MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

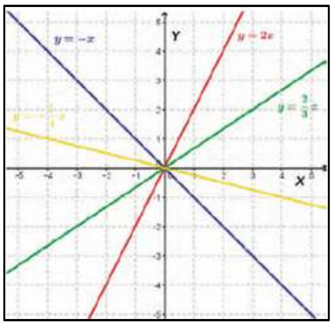
Unidad 11. Estudio de algunas funciones

Unidad 11. Estudio de algunas funciones

SOLUCIONES PÁG. 245

1 Representa las siguientes funciones:

a. $y = 2x$ **b.** $y = -x$ **c.** $y = \frac{2}{3}x$ **d.** $y = -\frac{1}{4}x$



2 Actividad resuelta.

3 Halla, en cada caso, la expresión algebraica de la función lineal que pasa por el punto:

En cada caso las funciones son lineales, por lo que pasan por el origen de coordenadas. Se hallará la pendiente y se sustituye en la expresión y = mx.

a. P (2 , –4)

$$m = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y = -2x$$

b. Q (–1 , –3)

$$m = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow y = 3x$$

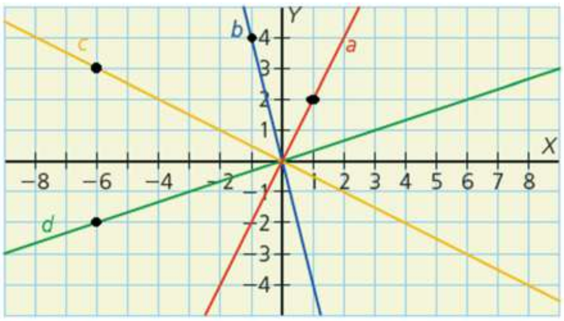
c. R (6 , 3)

$$m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

d. S (–2 , 5)

$$m = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x$$

4 Halla la expresión algebraica de estas rectas:



Se elige un punto cualquiera de la recta y se sustituye en la expresión de la función y = mx, ya que todas las funciones son lineales.

a. Se coge el punto (1 , 2).

$m = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = 2x$

b. Se coge el punto (–1 , 4).

$m = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow y = -4x$

c. Se coge el punto (–6 , 3).

$m = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

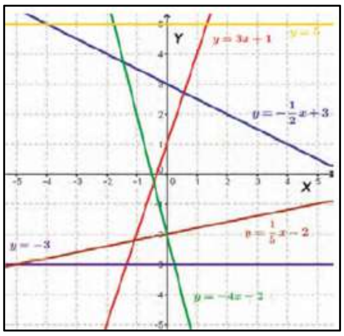
d. Se coge el punto (–6 , –2).

$m = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$

5 Representa las funciones propuestas.

a. $y = 3x + 1$ **c.** $y = -4x - 2$ **e.** $y = -3$

b. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **d.** $y = 5$ **f.** $y = \frac{1}{5} - 2$



6 Actividad resuelta.

7 Halla, en cada caso, la expresión algebraica correspondiente a una función afín que cumple estas condiciones:

a. Pasa por los puntos P (–3 , 1) y Q (6 , 4).

Se halla la pendiente:

$m = \frac{4-1}{6+3} = \frac{1}{3}$

Se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión $y = mx + n$ para averiguar *n:*

$1 = \frac{1}{3}(-3) + n \Rightarrow n = 2$

La función es: $y = \frac{1}{3}x + 2$

b. Pasa por el punto R (2 , –1), y su pendiente es –3.

Se sustituye la pendiente y el punto en la expresión general de la función:

$y = mx + n \Rightarrow -1 = -3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 5$

La función es: $y = -3x + 5$

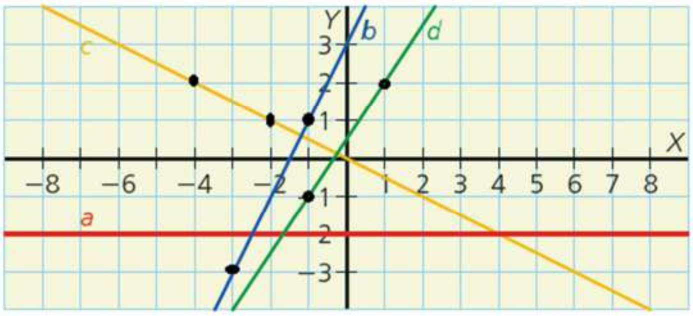
c. Pasa por el punto S (–2 , 4) y es paralela a $y = 5x$.

Por ser una recta paralela, la pendiente es la misma, m = 5. Por tanto, se sustituye la pendiente y el punto en la expresión general de la función:

$y = mx + n \Rightarrow 4 = 5 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 14$

La función es: $y = 5x + 14$

8 Determina la expresión de las siguientes funciones:



Se eligen dos puntos cualesquiera de la recta y se sustituye en la expresión de la función *y* = m*x* + n

a. La recta *a* es paralela al eje de *X,* por lo tanto, es de la forma *y* = n. La función es: *y* = –2

b. Se eligen como puntos P (–1 , 1) y Q (–3 , –3). Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$$

Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:

$y = mx + n \Rightarrow 1 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = 3$

En consecuencia, la función es: $y = 2x + 3$

c. Se eligen como puntos P (–2 , 1) y Q (–4 , 2). Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{2-1}{-4+2} = -\frac{1}{2}$$

Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:

$$y = mx + n \Rightarrow 2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4) + n \Rightarrow n = 0$$

En consecuencia, la función es: $y = -\frac{1}{2}x$

d. Se eligen como puntos P (1 , 2) y Q (–1 , –1). Se calcula la pendiente:

$$m = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{3}{2}$$

Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:

$$y = mx + n \Rightarrow -1 = \frac{3}{2} \cdot (-1) + n \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

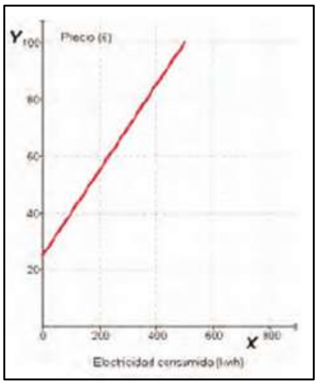
En consecuencia, la función es: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

9 Una empresa suministradora de electricidad cobra 25 € mensuales por mantenimiento y 0,15 € por cada kilovatio hora. ¿A cuánto asciende la factura de este mes de Sebastián si ha consumido 310 kWh? Escribe la expresión algebraica de la función y dibújala.

Este mes la factura asciende a:

310 · 0,15 + 25 = 71,50 €

La expresión algebraica es: f (x) = 0,15x + 25



SOLUCIONES PÁG. 247

10 Representa la gráfica de estas funciones, hallando su vértice y los puntos de corte con los ejes, y, a partir de ella, estudia el dominio, el recorrido y la monotonía de la función:

a. f (x) = x^2 – 2x – 8

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

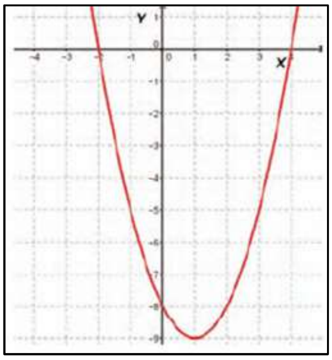
$$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 - 8 = -9$$

Puntos de corte con el eje *X:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \Rightarrow (4,0) \\ x_2 = -2 \Rightarrow (-2,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = –8 ⇒ (0 , –8)



D (f) = ℝ, R (f) = [–9 , +∞)

Creciente: (1 , +∞), decreciente: (–∞ , 1)

b. f (*x*) = *x*² + 6*x* + 9

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

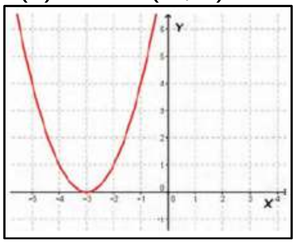
$$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-3) = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 9 = 0$$

Puntos de corte con el eje *X:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow (-3, 0)$$

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = 9 ⇒ (0 , 9)



D (f) = ℝ, R (f) = [0 , +∞)

Creciente: (–3 , +∞), decreciente: (–∞ , –3)

c. f (*x*) = 2*x*² + 4*x* – 1

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot 2} = -1$$

$$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 1 = -3$$

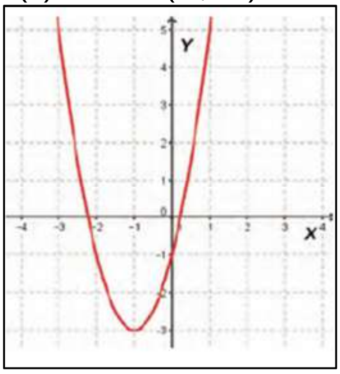
Puntos de corte con el eje *X:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2\cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4} =$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}, 0\right) \\ x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = –1 ⇒ (0 , –1)



D (f) = ℝ, R (f) = [–3 , +∞)

Creciente: (–1 , +∞), decreciente: (–∞ , –1)

d. f (x)= x^2 + 3

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$

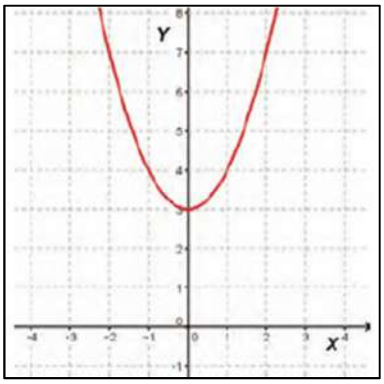
$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(0) = 0^2 + 3 = 3$

Puntos de corte con el eje *X:*

$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Rightarrow$ No corta al eje *X.*

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = 3 $\Rightarrow$ (0 , 3)



D (f) = ℝ, R (f) = [3 , +∞)

Creciente: (0 , +∞), decreciente: (–∞ , 0)

e. f (x) = –3x^2 + 6x

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

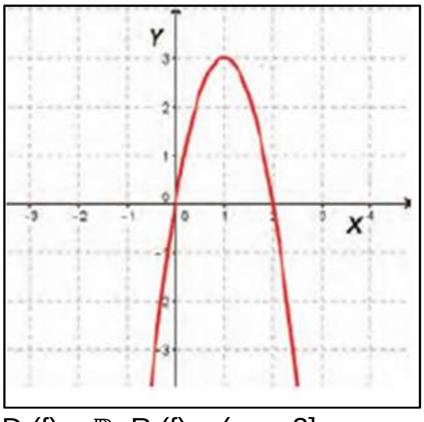
$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$

Puntos de corte con el eje *X:*

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (-3x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow (2,0) \end{cases}$

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = 0 $\Rightarrow$ (0 , 0)



D (f) = ℝ, R (f) = (–∞ , 3]

Creciente: (–∞ , 1), decreciente: (1 , +∞)

f. $\mathbf{f\ (x) = -2x^2 + 8}$

Se halla el vértice: $V = (x_v\ ,\ y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot(-2)} = 0$$

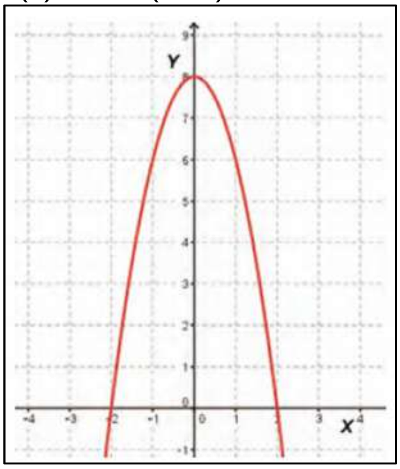
$$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\ (0) = -2\cdot 0^2 + 8 = 8$$

Puntos de corte con el eje *X:*

$$-2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow (2,0) \\ x_2 = -2 \Rightarrow (-2,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje *Y:*

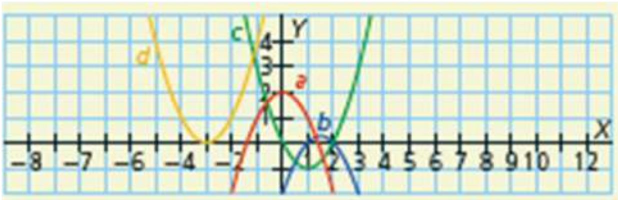
$f\ (0) = 8 \Rightarrow (0\ ,\ 8)$



D (f) = ℝ, R (f) = (–∞ , 8]

Creciente: (–∞ , 0), decreciente: (0 , +∞)

11 Asocia, de forma razonada, cada una de estas parábolas con su expresión algebraica:



a. $\mathbf{f\ (x) = x^2 + 6x + 9}$

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. Se trata de la parábola x^2 desplazada 3 unidades a la izquierda. Por lo tanto, es la gráfica d.

b. $\mathbf{f\ (x) = -x^2 + 3x - 2}$

Como a < 0, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo. Corta al eje de ordenadas en $x = -2$. Por lo tanto, es la gráfica b.

c. $\mathbf{f\ (x) = -x^2 + 2}$

Como a < 0, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo. Tiene como coeficiente *b* nulo, por lo que su vértice está sobre el eje de ordenadas. Es la gráfica a.

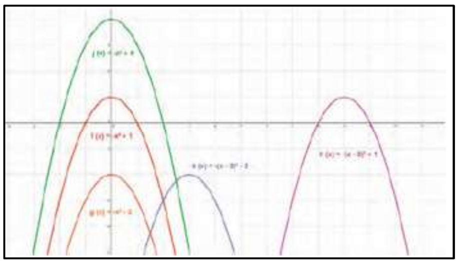
d. $\mathbf{f\ (x) = x^2 - 2x}$

$x^2 - 2x = x \cdot (x - 2)$. Tiene como coeficiente *c* nulo. Por lo tanto, corta al origen de coordenadas. Es la gráfica c.

12 Representa la función f (x) = $-x^2 + 1$. A partir de ella traza las siguientes funciones:

a. g (x) = $-x^2 - 2$ c. k (x) = $-(x - 3)^2 - 2$

b. h (x) = $-(x - 3)^2 + 1$ d. j (x) = $-x^2 + 4$



13 Actividad resuelta.

14 Halla la función cuadrática que pasa por los puntos P (–3 , 2), Q (–1 , 0) y R (1 , 6), e indica las coordenadas del vértice.

Los tres son puntos de la parábola, por lo tanto, se sustituye cada uno de ellos en la expresión general de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} 9a - 3b + c = 2 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{y se sustituye en la primera y en la tercera}]{\text{Se despeja } a \text{ de la segunda ecuación}} \left.\begin{array}{l} 9\cdot(b - c) - 3b + c = 2 \\ b - c + b + c = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6b - 8c = 2 \\ b + b = 6 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene que b = 3

Se sustituye en la primera ecuación:

$6 \cdot 3 - 8 \cdot c = 2 \Rightarrow c = 2$

Por último, se averigua a de la segunda ecuación del sistema inicial:

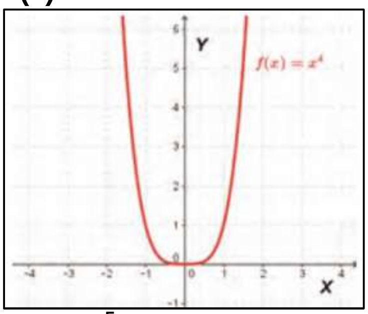
$a = b - c \Rightarrow a = 3 - 2 = 1$

La función es f (x) = $x^2 + 3x + 2$

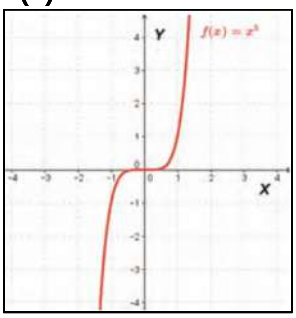
SOLUCIONES PÁG. 248

15 Representa gráficamente las siguientes funciones:

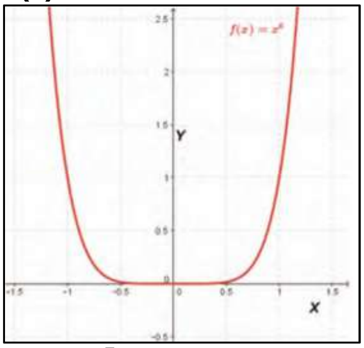
a. f (x) = x^4



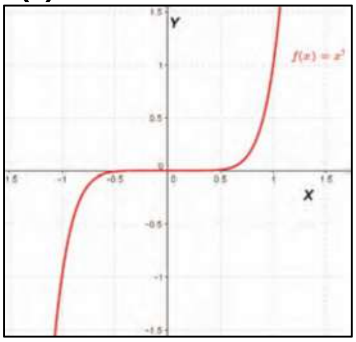
b. f (x) = x^5



c. **f (*x*) = x^6**



d. **f (*x*) = x^7**

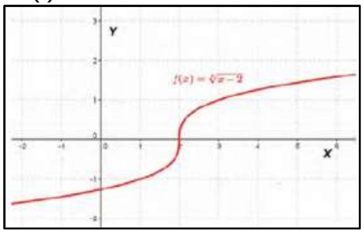


16 **Halla el dominio de las funciones propuestas, represéntalas y di, en cada caso, cuál es el recorrido. ¿Son simétricas?**

a. **f (*x*) = $\sqrt[3]{x-2}$**

Como la expresión algebraica de la función, f (*x*) = $\sqrt[3]{x-2}$, tiene *x* bajo un radical de índice impar, la función está definida para todos los números reales:

D (f) = $\mathbb{R}$.



