3\cdot 2\cdot 110=660$ con escudo.

El total de banderas es, por tanto: $4543+220+660=5423$.

42. En el Museo de Ciencias tienen catalogada una colección con más de cien años. Dicha colección consta de 5 tomos sobre anatomía, 4 tomos sobre fauna animal, 6 tomos sobre especies vegetales y 3 tomos sobre insectos. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar en un estante para su exposición si no se pueden mezclar los tomos de distinto tipo?

En primer lugar, calculamos el número de formas diferentes de ordenar las categorías, que será: $4!$ Dentro de cada categoría podemos permutar el orden de los tomos. Por tanto, el total de formas diferentes de mezclar los tomos es: $4!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 3!=298598400$

43. Tres compañeros entran en el vestuario para prepararse para la competición. Tienen que vestirse cada uno con una camiseta distinta y encuentran que tienen 4 camisetas disponibles para ellos. ¿De cuántas formas pueden vestirse?

Se trata de escoger 3 elementos de entre 4, de manera que importa el orden y no admiten repetición: se trata, por tanto, de una variación: $V_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 24$ formas diferentes.

44. En la parada del autobús hay 4 personas esperando. Cuando llega el bus y se suben a él, comprueban que hay 6 asientos libres. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse los viajeros?

Los pasajeros dejarán 2 asientos libres de entre los 6. Como no importa el orden de esos dos asientos libres, hay $C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$ formas diferentes de hacerlo.

Además, los 4 pasajeros pueden cambiar de sitio entre ellos, de forma que para cada una de las configuraciones anteriores hay $4! = 24$ formas distintas de sentarse.

El total de formas distintas de sentarse será, por tanto, de $24 \cdot 15 = 360$

45. Miguel tiene una heladería. En ella sirve helados utilizando 10 sabores distintos, de forma que vende tarrinas con uno, dos y tres sabores distintos. ¿Cuántos envases distintos puede hacer para su venta?

Para un sabor tendrá 10 envases diferentes según el sabor.

Para dos sabores, puesto que no importa el orden y no tiene sentido repetir (sería un solo sabor), podremos hacer $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$ helados diferentes.

Con tres sabores hay $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$ helados distintos.

En total, por tanto, tiene que hacer $10 + 45 + 120 = 175$ envases distintos.

46. En una urna hay siete bolas numeradas del 0 al 6. Si se sacan cinco bolas sin devolverlas a la urna, ¿cuántos números se pueden formar?

El orden en que se saquen las bolas importa y no se pueden repetir, de forma que hay $V_{6,5} = \frac{6!}{1!} = 720$ números posibles.

47. Las matrículas de los coches están compuestas por tres letras y cuatro números. De las letras están eliminadas las vocales para evitar formar palabras. ¿Cuántos coches se pueden matricular con este sistema?

Puesto que hay 20 letras diferentes (eliminamos la Ñ y la Q también puesto que dan lugar a equívocos al leer las matrículas), y tenemos que el orden importa y se pueden repetir letras, se trata de una variación con repetición: $VR_{20,3} = 20^3 = 8000$ formas diferentes para las letras. Para cada combinación de letras hay diez mil números, por tanto, el total es de 80 millones de matrículas.

48. ¿Cuántas palabras de 4 letras con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra RAUDO? ¿Y que empiecen por R?

Podemos formar $V_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 120$ palabras diferentes.

La quinta parte de ellas empieza por R, luego son 24 palabras.

49. Siete amigos van juntos al cine y se encuentran con dos amigos más, Ana y Alberto. Determina:

a) **¿De cuántas formas distintas pueden sentarse los amigos juntos en una fila?**
Como importa el orden en que se sienten y han de hacerlo todos, se trata de una permutación. Hay por tanto $7!=5040$ maneras diferentes de sentarse.

b) **Si Ana y Alberto son novios y quieren estar siempre juntos, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar?**
Si se tienen que sentar juntos, hay que considerarlos como un solo elemento a la hora de ordenarlos. De este modo, ahora hay $6!=720$ formas diferentes de sentarse.

c) **Ana y Alberto se han peleado. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar si Ana y Alberto no pueden estar juntos?**
Restando los dos resultados anteriores, tenemos que en $5040-720=4320$ de las formas de sentarse Ana y Alberto no estarán juntos.

50. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 determina:

a) **¿Cuántos números de tres cifras podemos formar?**
Si no admitimos repetición de dígitos, en la primera cifra puede ir cualquiera menos el 0 y en las otras dos cualquiera de los restantes: $9\cdot 9\cdot 8=648$ números distintos.

b) **¿Cuántos números de cinco cifras?**
Si no admitimos repetición de dígitos, en la primera cifra puede ir cualquiera menos el 0 y en las otras cualquiera de los restantes: $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=27216$ números distintos.

c) **¿Cuántos números pares de cinco cifras?**
Si la última cifra es un cero, el resto pueden ser: $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$.
Si la última cifra es un dos, un cuatro, un seis o un ocho, el resto pueden ser: $8\cdot 8\cdot 7\cdot 6=2688$.
En total, tenemos $4\cdot 2688+3024=13776$

d) **¿Cuántos múltiplos de 5 con cuatro cifras?**
Si la última cifra es un cero, el resto de las cifras pueden ser: $9\cdot 8\cdot 7=504$.
Si la última cifra es un cinco, el resto pueden ser: $8\cdot 8\cdot 7=448$
En total hay $504+448=952$

e) **¿Cuántos números de 4 cifras múltiplos de 2 y 5?**
La última cifra habrá de ser un cero, y el resto $9\cdot 8\cdot 7=504$

51. Con las letras de la palabra RIACHUELO, calcula:

a) **El número de palabras de tres letras distintas que se pueden formar.**
Podremos formar palabras reordenando las letras, sin repetir: $V_{9,3}=\dfrac{9!}{6!}=504$

b) **El número de palabras de cuatro letras que se pueden formar.**
$$V_{9,4}=\frac{9!}{5!}=3024$$

c) **El número de palabras de menos de cuatro letras que se pueden formar.**
Sumando el número de palabras con tres, dos o una letra:
$$V_{9,3}+V_{9,2}+V_{9,1}=\frac{9!}{6!}+\frac{9!}{7!}+\frac{9!}{8!}=504+72+9=585$$

d) **El número de palabras de seis letras que se pueden formar.**
$$V_{9,6}=\frac{9!}{3!}=60480$$

e) **El número de palabras de cuatro letras que empiecen por U.**

En este caso se trata de formar palabras de 3 letras con las 8 letras restantes:

$$V_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 336$$

f) **El número de palabras de seis letras que empiecen por U y terminen por O.**
En este caso se trata de formar palabras de cuatro letras con las 7 restantes:

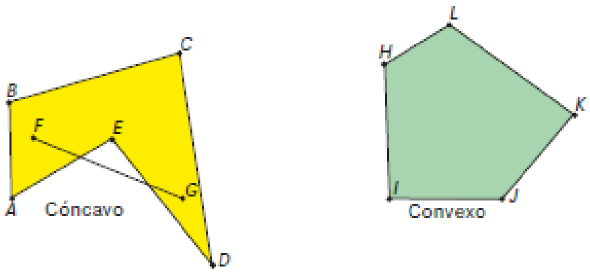
$$V_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 840$$

g) **El número de palabras que se pueden formar sin repetir las letras.**
Permutando todas las letras formamos $P_9 = 9! = 362880$ palabras

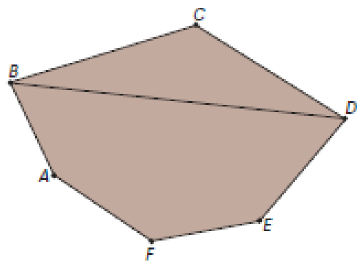
DESAFÍO PISA - PÁG. 269

CONTANDO CON LOS POLÍGONOS

Un polígono es convexo si el segmento que une cualesquiera dos puntos interiores del polígono no interseca a los lados del polígono.



Una diagonal de un polígono es el segmento que se puede trazar uniendo dos vértices que no coinciden con un lado de dicho polígono.



ACTIVIDAD 1. Un polígono al que no se le pueden trazar diagonales es un:

B: Triángulo, ya que cualquier segmento que una sus vértices coincide con uno de los lados.

ACTIVIDAD 2: Un cuadrado tiene dos diagonales; un pentágono tiene:

C: Cinco. Cada punto se une con otros dos, lo que haría 10 diagonales, pero como están compartidas de dos en dos hay que dividir entre dos.

ACTIVIDAD 3: El número de diagonales de un hexágono son:

C: 9. Cada punto se une con otros 3, y como las diagonales se comparten entre dos: $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

ACTIVIDAD 4: El número de diagonales de un dodecágono es:

B: 54. Del mismo modo que antes, $\frac{12\cdot(12-3)}{2}=54$ (restamos 3 del número de vértices ya que se descuentan los vértices adyacentes y el propio vértice).

ACTIVIDAD 5: El número de diagonales de un polígono de cien lados es:

A: 4850. Del mismo modo que antes, $\frac{100\cdot(100-3)}{2}=4850$