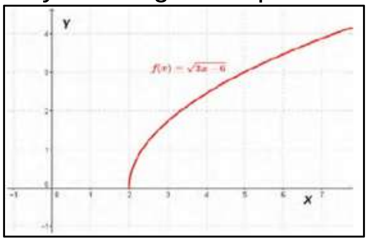
R (f) = $\mathbb{R}$, no es simétrica.

b. **f (*x*) = $\sqrt{3x-6}$**

Como la expresión algebraica de la función, f (*x*) = $\sqrt{3x-6}$, tiene *x* bajo un radical de índice par, la función solo está definida si el radicando es positivo o nulo. Para determinar los valores de *x* que hacen que el radicando sea positivo o nulo, se resuelve la inecuación:

$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales mayores o iguales que 2. D (f) = [2 , +∞)

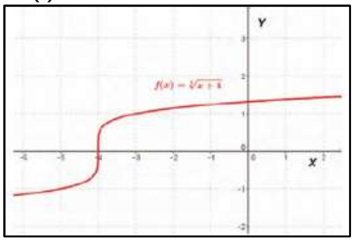


R (f) = [0 , +∞), no es simétrica.

c. f (*x*) = $\sqrt[5]{x+4}$

Como la expresión algebraica de la función, f (*x*) = $\sqrt[5]{x+4}$, tiene *x* bajo un radical de índice impar, la función está definida para todos los números reales:

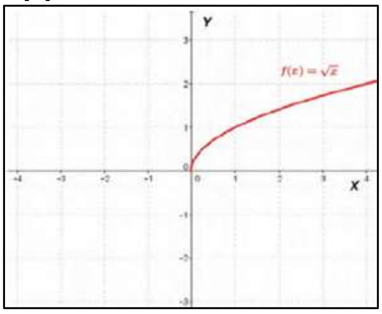
D (f) = $\mathbb{R}$.



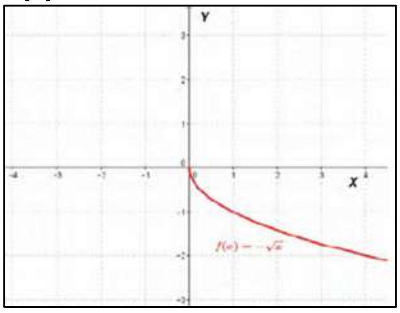
R (f) = $\mathbb{R}$, no es simétrica.

17 En los grupos habituales, representad las siguientes funciones y determinad, de forma razonada, cómo se puede obtener la gráfica de cada una de ellas a partir de la gráfica de la función f (*x*) = $\sqrt{x}$

a. f (x) = $\sqrt{x}$

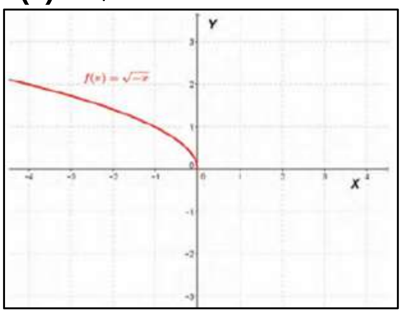


b. f (x) = $-\sqrt{x}$



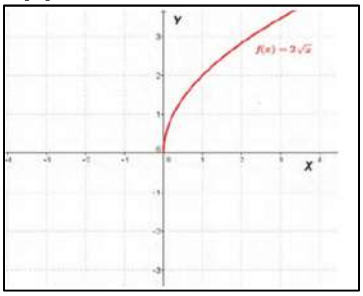
Se obtiene haciendo la simétrica respecto del eje *X*.

c. f (x) = $\sqrt{-x}$



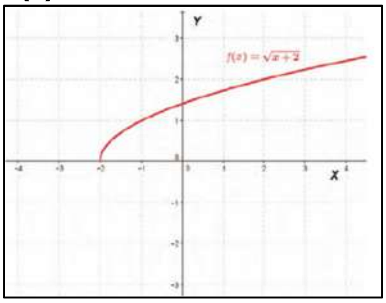
Se obtiene haciendo la simétrica respecto del eje *Y*.

d. f (x) = 2 $\sqrt{x}$



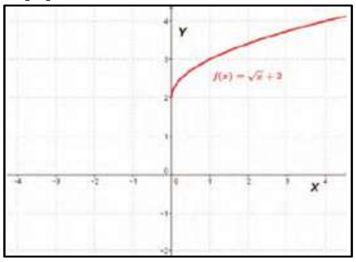
Se obtiene multiplicando las imágenes de los puntos por 2.

e. f (x) = $\sqrt{x+2}$



Se obtiene desplazando la gráfica 2 unidades hacia la izquierda.

f. f (x) = $\sqrt{x}$ + 2



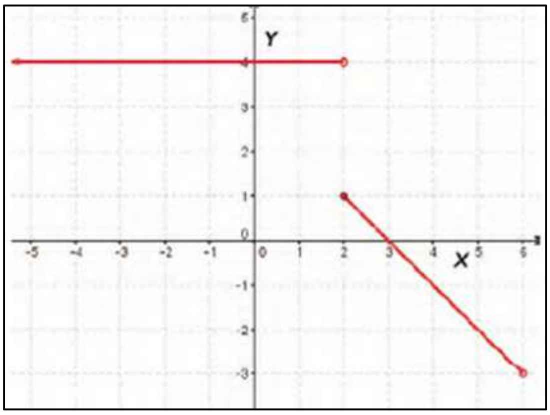
Se obtiene desplazando la gráfica 2 unidades hacia arriba.

SOLUCIONES PÁG. 249

18 Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

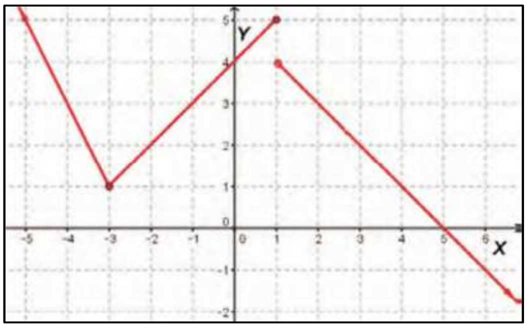
a. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 2 \\ -x+3 & \text{si } 2 \leq x < 6 \end{cases}$

- La función constante f_1 (x) = 4 está definida en el intervalo (–∞ , 2). Es una recta paralela al eje de abscisas. El valor de la función en el extremo del intervalo, x = 2, es f_1 (2) = 4, Así, el extremo será el punto (2 , 4) y se representa hueco al no pertenecer x = 2 al intervalo (–∞ , 2).
- La función afín f_2 (x) = –x + 3 está definida en el intervalo [2 , 6). Su representación es una recta. El valor de la función en el extremo del intervalo, x = 2, es f_2 (2) = –2 + 3 = 1; luego el extremo es el punto (2 , 1) y será un punto relleno, pues x = 2 pertenece al intervalo [2 , 6). El valor de la función en el extremo del intervalo, x = 6, es f_2 (6) = –6 + 3 = –3; luego el extremo es el punto (6 , –3) y será un punto hueco, pues x = 6 no pertenece al intervalo [2 , 6).



b. $$\mathbf{f\,(x)} = \begin{cases} \mathbf{-2x-5} & \textbf{si } \mathbf{x<-3} \\ \mathbf{x+4} & \textbf{si } \mathbf{-3\le x\le 1} \\ \mathbf{5-x} & \textbf{si } \mathbf{1<x} \end{cases}$$

- La función afín f_1 (x) = –2x – 5 está definida en el intervalo (–∞ , –3). El valor de la función en el extremo del intervalo, x = –3, es f_1 (–3) = –2 · (–3) – 5 = 1, Así, el extremo será el punto (–3 , 1) y se representa hueco al no pertenecer x = –3 al intervalo (–∞ , –3).
- La función afín f_2 (x) = x + 4 está definida en el intervalo [–3 , 1]. Su representación es una recta. El valor de la función en el extremo del intervalo, x = –3, es f_2 (–3) = –3 + 4 = 1; luego el extremo es el punto (–3 , 1) y será un punto relleno, pues x = –3 pertenece al intervalo [–3 , 1]. El valor de la función en el extremo del intervalo, x = 1, es f_2 (1) = 1 + 4 = 5; luego el extremo es el punto (1 , 5) y será un punto relleno, pues x = 1 pertenece al intervalo [–3 , 1].
- La función afín f_3 (x) = 5 – x está definida en el intervalo (1 , +∞). El valor de la función en el extremo del intervalo, x = 1, es f_3 (1) = 5 – 1 = 4, Así, el extremo será el punto (1 , 4) y se representa hueco al no pertenecer x = 1 al intervalo (1 , +∞).



19 Representa la función propuesta y, a partir de su gráfica, estudia el dominio, el recorrido, los puntos de corte con los ejes y los puntos de discontinuidad.

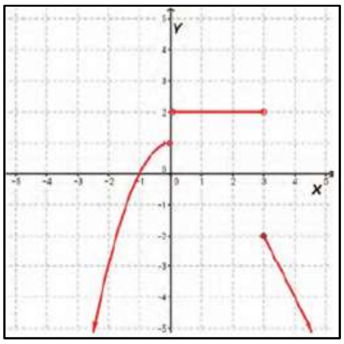
$$\mathbf{f}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1} & \textbf{si } \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \textbf{si } \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{3} \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4} & \textbf{si } \mathbf{3} \le \boldsymbol{x} \end{cases}$$

- La función cuadrática $f_1(x) = -x^2 + 1$ está definida en el intervalo $(-\infty , 0)$. Su representación gráfica es una parábola cuyas ramas apuntan hacia abajo. Se halla su vértice:

  $$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot(-1)} = 0$$

  $$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(0) = -0^2 + 1 = 1$$

  Como el vértice (0 , 1) tiene como abscisa $x = 0$, el punto se representa hueco, pues no pertenece al intervalo $(-\infty , 0)$.
- La función constante $f_2(x) = 2$ está definida en el intervalo (0 , 3). Es una recta paralela al eje de abscisas. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 0$, es $f_2(0) = 2$. Así, el extremo será el punto (0 , 2) y se representa hueco al no pertenecer $x = 0$ al intervalo (0 , 3). El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 3$, es $f_2(3) = 2$. Así, el extremo será el punto (3 , 2) y se representa hueco al no pertenecer $x = 3$ al intervalo (0 , 3).
- La función afín $f_3(x) = -2x + 4$ está definida en el intervalo $[3 , +\infty)$. Su representación es una recta. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 3$, es $f_3(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2$; luego el extremo es el punto (3 , –2) y será un punto relleno, pues $x = 3$ pertenece al intervalo $[3 , +\infty)$.



Al observar su gráfica se obtiene que:
D (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$
R (f) = $(-\infty , 1) \cup \{2\}$
Puntos de corte con los ejes: con el eje *X*, (–1 , 0), con el eje *Y* no tiene.
En $x = 0$ existe una discontinuidad inevitable de tipo salto finito y ese valor de x no pertenece al dominio de la función.
En $x = 3$ existe una discontinuidad inevitable de tipo salto finito, y ese valor de x pertenece al dominio, por tanto, la función es discontinua en este punto.
Creciente en $(-\infty , 0)$, decreciente en $(3 , +\infty)$ y constante en (0 , 3).

SOLUCIONES PÁG. 250

20 Expresa como función definida a trozos las siguientes funciones y represéntalas:

a. f (*x*) = |*x* + 2|

La función definida a trozos es:

$$f\,(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2 < 0 \end{cases}$$

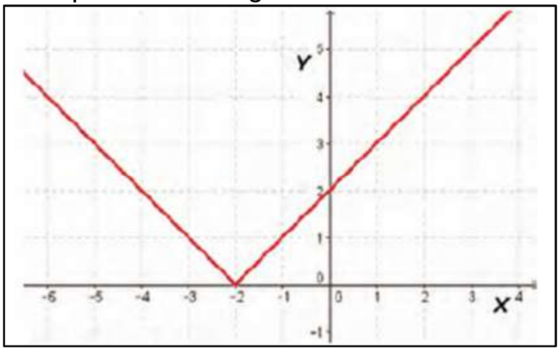
Se determinan los intervalos donde la expresión *x* + 2 es positiva y negativa:

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Por tanto, la función es:

$$f\,(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



b. f (*x*) = |–*x* – 5|

La función definida a trozos es:

$$f\,(x) = |-x-5| = \begin{cases} -x-5 & \text{si } -x-5 \geq 0 \\ -(-x-5) & \text{si } -x-5 < 0 \end{cases}$$

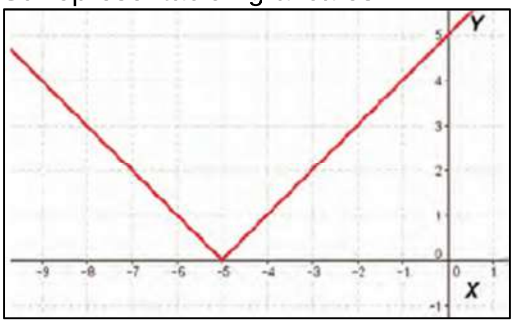
Se determinan los intervalos donde la expresión –*x* – 5 es positiva y negativa:

$-x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -5$

Por tanto, la función es:

$$f\,(x) = |-x-5| = \begin{cases} -x-5 & \text{si } x \leq -5 \\ x+5 & \text{si } x > -5 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



c. f (x) = |x^2 – 1|

La función definida a trozos es:

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1\geq 0 \\ -(x^2-1) & \text{si } x^2-1<0 \end{cases}$$

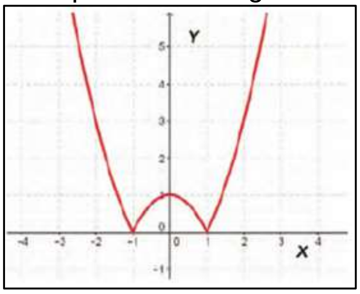
Se determinan los intervalos donde la expresión $x^2 - 1$ es positiva y negativa:

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 1) \geq 0$

Por tanto, la función es:

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\leq -1 \\ -x^2+1 & \text{si } -1<x<+1 \\ x^2-1 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



d. f (x) = |–3x + 1|

La función definida a trozos es:

$$f(x)=|-3x+1|=\begin{cases} -3x+1 & \text{si } -3x+1\geq 0 \\ -(-3x+1) & \text{si } -3x+1<0 \end{cases}$$

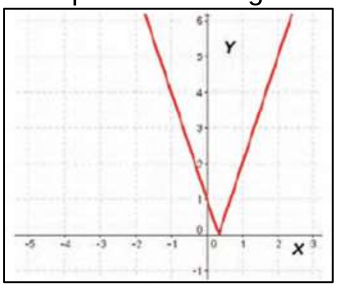
Se determinan los intervalos donde la expresión $-3x + 1$ es positiva y negativa:

$-3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$

Por tanto, la función es:

$$f(x)=|-3x+1|=\begin{cases} -3x+1 & \text{si } x\leq \dfrac{1}{3} \\ 3x-1 & \text{si } x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



e. f (x) = |5x – 10|

La función definida a trozos es:

$$f(x)=|5x-10|=\begin{cases}5x-10 & \text{si } 5x-10\geq 0\\ -(5x-10) & \text{si } 5x-10<0\end{cases}$$

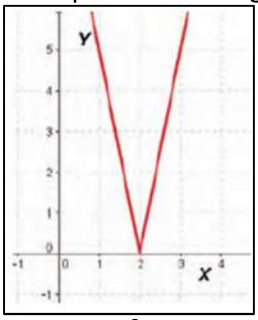
Se determinan los intervalos donde la expresión 5x – 10 es positiva y negativa:

$5x - 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Por tanto, la función es:

$$f(x)=|5x-10|=\begin{cases}5x-10 & \text{si } x\geq 2\\ -5x+10 & \text{si } x<2\end{cases}$$

Su representación gráfica es:



f. f (x) = |–x^2 + x + 6|

La función definida a trozos es:

$$f(x)=|-x^2+x+6|=\begin{cases}-x^2+x+6 & \text{si } -x^2+x+6\geq 0\\ -(-x^2+x+6) & \text{si } -x^2+x+6<0\end{cases}$$

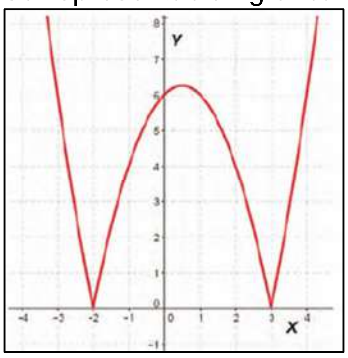
Se determinan los intervalos donde la expresión –x^2 + x + 6 es positiva y negativa:

$-x^2 + x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 3) \geq 0$

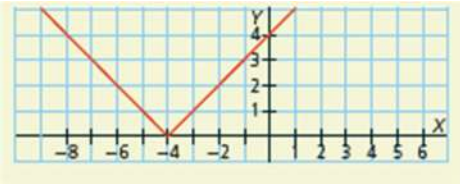
Por tanto, la función es:

$$f(x)=|-x^2+x+6|=\begin{cases}x^2-x-6 & \text{si } x<-2\\ -x^2+x+6 & \text{si } 2\leq x\leq 3\\ x^2-x-6 & \text{si } x>3\end{cases}$$

Su representación gráfica es:



21 Halla la expresión algebraica de esta función:



Se eligen como puntos P (–2 , 2) y Q (0 , 4). Se calcula la pendiente:

m = $\dfrac{4-2}{0-(-2)}=\dfrac{2}{2}=1$

Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:

$y = mx + n \Rightarrow 2 = 1 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 4$

En consecuencia, la función es: $y = x + 4$.

Al ser la gráfica de una función valor absoluto, la expresión algebraica es: f (x) = $|x + 4|$

SOLUCIONES PÁG. 251

22 Representa las funciones:

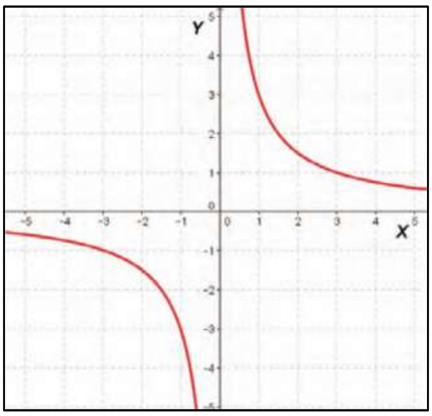
a. f (*x*) = $\dfrac{3}{x}$

Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que no está definida en $x = 0$ por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = $\mathbb{R} - \{0\}$
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en $x = 0$. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k > 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrante y la función es decreciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	3	–1	–3
y	3	1	–3	–1

La representación gráfica de la función f (x) = $\dfrac{3}{x}$ es:



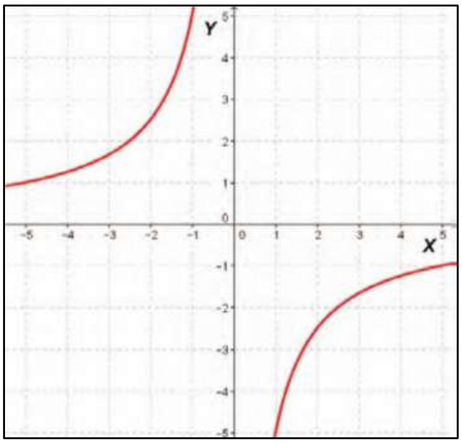
b. $\mathbf{f\,(x) = -\dfrac{5}{x}}$

Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ – {0}, ya que no está definida en *x* = 0 por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = ℝ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en *x* = 0. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en *y* = 0.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k < 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el segundo y cuarto cuadrante y la función es creciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	5	–1	–5
y	–5	–1	5	1

La representación gráfica de la función $f\,(x) = -\dfrac{5}{x}$ es:



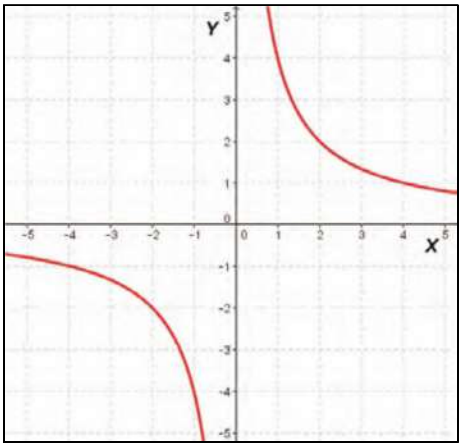
c. **f (*x*) =** $\mathbf{\dfrac{4}{x}}$

Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ – {0}, ya que no está definida en *x* = 0 por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = ℝ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en *x* = 0. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en *y* = 0.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k > 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrante y la función es decreciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	4	–1	–4
y	4	1	–4	–1

La representación gráfica de la función f (*x*) = $\dfrac{4}{x}$ es:



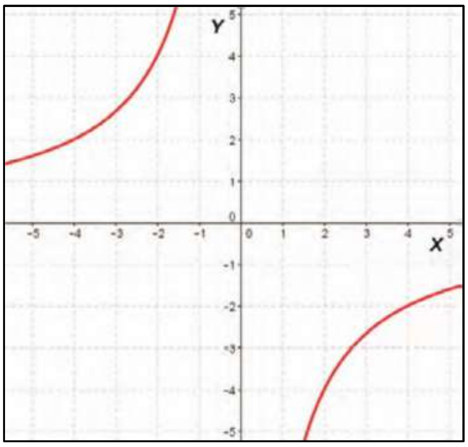
d. **f (*x*) = –** $\mathbf{\dfrac{8}{x}}$

Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ – {0}, ya que no está definida en *x* = 0 por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = ℝ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en *x* = 0. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en *y* = 0.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k < 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el segundo y cuarto cuadrante y la función es creciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

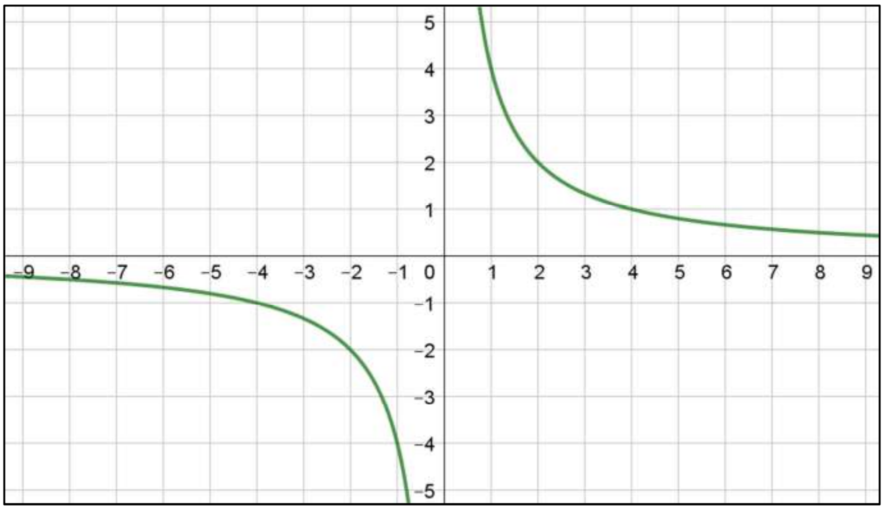
x	1	8	–1	–8
y	–8	–1	8	1

La representación gráfica de la función f (x) $= -\frac{8}{x}$ es:

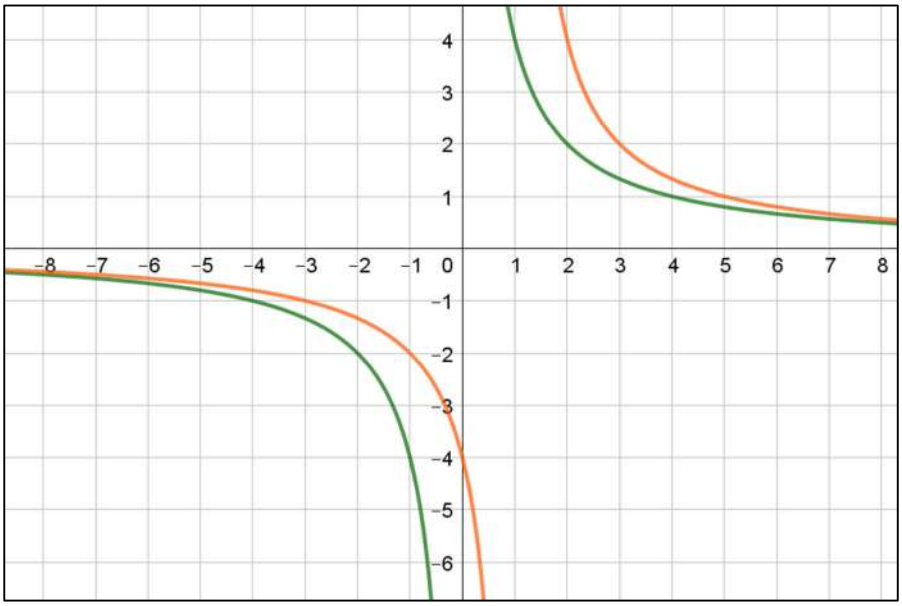


23 A partir de la gráfica de la función f (x) = $\frac{4}{x}$, representa las funciones g (x) = $\frac{4}{x-1}$, h (x) = $\frac{4}{x}$ – 3 e i (x) = $\frac{4}{x-1} - 3$.

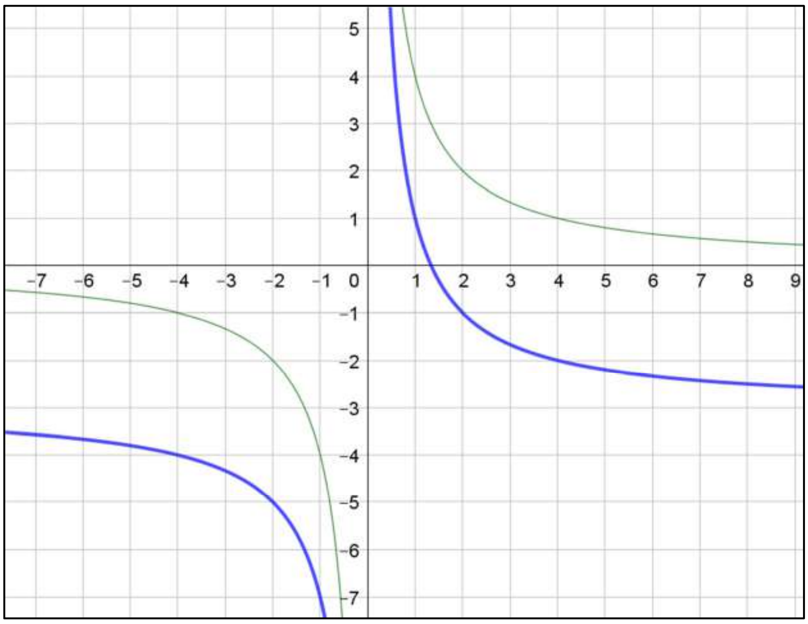
La gráfica de la función $\frac{4}{x}$ es la siguiente:



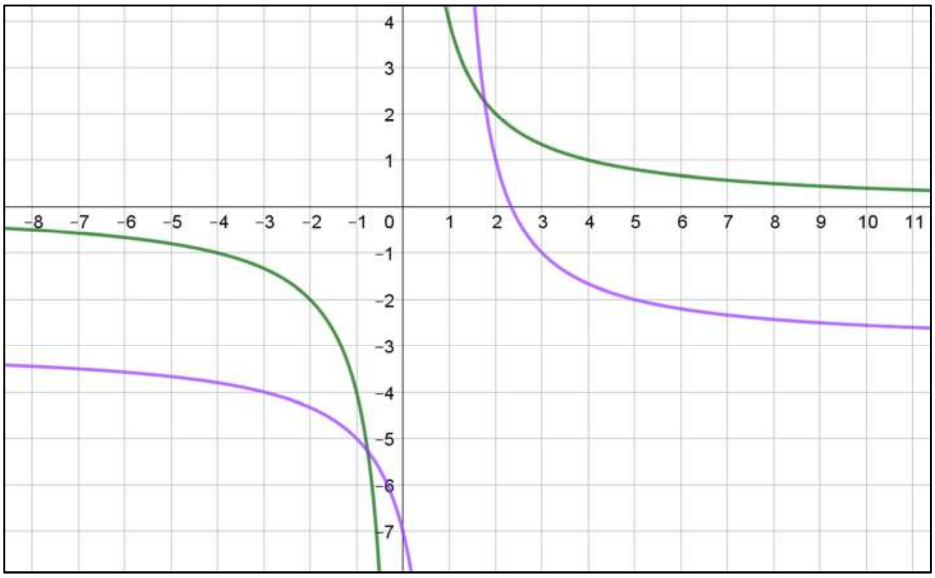
La función g (x) = $\frac{4}{x-1}$ está trasladada 1 unidad hacia la derecha con respecto a la función $\frac{4}{x}$, porque q = 1. Su representación gráfica es:



La función h (x) = $\frac{4}{x}$ – 3 está trasladada 3 unidades hacia abajo con respecto a la función $\frac{4}{x}$, porque p = –3. Su representación gráfica es:



La función i (x) = $\frac{4}{x-1} - 3$ está trasladada 1 unidad hacia la derecha con respecto a la función $\frac{4}{x}$, porque q = 1 y 3 unidades hacia abajo, porque p = –3. Su representación gráfica es:



SOLUCIONES PÁG. 253

24 Indica, sin representar la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes:

a. $f(x) = 3^x$

Como a > 1, la función es creciente.

b. $f(x) = 0{,}6^x$

Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

c. $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$

Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

d. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

Como a > 1, la función es creciente.

e. $f(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

Como a > 1, la función es creciente.

f. $f(x) = e^x$

Como a > 1, la función es creciente.

25 Representa estas funciones exponenciales:

a. $f(x) = 5^x$

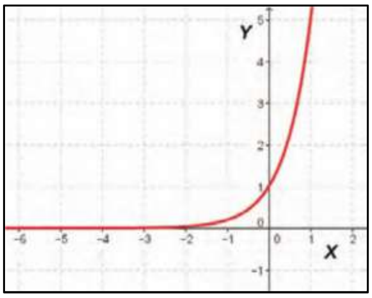
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = $(0\,,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 , 5)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{5}$	1	5	25

Su representación gráfica es:



b. f (x) = 0,2^x

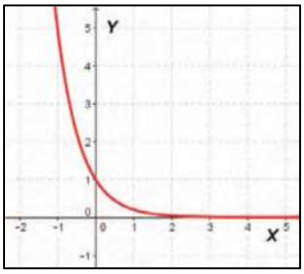
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = $(0\ ,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 , 0,2)
- Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	5	1	0,2	0,04

Su representación gráfica es:



c. f (x) = $\left(\frac{1}{4}\right)^x$

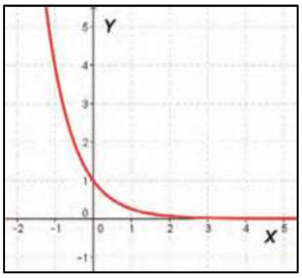
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = $(0\ ,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 , 0,25)
- Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	4	1	0,25	0,0625

Su representación gráfica es:



d. $\mathbf{f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^{x}}$

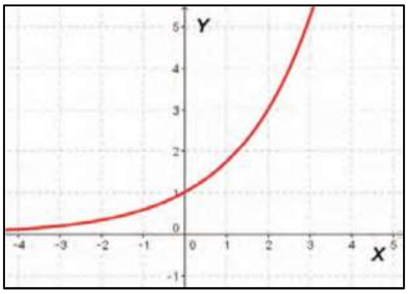
Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ y R (f) = $(0, +\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 ; 1,73)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	0,58	1	1,73	3

Su representación gráfica es:



e. $\mathbf{f(x) = 10^{x}}$

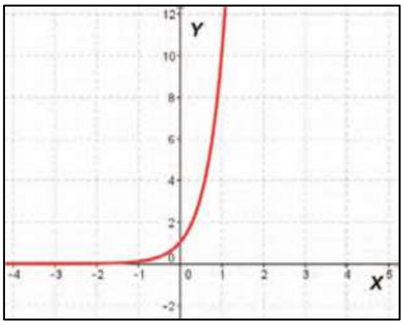
Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ y R (f) = $(0, +\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 , 10)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	0,1	1	10	100

Su representación gráfica es:



f. $\mathbf{f(x) = e^{x}}$

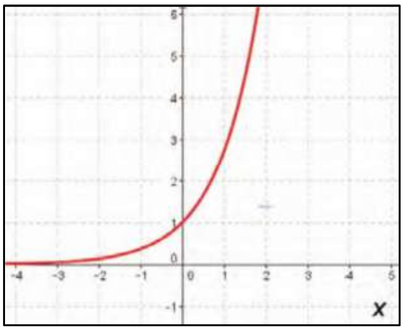
Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ y R (f) = $(0, +\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 ; 2,72)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

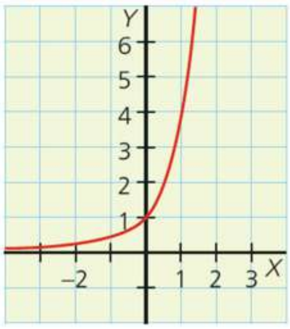
x	–1	0	1	2
y	0,34	1	2,72	7,39

Su representación gráfica es:



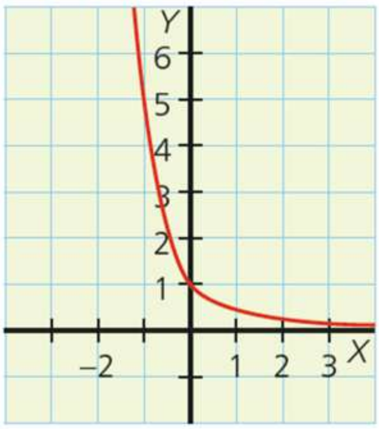
26 **Determina la expresión algebraica de las funciones representadas a continuación:**

a.



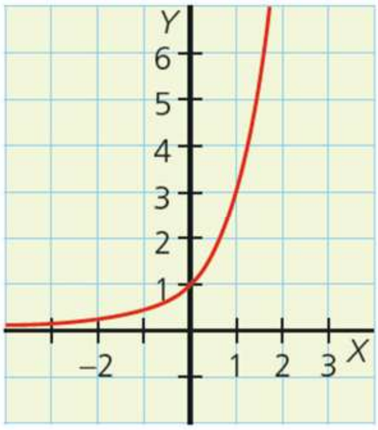
La función es creciente, por lo que a > 0. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la ordenada de $x = 1$. En este caso $y = 4$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = 4^x$.

b.



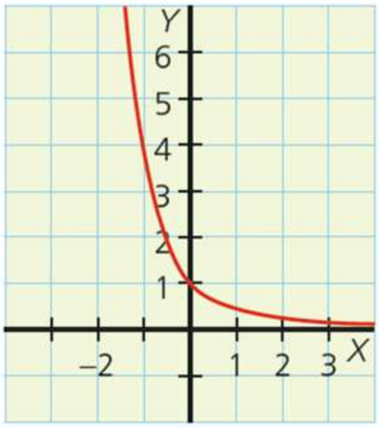
La función es decreciente, por lo que 0 < a < 1. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la ordenada de $x = –1$. En este caso $y = 5$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

c.



La función es creciente, por lo que a > 0. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la ordenada de $x = 1$. En este caso $y = 3$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = 3^x$.

d.

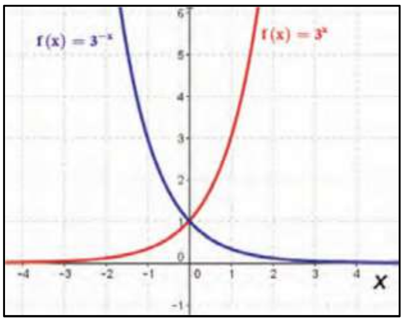


La función es decreciente, por lo que $0 < a < 1$. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la ordenada de $x = –1$. En este caso $y = 4$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

27 Representa la función $f(x) = 3^x$. A partir de su gráfica, y sin hacer cálculos, representa estas otras funciones:

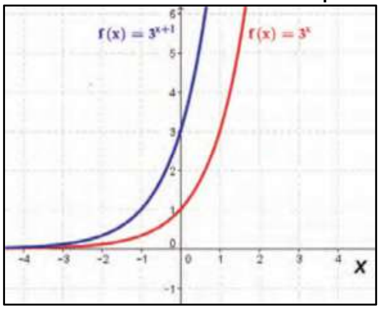
a. $f(x) = 3^{-x}$

Las dos funciones son simétricas con respecto al eje *Y*.



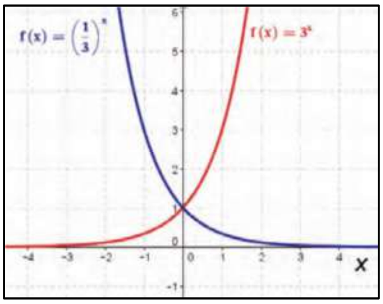
b. f (x) = 3^{x+1}

La función 3^{x+1} está desplazada una unidad a la izquierda con respecto a 3^x



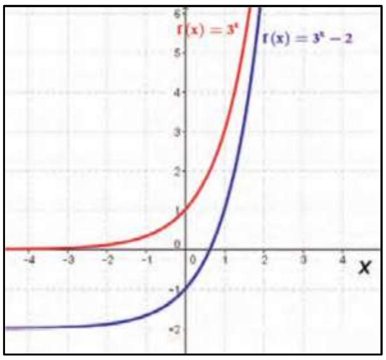
c. f (x) = $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

Las dos funciones son simétricas con respecto al eje *Y*.



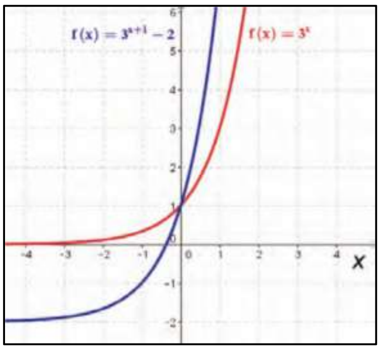
d. f (x) = 3^x – 2

La función 3^x – 2 está desplazada dos unidades hacia abajo con respecto a 3^x



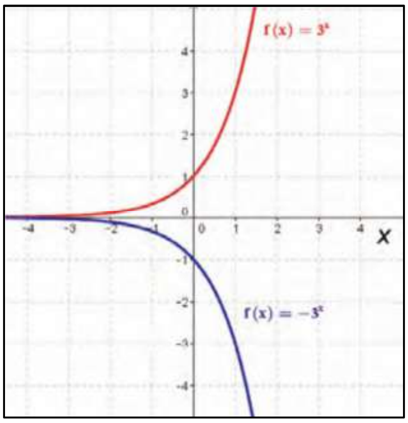
e. f (x) = 3^{x+1} – 2

La función 3^{x+1} – 2 está desplazada una unidad a la izquierda con respecto a 3^x y dos unidades hacia abajo



f. f (x) = –(3^x)

La función –(3^x) opuesta con respecto a 3^x



28 Encuentra la expresión algebraica de una función exponencial de la forma f (x) = a^x que pase, en cada caso, por el punto:

a. P (1 , 6)

Se sustituye el punto en la expresión de la función exponencial:

$x^1 = 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{f}(x) = 6^x$

b. Q $\left(3, \frac{1}{125}\right)$

Se sustituye el punto en la expresión de la función exponencial:

$$x^3 = \frac{1}{125} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{f}(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

29 El tamaño de un cultivo de bacterias se duplica cada 10 min. Si inicialmente el cultivo tenía 5 000 bacterias:

a. Halla la expresión de la función que relaciona el número de bacterias del cultivo a lo largo del tiempo.

f (x) = $5\,000 \cdot 2^{\frac{x}{10}}$, siendo x el tiempo medido en minutos.

b. ¿Cuántas bacterias habrá transcurridas 2 h?

Como 2 horas son 12 periodos de tiempo:

f (12) = $5\,000 \cdot 2^{12} = 5\,000 \cdot 4\,096 = 20\,480\,000$ bacterias.

30 Busca información sobre cómo se calcula el interés compuesto anual que ofrecen los bancos.

a. Escribe la función que expresa el capital final obtenido en relación con el tiempo que permanece un capital, C, en el banco.

$C_F = C \cdot (1 + i)^t$ siendo t el tiempo en años e $i = \dfrac{r}{100}$ con r el rédito.

b. Escribe la expresión de la función si se ingresan en el banco 10 000 € al 8 % de interés anual.

$C_F = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^t = 10\,000 \cdot (1{,}08)^t$

c. Si se invierte el dinero del apartado anterior durante 4 años, ¿de cuánto se dispondrá al finalizar ese periodo de tiempo?

$C_F = 10\,000 \cdot (1{,}08)^4 = 13\,604{,}89$ €

31 Una población de aves cuenta en un primer momento con 80 individuos y crece anualmente un 5 %. Encuentra la expresión algebraica de la función que relaciona el número de aves con el tiempo transcurrido. ¿Cuántas aves habrá al cabo de 10 años?

La expresión algebraica de la función es $f(x) = 80 \cdot (1{,}05)^x$ siendo *x* el tiempo en años.

El número de aves que habrá al cabo de 10 años es: $f(10) = 80 \cdot (1{,}05)^{10} = 130$ aves.

32 Un cohete lanzado al espacio asciende cada segundo la mitad de los que ascendió en el segundo anterior.

a. Si durante el primer segundo se eleva 200 m, determina la función que expresa la distancia que alcanza el cohete en cada segundo de ascenso.

$F(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, siendo *x* el tiempo en segundos.

b. ¿Cuántos metros se eleva en su tercer segundo de ascenso?

$f(3) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50$ m

SOLUCIONES PÁG. 255

33 Indica, sin representar la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes:

a. $f(x) = \log_6(x)$

La función es creciente porque a = 6 > 1

b. $f(x) = \log_{0{,}4}(x)$

La función es decreciente porque a = 0,4 < 1

c. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x)$

La función es decreciente porque $a = \frac{1}{5} < 1$

d. $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x)$

La función es creciente porque $a = \sqrt{2} > 1$

e. $f(x) = \log_{3{,}1}(x)$

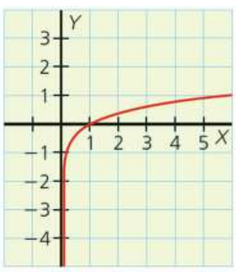
La función es creciente porque a = 3,1 > 1

f. $f(x) = \log_{\frac{3}{2}}(x)$

La función es creciente porque $a = \frac{3}{2} > 1$

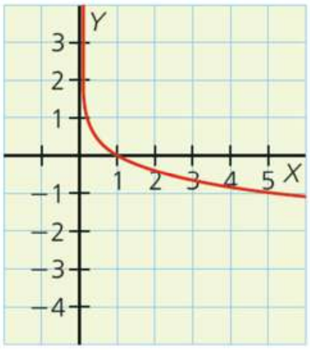
34 Determina la expresión algebraica de las funciones logarítmicas representadas a continuación:

a.



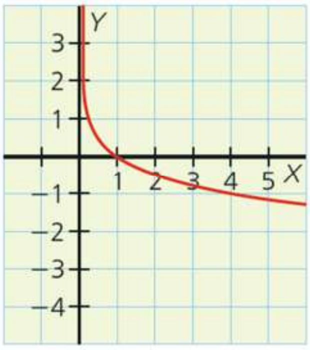
La función es creciente, por lo que a > 1. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la abscisa de $y = 1$. En este caso $x = 6$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \log_6(x)$.

b.



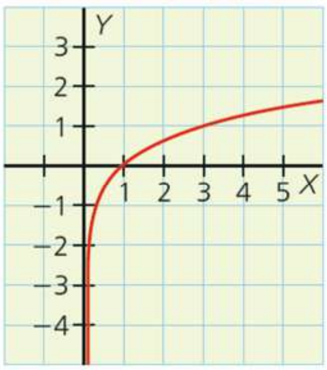
La función es decreciente, por lo que 0 < a < 1. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la abscisa de $y = -1$. En este caso $x = 5$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x)$

c.



La función es decreciente, por lo que 0 < a < 1. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la abscisa de $y = -1$. En este caso $x = 4$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x)$.

d.



La función es creciente, por lo que a > 1. Para hallar el valor de *a*, hay que fijarse en la abscisa de $y = 1$. En este caso $x = 3$. Por consiguiente, la expresión algebraica de la función es: $f(x) = \log_3(x)$.

35 Representa estas funciones logarítmicas:

a. f (*x*) = $\log_4$ (*x*)

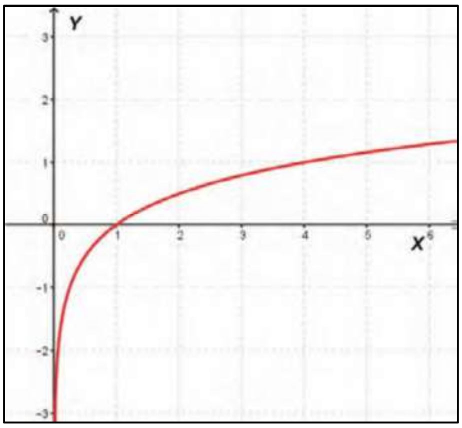
Se estudian sus características:

- D (f) = $(0, +\infty)$ y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (4 , 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	1	4	16	64
y	0	1	2	3

Su representación gráfica es:



b. f (*x*) = ln (*x*)

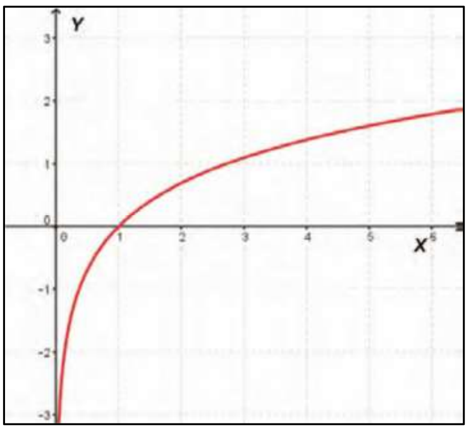
Se estudian sus características:

- D (f) = $(0, +\infty)$ y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (2,72 ; 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	1	2,72	7,39
y	0	1	2

Su representación gráfica es:



c. **f (*x*) =** $\log_{\frac{1}{4}}(x)$

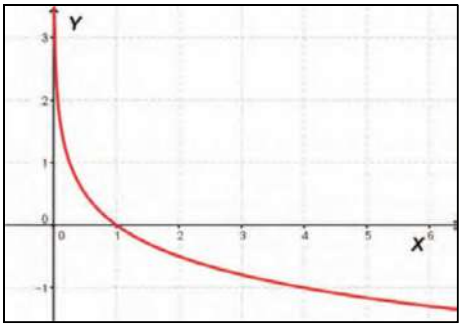
Se estudian sus características:

- D (f) = (0 , +∞)y R (f) = ℝ
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (0,25; 1)
- Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	0,0625	0,25	1	4
y	2	1	0	–1

Su representación gráfica es:



d. **f (*x*) =** $\log_{0,1}(x)$

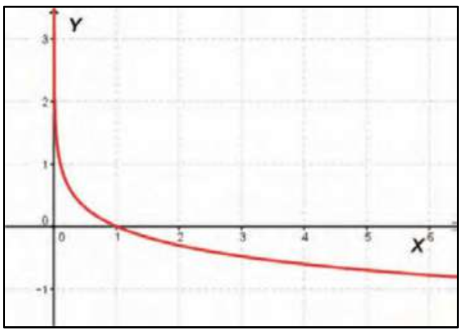
Se estudian sus características:

- D (f) = (0 , +∞)y R (f) = ℝ
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (0,1; 1)
- Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	0,1	1	10
y	1	0	–1

Su representación gráfica es:



e. **f (*x*) = log (*x*)**

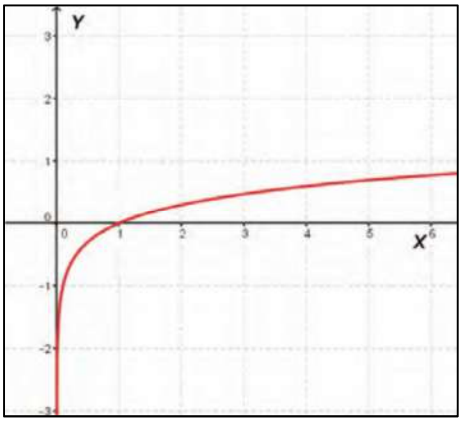
Se estudian sus características:

- D (f) = (0 , +∞)y R (f) = ℝ
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (10 , 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	1	10	100
y	0	1	2

Su representación gráfica es:



f. f (x) = log$_5$ (x)

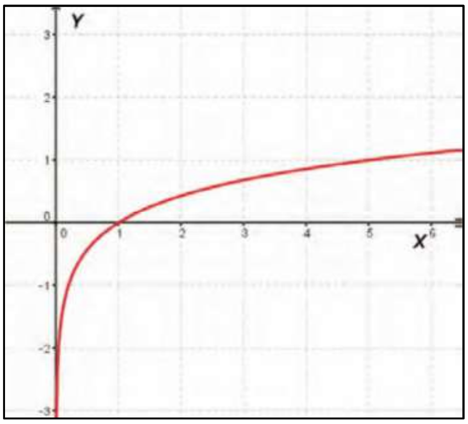
Se estudian sus características:

- D (f) = (0 , +∞)y R (f) = ℝ
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (5 ; 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

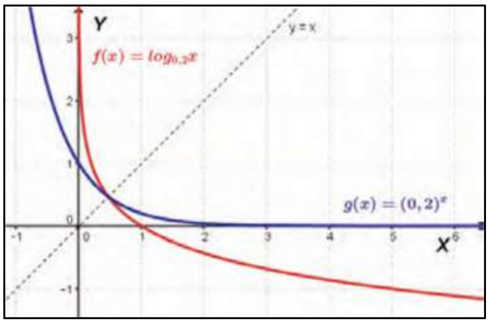
x	1	5	25
y	0	1	2

Su representación gráfica es:



36 Representa la función f (x) = log$_{0,2}$ (x). A partir de ella, representa la función g (x) = (0,2)^x.

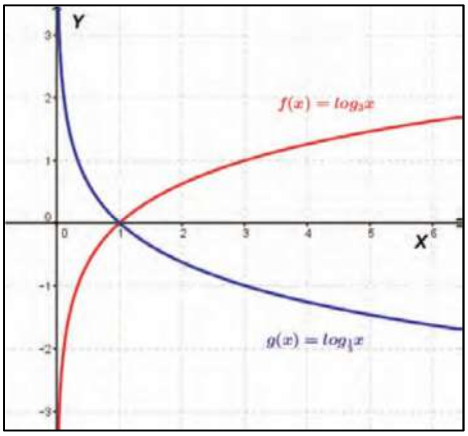
La función logarítmica, f (x) = log$_{0,2}$ (x), es la inversa de la función exponencial, g (x) = (0,2)^x, y por tanto sus gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante, $y = x$.



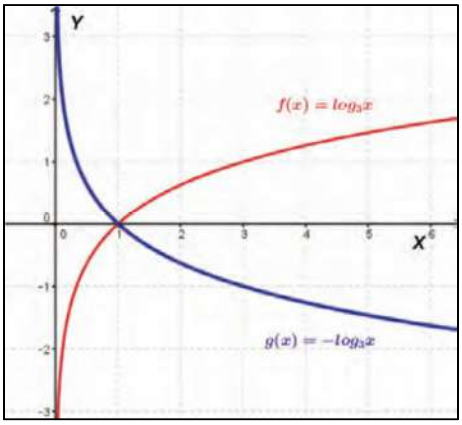
37 **Representa la función f (x) = $\log_3$ (x). A partir de su gráfica, y sin hacer cálculos, representa las funciones:**

a. **g (x) = $\log_{\frac{1}{3}}(x)$**

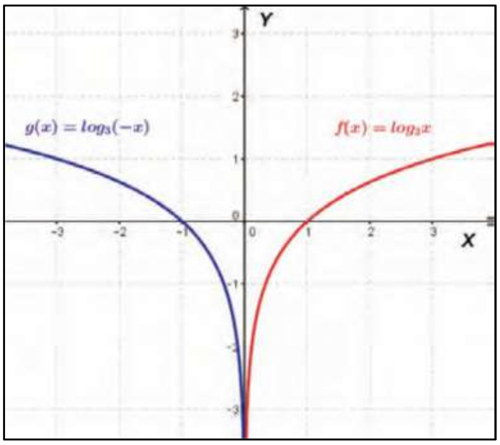
Las gráficas de las funciones f (x) = $\log_3$ (x) y g (x) = $\log_{\frac{1}{3}}(x)$ son simétricas con respecto al eje *X.*



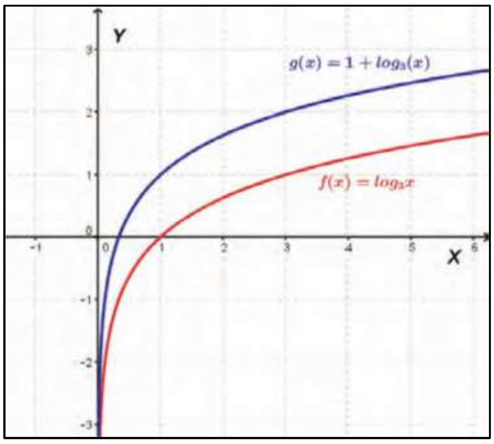
b. **g (x) = –$\log_3$ (x)**



c. g (*x*) = log₃ (–*x*)



d. g (*x*) = 1 + log₃ (*x*)



38 La fuerza de los terremotos se mide usando la escala de Richter, que es una escala logarítmica en base 10. De este modo, un terremoto de magnitud 2 en dicha escala es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 1.

a. Halla la expresión algebraica que relaciona la magnitud de un terremoto en función del número de veces que es mayor la amplitud de la onda sísmica con respecto a la amplitud de la onda en situación normal.

f (*x*) = $\log_{10}$ (*x*), siendo *x* el aumento de la amplitud de onda sísmica con respecto a la onda en situación normal.

b. Si la amplitud de una onda sísmica es un millón de veces superior a la onda normal, ¿cuál es la magnitud del seísmo?

f (1 000 000) = $\log_{10}$ (1 000 000) = $\log_{10}$ (10^6) = 6, luego la magnitud del seísmo es 6.

SOLUCIONES PÁG. 259

39 Representa las funciones trigonométricas siguientes:

a. f (*x*) = sen (2*x*)

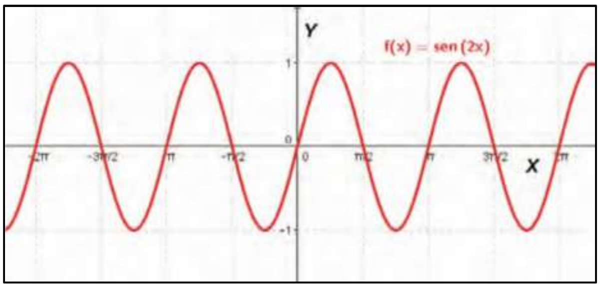
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Es una función periódica de periodo π radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0

Su representación gráfica es:



b. f (*x*) = cos (2*x*)

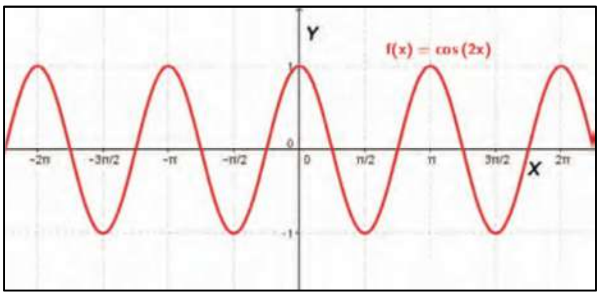
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- Es una función periódica de periodo π radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1

Su representación gráfica es:



c. f (*x*) = tg (2*x*)

Se estudian sus características:

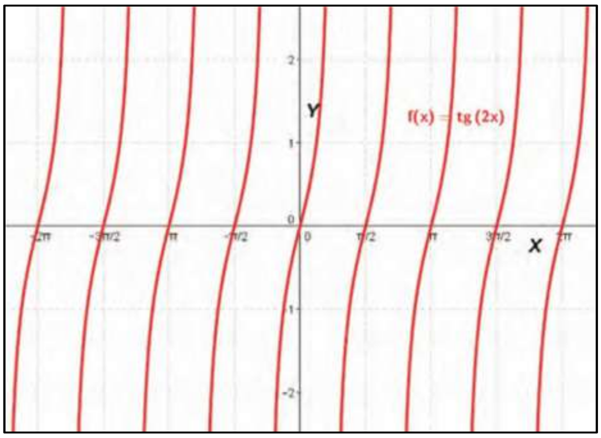
- D (f) = $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}$ y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

- Es una función periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	π
y	0	–1	0	1	0	1	0	–1	0

Su representación gráfica es:



40 Representa las funciones:

a. f (x) = sen $\left(\frac{x}{2}\right)$

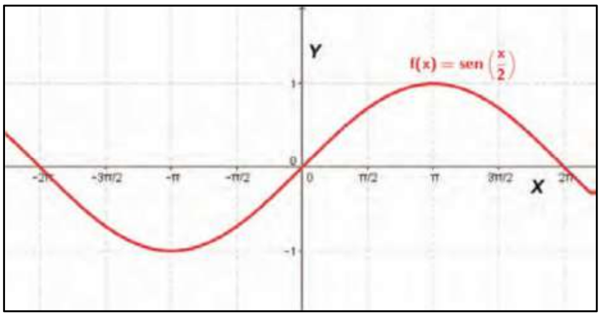
Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Es una función periódica de periodo 4π radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
y	0	–1	0	1	0

Su representación gráfica es:



b. f (*x*) = cos $\left(\frac{x}{2}\right)$

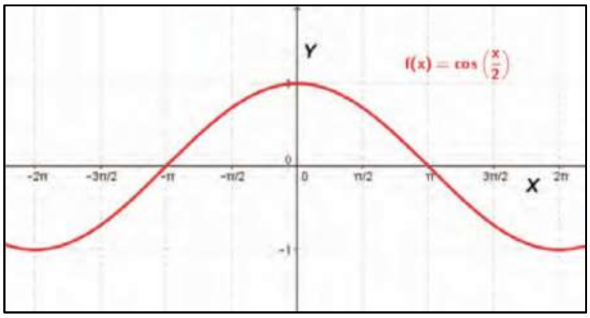
Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- Es una función periódica de periodo 4π radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	–2π	–π	0	π	2π
y	–1	0	1	0	–1

Su representación gráfica es:



41 Sean las funciones trigonométricas f (*x*) = cosec (*x*), g (*x*) = sec (*x*) y h (*x*) = cotg (*x*):

a. Indica cuál es el dominio de cada una de ellas.

D (f) = ℝ – {kπ, k ∈ ℤ}

D (g) = ℝ – $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \Box\right\}$

D (h) = ℝ – {kπ, k ∈ ℤ}

b. Halla el recorrido de las tres funciones.

R (f) = (–∞ , –1] ∪ [1 , +∞)

R (g) = (–∞ , –1] ∪ [1 , +∞)

R (h) = ℝ

c. ¿Son simétricas? En caso afirmativo, indica qué tipo de simetría presentan.

f (*x*) tiene simetría impar.

g (*x*) tiene simetría par.

h (*x*) tiene simetría impar.

d. ¿Son periódicas? En caso afirmativo, halla el periodo.

f (*x*) es periódica de periodo 2π.

g (*x*) es periódica de periodo 2π.

h (*x*) es periódica de periodo π.

e. Determina los puntos de corte con los ejes.

f (*x*) no tiene puntos de corte con los ejes.

g (*x*) corta al eje *Y* en el punto (0 , 1).

h (*x*) corta al eje *X* en los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, k ∈ ℤ.

42 Establece si las siguientes igualdades son ciertas:

a. $\mathbf{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{= cotg}\ (x)$

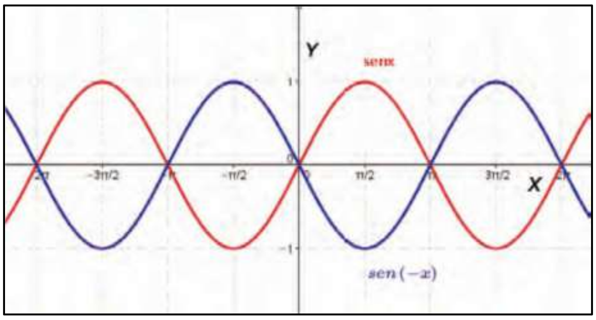
Falsa, pues $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotg}\ (x)$

b. $\mathbf{tg}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{= -cotg}\ (x)$

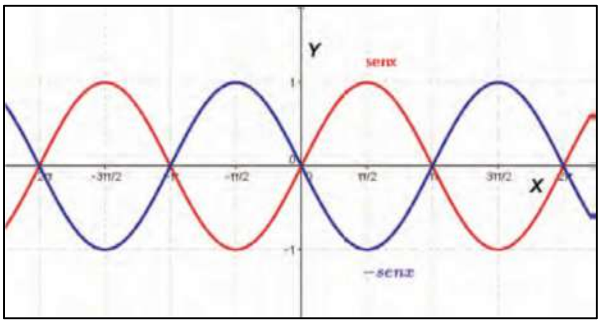
Cierta.

43 A partir de la gráfica de la función f (*x*) = sen (*x*), y sin hacer cálculos, representa gráficamente las funciones:

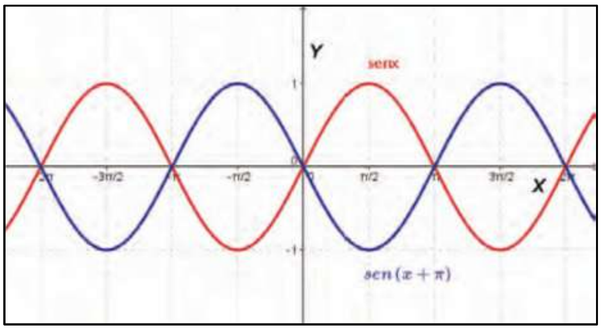
a. g (*x*) = sen (–*x*)



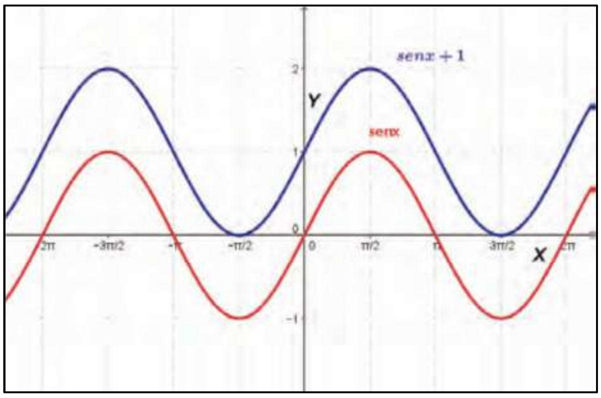
b. g (*x*) = –sen (*x*)



c. g (*x*) = sen (*x* + π)

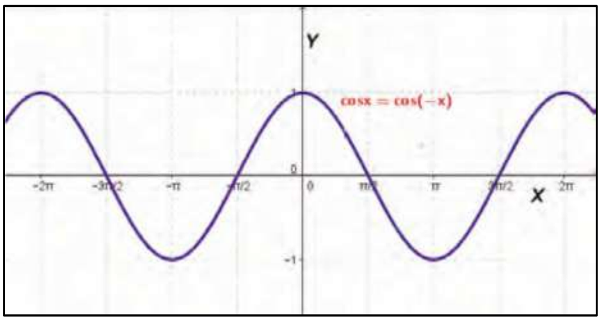


d. g (*x*) = sen (*x*) + 1

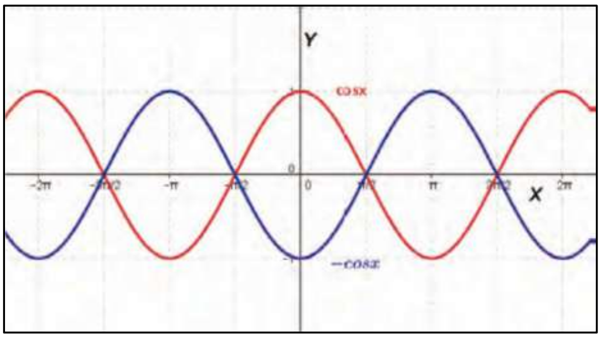


44 A partir de la gráfica de la función f (*x*) = cos (*x*), y sin hacer cálculos, representa gráficamente las funciones:

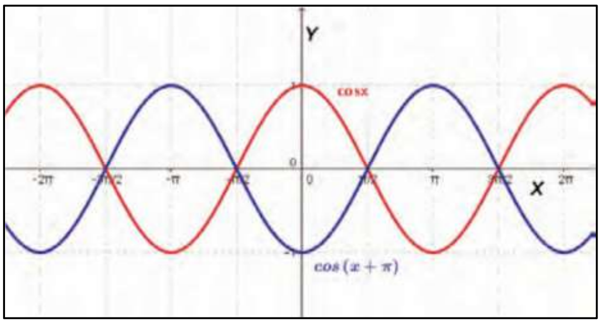
a. g (*x*) = cos (–*x*)



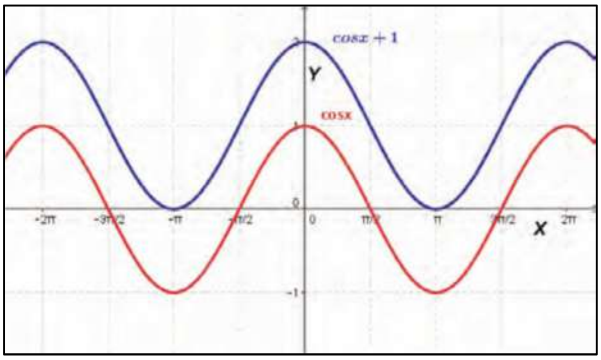
b. g (*x*) = –cos (*x*)



c. g (*x*) = cos (*x* + π)



d. g (x) = cos (x) + 1



45 Indica, razonando cada uno de los casos, si las siguientes funciones son iguales:

a. f (x) = sen (x) y g (x) = sen ($\pi - x$)
sen ($\pi - x$) = sen (x)

b. f (x) = cos (x) y g (x) = cos ($\pi - x$)
cos ($\pi - x$) = – cos (x)

c. f (x) = sen (x) y g (x) = sen ($\pi + x$)
sen ($\pi + x$) = – sen (x)

d. f (x) = cos (x) y g (x) = cos ($\pi + x$)
cos ($\pi + x$) = – cos (x)

e. f (x) = sen (x) y g (x) = sen ($2\pi - x$)
sen ($2\pi - x$) = –sen (x)

f. f (x) = cos (x) y g (x) = cos ($2\pi - x$)
cos ($2\pi - x$) = cos (x)

SOLUCIONES PÁG. 261

1 ¿Cuál es el dominio y el recorrido de todas las funciones polinómicas de grado uno?
El dominio y el recorrido es el conjunto de los números reales.

2 ¿Cuántos puntos de corte con los ejes puede tener una función cuadrática?
Con el eje *Y* siempre tiene un punto de corte y con el eje *X*, puede tener dos, uno o ninguno.

3 Indica cómo se halla el vértice de la parábola cuya expresión es f (x) = ax^2 + bx + c.

$$V = (x_V , y_V) \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a},\ y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

4 ¿Las funciones de la forma f (x) = $\sqrt[n]{x}$ son simétricas? ¿De qué tipo?
Si n es par, la función no es simétrica, y si n es impar, es simétrica impar.

5 Las funciones de proporcionalidad inversa, f (x) = $\frac{k}{x}$, tienen dos asíntotas. Indica cuál es la asíntota vertical y la horizontal.
La asíntota vertical es x = 0 y la horizontal, y = 0.

6 ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones exponenciales cuya expresión es f (x) = a^x? ¿Y el de las funciones logarítmicas, f (x) = $\log_a$ (x)?

Para f (x) = a^x, D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = (0 , +∞); para f (x) = $\log_a x$, D (f) = (0 , +∞) y R (f) = $\mathbb{R}$.

7 ¿Cuándo es creciente una función exponencial? ¿Y decreciente? ¿Y una función logarítmica?

Ambas funciones son crecientes si la base, *a,* es $a > 1$, y decrecientes si $0 < a < 1$.

8 ¿Qué relación existe entre la función f (x) = a^x y g (x) = $\log_a$ (x)?

Las funciones son inversas.

9 ¿Son las funciones trigonométricas periódicas? Indica, en el caso de que lo sean, cuál es el periodo.

Las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π y la función tangente, de periodo π. La función seno y tangente son simétricas impares y la función coseno, simétrica par.

10 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

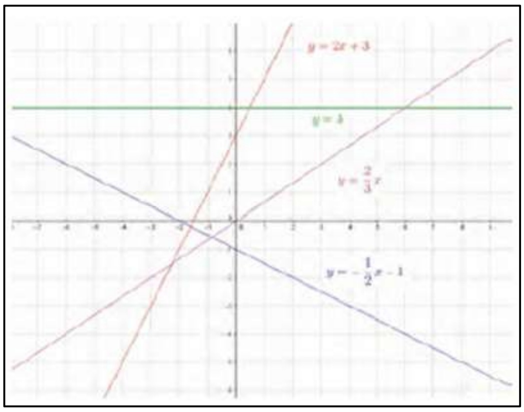
SOLUCIONES PÁG. 262 – REPASO FINAL

FUNCIONES AFÍN, CONSTANTE Y LINEAL

1 Representa las funciones:

a. $y = 2x + 3$ **c.** $y = \frac{2}{3}x$

b. $y = 4$ **d.** $y = -\frac{1}{2}x - 1$



2 Halla, en cada caso, la expresión algebraica correspondiente a una función afín que cumple estas condiciones:

a. Pasa por los puntos P (–1 , –3) y Q (3 , 5).

Se halla la pendiente:

$$m = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

Se sustituye el valor de m y uno de los puntos en la expresión $y = mx + n$ para averiguar n:

$-3 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = -1$

La función es: $y = 2x - 1$

b. Pasa por el punto R (–3 , 0) y es paralela a la recta $y = -x$.

Por ser una recta paralela, la pendiente es la misma, m = –1. Por tanto, se sustituye la pendiente y el punto en la expresión general de la función:

$y = mx + n \Rightarrow 0 = -1 \cdot (-3) + n \Rightarrow n = -3$

La función es: $y = -x - 3$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

3 Representa la gráfica de estas funciones y halla el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes. A partir de dicha gráfica, estudia el dominio, el recorrido y la monotonía de la función.

a. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

Se halla el vértice: $V = (x_v , y_v)$

$x_v =$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$$

$$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2} + 4 = \frac{25}{4}$$

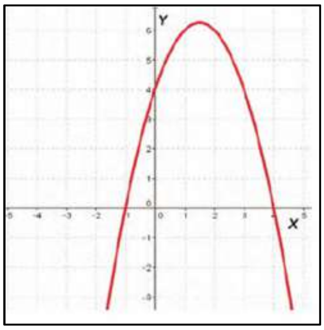
Eje de simetría: $x = \dfrac{3}{2}$

Puntos de corte con el eje X:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow (-1,0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow (4,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje Y:

$f(0) = 4 \Rightarrow (0 , 4)$



$D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \left(-\infty, \dfrac{25}{4}\right]$

Creciente: $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$, decreciente: $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

b. f (*x*) = x^2 – 4*x*

Se halla el vértice: V = (x_v , y_v)

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$

$y_v = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = f\,(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$

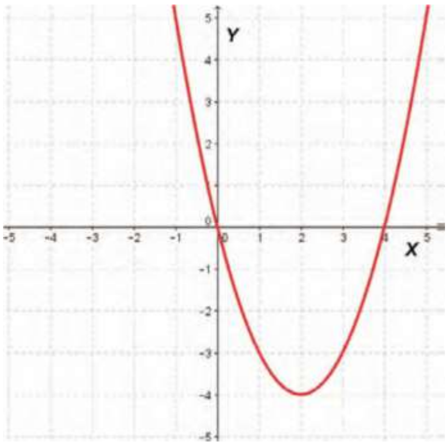
Eje de simetría: *x* = 2

Puntos de corte con el eje *X:*

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow (4,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje *Y:*

f (0) = 0 ⇒ (0 , 0)



D (f) = ℝ, R (f) = [–4 , +∞)

Creciente: (2 , +∞), decreciente: (–∞ , 2)

4 Halla, en cada caso, una función cuadrática de la que se conoce:

a. El vértice V (–2 , –1), y el punto P (0 , 3).

La expresión algebraica será de la forma f (*x*) = ax^2 + b*x* + c; luego hay que hallar el valor de *a, b* y *c*.

- Como el punto pertenece a la parábola:
  P (0 , 3) ⇒ c = 3
- Como el vértice es V (–2 , –1):
  $x_v = \dfrac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$
  $y_v = f\,(x_v) \Rightarrow -1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 \Rightarrow -1 = 4a - 2b + 3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -1 = 4a - 2 \cdot (4a) + 3 \Rightarrow -4 = -4a \Rightarrow a = 1$
  Y por lo tanto: b = 4a ⇒ b = 4
  Por consiguiente, la función es: f (*x*) = x^2 + 4*x* + 3

b. Que pasa por los puntos P (–1 , –1), Q (1 , –1) y R (2 , –7).

Los tres son puntos de la parábola, por lo tanto, se sustituye cada uno de ellos en la expresión general de la función cuadrática *y* = ax^2 + b*x* + c

$$\left.\begin{aligned} a - b + c &= -1 \\ a + b + c &= -1 \\ 4a + 2b + c &= -7 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{y en la tercera}]{\substack{\text{Se despeja } a \text{ de} \\ \text{la segunda ecuación} \\ \text{y se sustituye} \\ \text{en la primera}}} \left.\begin{aligned} (-1 - b - c) - b + c &= -1 \\ 4 \cdot (-1 - b - c) + 2b + c &= -7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

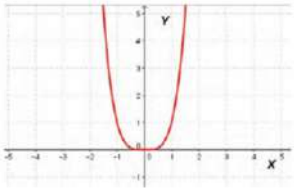
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -2b &= 0 \\ -2b - 3c &= -3 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &\Rightarrow b = 0 \\ &\Rightarrow c = 1 \end{aligned}\right\}$$

Se sustituyen ambos valores en la primera ecuación del sistema inicial para hallar *a:*
$a = -1 - b - c \Rightarrow a = -1 - 0 - 1 \Rightarrow a = -2$
La función es f (x) = $-2x^2 + 1$

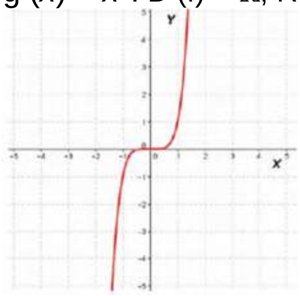
FUNCIONES x^n Y $\sqrt[n]{x}$

5 Representa las funciones f (x) = x^4 y g (x) = x^5. Indica cuál es su dominio y cuál su recorrido. ¿Son simétricas?

f (x) = x^4: D (f) = $\mathbb{R}$, R (f) = $\mathbb{R}$, es simétrica par.



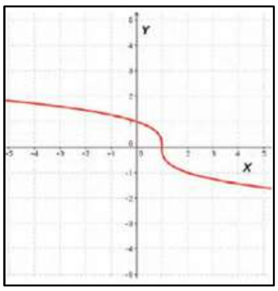
g (x) = x^5: D (f) = $\mathbb{R}$, R (f) = $\mathbb{R}$, es simétrica impar.



6 Estudia el dominio de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

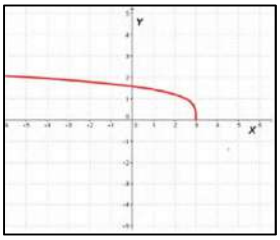
a. f (x) = $\sqrt[3]{1-x}$

Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\sqrt[3]{1-x}$, tiene x bajo un radical de índice impar, la función está definida para todos los números reales: D (f) = $\mathbb{R}$.



b. f (x) = $\sqrt[4]{-2x+6}$

Como la expresión algebraica de la función, f (x) = $\sqrt[4]{-2x+6}$, tiene x bajo un radical de índice par, la función solo está definida si el radicando es positivo o nulo. Para determinar los valores de x que hacen que el radicando sea positivo o nulo, se resuelve la inecuación:
$-2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$
Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de los números reales menores o iguales que 3. D (f) = $(-\infty , 3]$



FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

7 Representa las siguientes funciones propuestas. Estudia su continuidad e indica los puntos de discontinuidad.

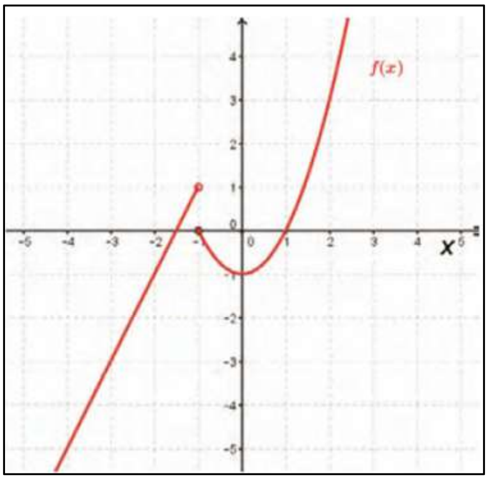
a. $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3} & \textbf{si } \boldsymbol{x}<-\mathbf{1}\\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1} & \textbf{si } -\mathbf{1}\leq \boldsymbol{x}\end{cases}$

- La función afín $f_1(x) = 2x + 3$ está definida en el intervalo $(-\infty , -1)$. Su representación es una recta. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = -1$, es $f_1(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$; luego el extremo es el punto $(-1 , 1)$ y será un punto hueco, pues $x = -1$ no pertenece al intervalo $(-\infty , -1)$.
- La función cuadrática $f_2(x) = x^2 - 1$ está definida en el intervalo $(-1 , +\infty)$. Su representación gráfica es una parábola cuyas ramas apuntan hacia arriba. Se halla su vértice:

  $$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot 1} = 0$$

  $$y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

  Como el vértice $(0 , -1)$ tiene como abscisa $x = 0$, el punto se representa, pues pertenece al intervalo $(-1 , +\infty)$.
- El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = -1$, es $f_2(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$; luego el extremo es el punto $(-1 , 0)$ y será un punto relleno, pues $x = -1$ pertenece al intervalo $(-1 , +\infty)$.



Es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. En $x = -1$ tiene una discontinuidad inevitable de tipo salto finito.

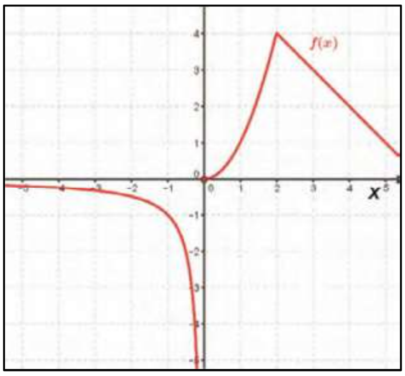
b. $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x<2\\ -x+6 & \text{si } 2\le x\end{cases}}$

- La función de proporcionalidad inversa $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ está definida en el intervalo $(-\infty, 0)$. Su representación es una hipérbola. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 0$, no existe ya que se trata de una asíntota vertical y no pertenece al intervalo $(-\infty, 0)$.
- La función cuadrática $f_2(x) = x^2$ está definida en el intervalo $[0, 2)$. Su representación gráfica es una parábola cuyas ramas apuntan hacia arriba. Se halla su vértice:

  $$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2\cdot 1}=0$$

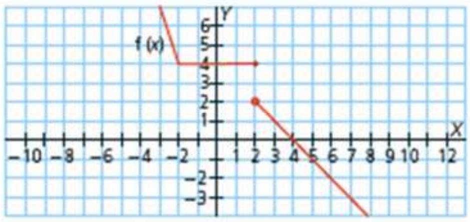
  $$y_v=f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(0)=0^2=0$$

  Como el vértice $(0, 0)$ tiene como abscisa $x = 0$, el punto se representa, pues pertenece al intervalo $[0, 2)$. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 2$, es $f_2(2) = 2^2 = 4$; luego el extremo es el punto $(2, 4)$ y será un punto hueco, pues $x = 2$ no pertenece al intervalo $[0, 2)$.
- La función lineal $f_3 = -x + 6$ está definida en el intervalo $[2, +\infty)$. Su representación es una recta. El valor de la función en el extremo del intervalo, $x = 2$, es $f_3 = -2 + 6 = 4$; luego el extremo es el punto $(2, 4)$ y será un punto relleno, pues $x = 2$ pertenece al intervalo $[2, +\infty)$.



Es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito.

8 Halla la expresión de la función que se corresponde con la gráfica representada.



Se trata de una función definida en tres trozos.

- La función f_1 es una función lineal. Se eligen como puntos P (–3 , 7) y Q (–2 , 4). Se calcula la pendiente:
  m = $\frac{4-7}{-2-(-3)} = \frac{-3}{1} = -3$
  Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:
  $y = mx + n \Rightarrow 4 = -3 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = -2$
  En consecuencia, la función f_1 es: $y = -3x - 2$, siendo su dominio de definición el intervalo $(-\infty , -2)$.
- La función f_2 es una función constante paralela al eje de abscisas. Como corta al eje *Y* en la ordenada $y = 4$, la función f_2 es: $y = 4$, siendo su dominio de definición el intervalo [–2 , 2].
- La función f_3 es una función lineal. Se eligen como puntos R (2 , 2) y S (4 , 0). Se calcula la pendiente:
  m = $\frac{0-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$
  Para hallar *n,* se sustituye el valor de *m* y uno de los puntos en la expresión general de la función:
  $y = mx + n \Rightarrow 0 = -1 \cdot 4 + n \Rightarrow n = 4$
  En consecuencia, la función f_1 es: $y = -x + 4$, siendo su dominio de definición el intervalo $(2 , +\infty)$.

Así, la función representada es:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 2 & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

9 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a. f (*x*) = |*x* – 3|

Se expresa la función f (*x*) = |*x* – 3| como una función definida a trozos:

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \ge 0 \\ -(x-3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

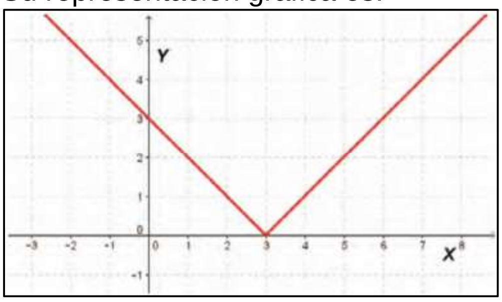
Se determinan los intervalos donde la expresión *x* – 3 es positiva y negativa:

$x - 3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 3$

Por tanto, la función es:

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \ge 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



b. f (x) = |log₂ (x)|

Se expresa la función f (x) = |$\log_2$ (x)| como una función definida a trozos:

$$f(x)=|\log_2(x)|=\begin{cases}\log_2(x) & \text{si } 0<\log_2(x)\le 1\\ -\log_2(x) & \text{si } \log_2(x)>1\end{cases}$$

Se determinan los intervalos donde la expresión $\log_2$ (x) es positiva y negativa:

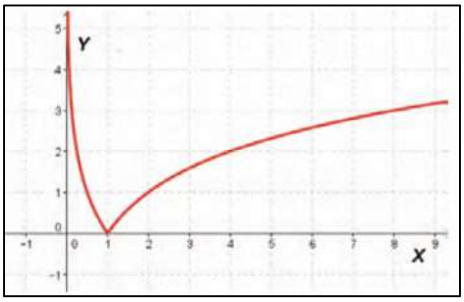
$\log_2(x) > 0 \Rightarrow 0 < x \le 1$

$\log_2(x) < 0 \Rightarrow x > 1$

Por tanto, la función es:

$$f(x)=|\log_2(x)|=\begin{cases}\log_2(x) & \text{si } 0<x\le 1\\ -\log_2(x) & \text{si } x>1\end{cases}$$

Su representación gráfica es:



c. f (x) = |x^2 – 4|

La función definida a trozos es:

$$f(x)=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x^2-4\ge 0\\ -(x^2-4) & \text{si } x^2-4<0\end{cases}$$

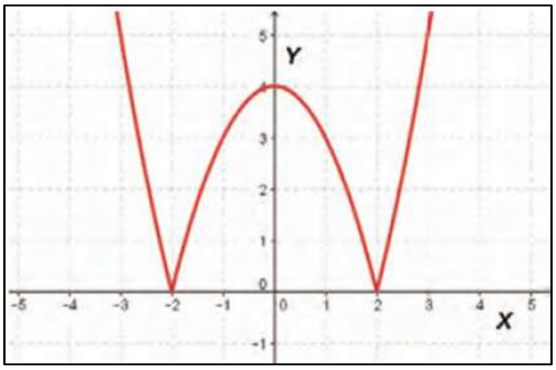
Se determinan los intervalos donde la expresión x^2 – 4 es positiva y negativa:

$x^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 2) \ge 0$

Por tanto, la función es:

$$f(x)=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x\le -2\\ -x^2+4 & \text{si } -2<x<2\\ x^2-4 & \text{si } 2\le x\end{cases}$$

Su representación gráfica es:



FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

10 Representa las funciones:

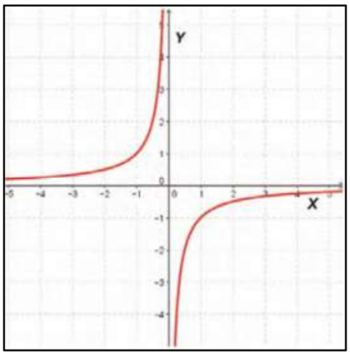
a. $f(x) = -\frac{1}{x}$

Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ – {0}, ya que no está definida en $x = 0$ por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = ℝ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en $x = 0$. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k < 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el segundo y cuarto cuadrante y la función es creciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	2	–1	–2
y	–1	–0,5	1	0,5

Su representación gráfica es:



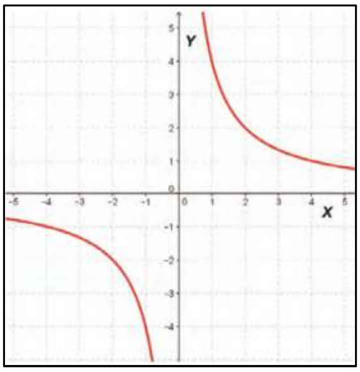
b. $f(x) = \frac{4}{x}$

Se estudian sus características:

- D (f) = ℝ – {0}, ya que no está definida en $x = 0$ por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = ℝ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en $x = 0$. En ese valor de *x,* la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k > 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrante y la función es decreciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	4	–1	–4
y	4	1	–4	–1

Su representación gráfica es:



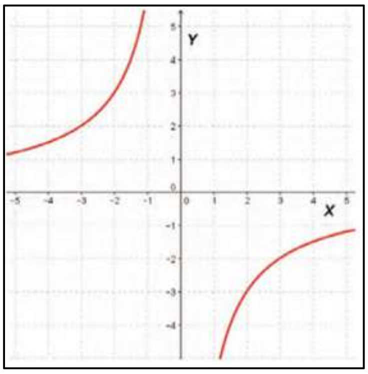
c. $\mathbf{f\ (\mathit{x}) = -\dfrac{6}{\mathit{x}}}$

Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ – {0}, ya que no está definida en x = 0 por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = $\mathbb{R}$ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en x = 0. En ese valor de x, la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en y = 0.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Como k < 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el segundo y cuarto cuadrante y la función es creciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	6	–1	–6
y	–6	–1	6	1

Su representación gráfica es:



d. $\mathbf{f\ (\mathit{x}) = \dfrac{10}{\mathit{x}}}$

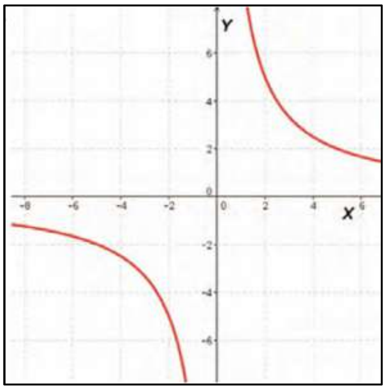
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ – {0}, ya que no está definida en x = 0 por ser el valor que anula el denominador.
- R (f) = $\mathbb{R}$ – {0}
- Presenta una discontinuidad inevitable de tipo salto infinito en x = 0. En ese valor de x, la función tiene una asíntota vertical.
- La función tiene una asíntota horizontal en y = 0.
- La gráfica no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- Como k > 0, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrante y la función es decreciente.
- Se realiza una tabla para obtener algunos puntos:

x	1	10	–1	–10
y	10	1	–10	–1

Su representación gráfica es:

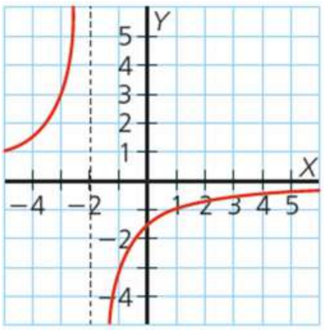


11 Asocia a cada gráfica su expresión algebraica correspondiente.

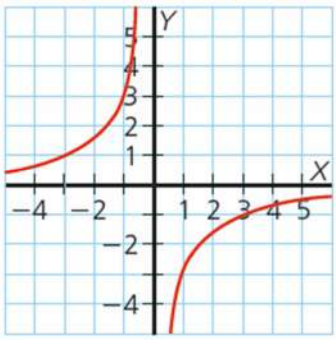
a. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ **c.** $f(x) = \dfrac{-3}{x} + 2$

b. $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$ **d.** $f(x) = \dfrac{-3}{x+2} + 2$

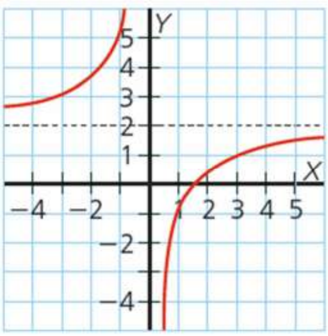
I.



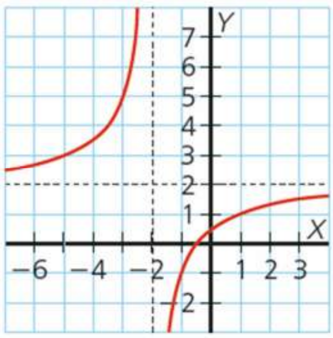
III.



II.



IV.



- La función a. tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 0$. Por tanto, se corresponde con la función III.

- La función b. es la función a. trasladada 2 unidades a la izquierda, porque q = 2. Por tanto, se corresponde con la función I.
- La función c. es la función a. trasladada 2 unidades hacia arriba, porque p = 2. Por tanto, se corresponde con la función II.
- La función d. es la función a. trasladada 2 unidades hacia arriba, porque p = 2, y 2 unidades a la izquierda, porque q = 2. Por tanto, se corresponde con la función IV.
-

SOLUCIONES PÁG. 263

FUNCIÓN EXPONENCIAL

12 Representa estas funciones exponenciales:

a. f (x) = 4^x

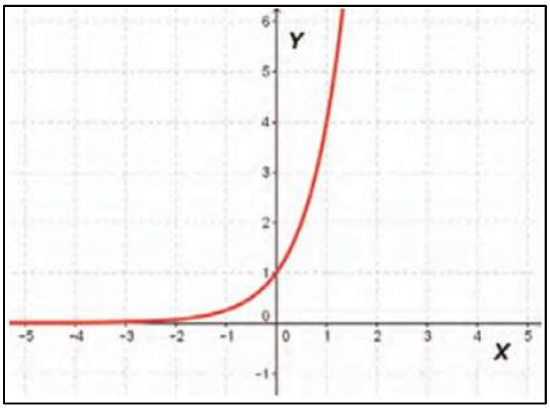
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = $(0\,,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y (1 , 4)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	4	16

Su representación gráfica es:



b. f (x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

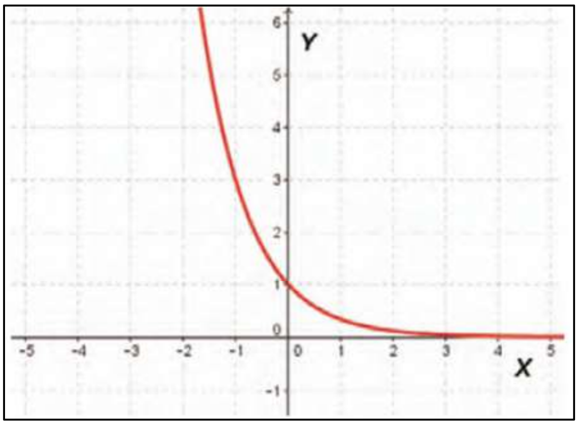
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = $(0\,,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y $\left(1,\frac{1}{3}\right)$
- Como a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	–1	0	1	2
y	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Su representación gráfica es:



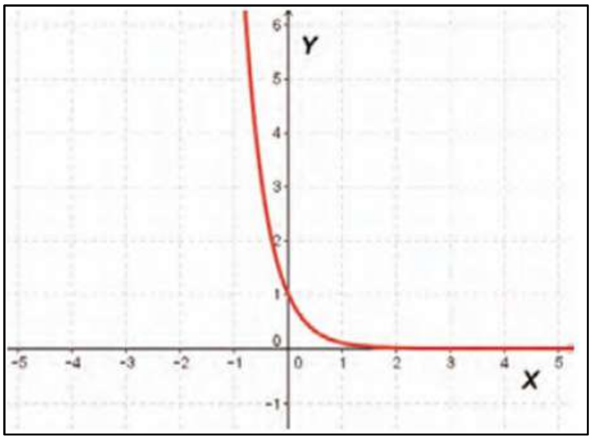
c. f (*x*) = 0,1^x

Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) $= (0\ ,+\infty)$
- La función pasa por los puntos (0 , 1) y $\left(1,\dfrac{1}{10}\right)$
- Como a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

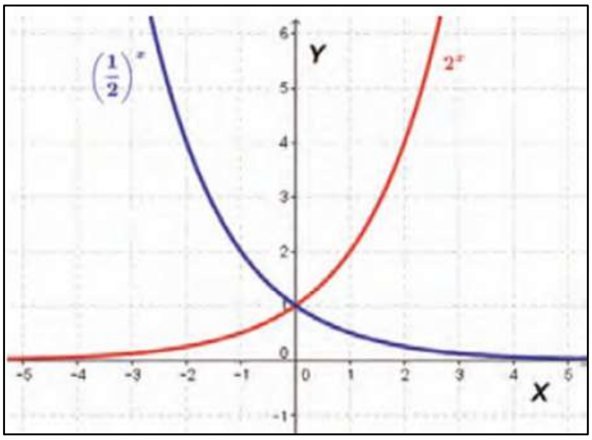
x	–1	0	1	2
y	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$



13 Representa la función f (*x*) = 2^x. A partir de su gráfica, y sin hacer cálculos, representa estas otras funciones:

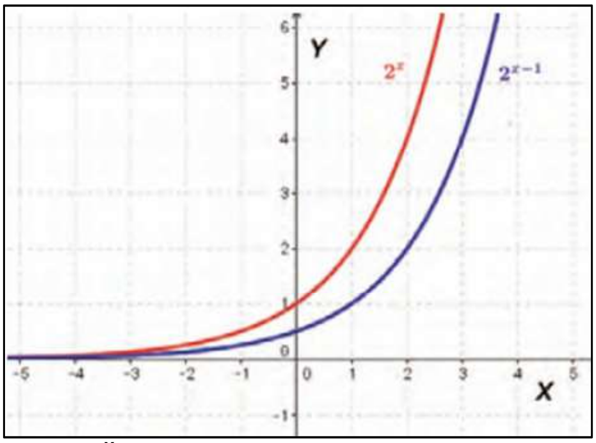
a. g (*x*) = $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Las funciones f (*x*) y g (*x*) son simétricas respecto al eje *Y*, pues $g\ (x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f\ (-x)$. Así, la representación gráfica de ambas funciones es:



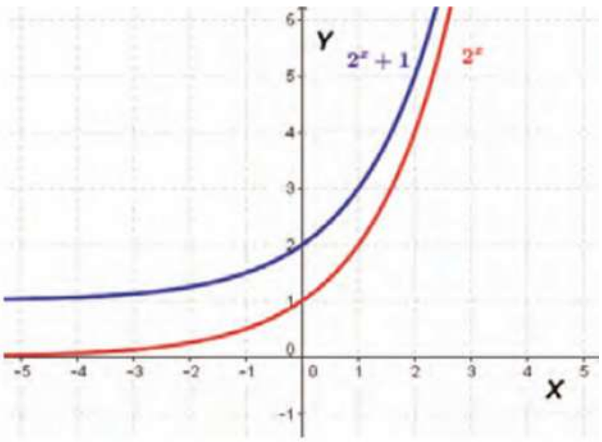
b. h (*x*) = 2^{x-1}

La función h (*x*) es la función f (*x*) trasladada 1 unidad a la derecha.



c. i (*x*) = $2^x + 1$

La función i (*x*) es la función f (*x*) trasladada 1 unidad hacia arriba.



14 Repasa las distintas funciones en esta dirección de Internet: http://conteni2.educarex.es/mats/11824/contenido/

Respuesta abierta.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

15 Representa las siguientes funciones:

a. f (*x*) = $\log_3(x)$

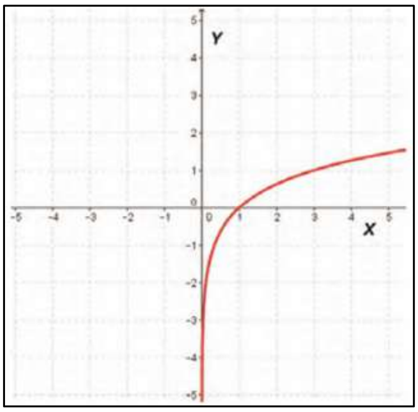
Se estudian sus características:

- D (f) = $(0, +\infty)$y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (3 , 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	1	3	9	27
y	0	1	2	3

Su representación gráfica es:



b. f (*x*) = $\log_{\frac{1}{5}}(x)$

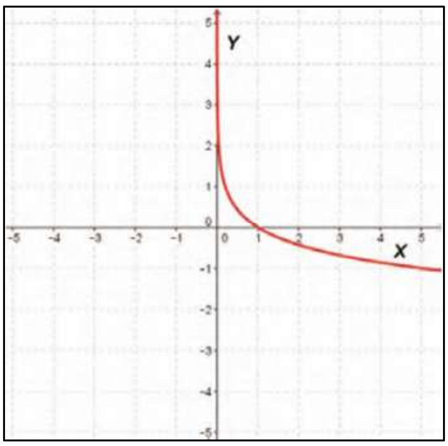
Se estudian sus características:

- D (f) = $(0, +\infty)$y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (0,20; 1)
- Como 0 < a < 1, la función es decreciente.

Se construye una tabla de valores:

x	0,04	0,20	1	5
y	2	1	0	–1

Su representación gráfica es:



c. f (x) = log$_5$ (x)

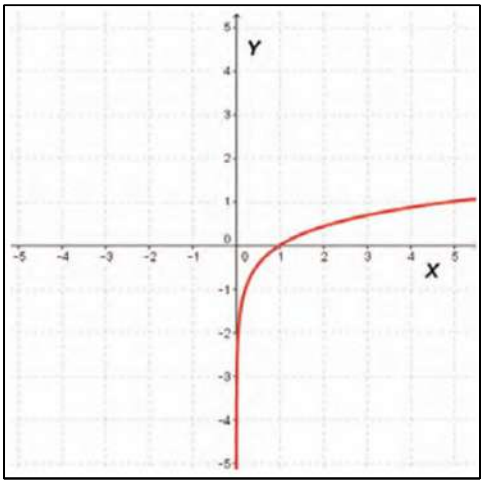
Se estudian sus características:

- D (f) = (0 , +∞)y R (f) = ℝ
- La función pasa por los puntos (1 , 0) y (5 , 1)
- Como a > 1, la función es creciente.

Se construye una tabla de valores:

x	1	5	25	125
y	0	1	2	3

Su representación gráfica es:



16 Asocia cada una de las funciones con su gráfica correspondiente.

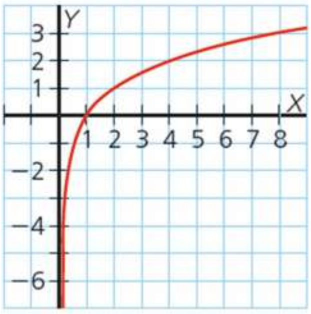
a. f (x) = x^2

b. f (x) = $\sqrt{x}$

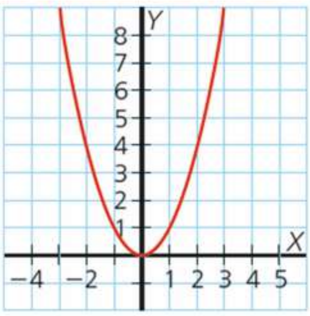
c. f (x) = 2^x

d. f (x) = log$_2$ (x)

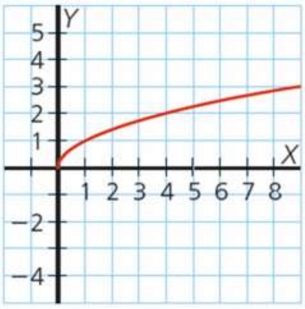
I.



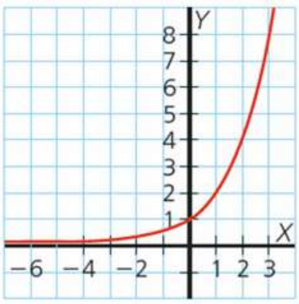
II.



III.



IV.



- La función a. es la expresión de una función cuadrática. Por lo tanto, es la función II.
- La función b. es la expresión de una función de tipo raíz de índice par. Por lo tanto, se corresponde con la función III.
- La función c. es la expresión de una función exponencial creciente, porque a > 1. Por lo tanto, se corresponde con la función IV.
- La función d. es la expresión de una función logarítmica creciente, porque a > 1. Por lo tanto, se corresponde con la función I.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

17 Representa las funciones trigonométricas:

a. f (x) = sen (3x)

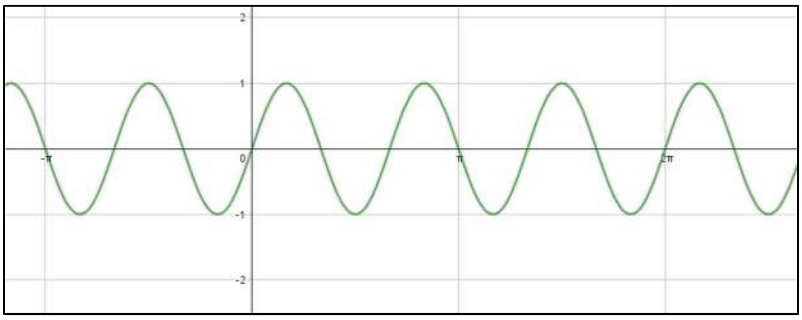
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Es una función periódica de periodo $\frac{2}{3}\pi$ radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	–1	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1	0

Su representación gráfica es:



b. f (x) = cos (3x)

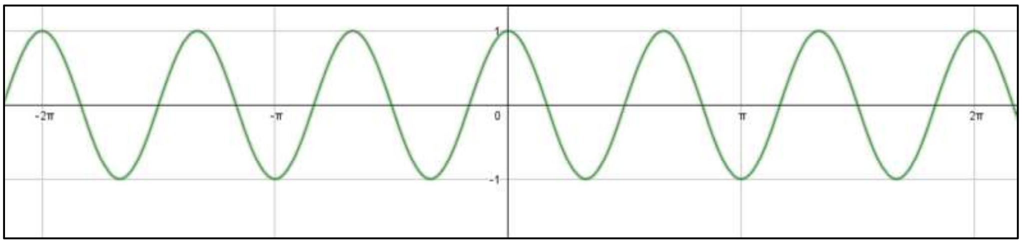
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R}$ y R (f) = [–1 , 1]
- La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- Es una función periódica de periodo $\frac{2}{3}\pi$ radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	–1	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1	0	–1

Su representación gráfica es:



c. f (x) = tg (3*x*)

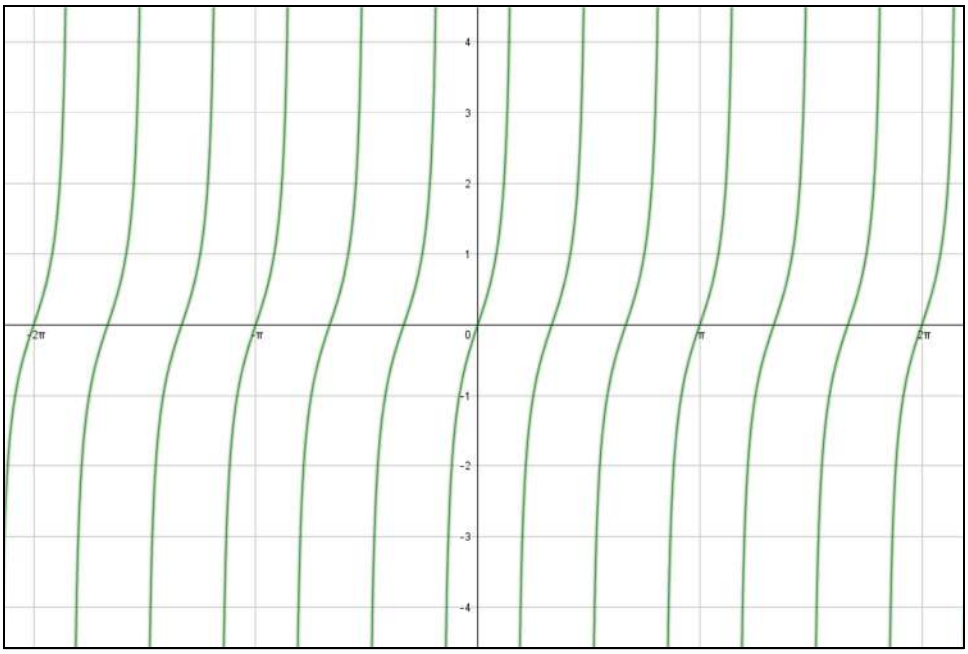
Se estudian sus características:

- D (f) = $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right\}$ y R (f) = $\mathbb{R}$
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Es una función periódica de periodo $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Se construye una tabla de valores:

x	-2π	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π
y	0	0	–1	1	0	–1	1	0	0

Su representación gráfica es:



EVALUACIÓN

1 El vértice de la parábola f(*x*) = 3*x*² – 2*x* – 1 es:

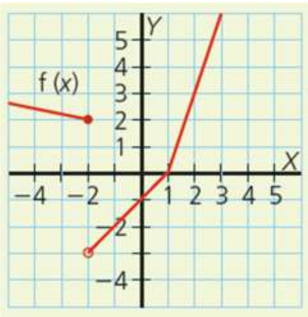
a. (1 , –4) **b. (1 , 0)** **c.** $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ d. $\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$

$V = (x_V, y_V) \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$, $y_V = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

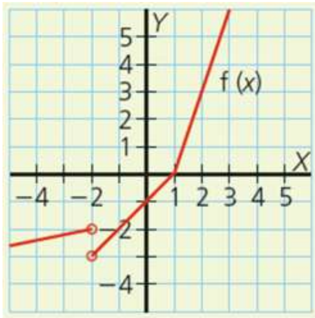
2 La representación gráfica de la siguiente función es:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \le -2 \\ x-1 & \text{si } -2 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

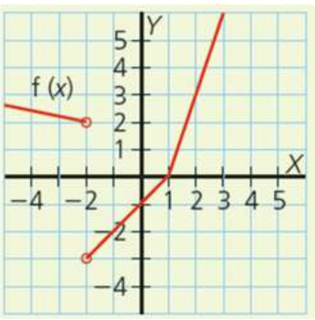
a.



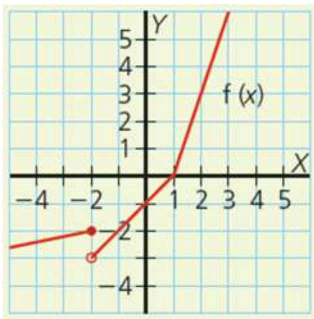
c.



b.



d.



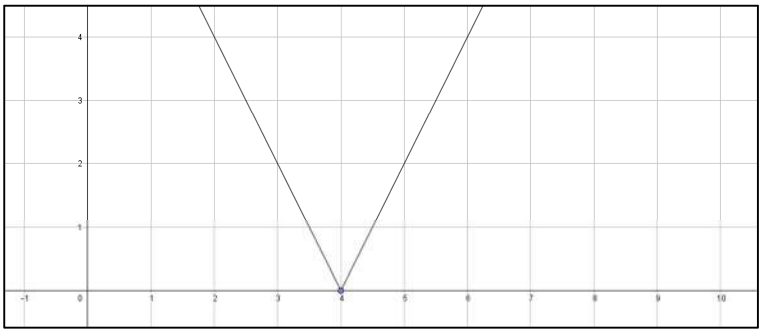
El punto $x = -2$ existe en el intervalo (–∞ , –2], por lo que tendrá que ser un punto relleno. La únicas que cumplen esa condición es a. y d.
Si se sustituye el valor $x = -4$ en la función $f_1 = \sqrt{-2-(-4)} = \sqrt{2} > 0$. Por lo tanto, la representación gráfica de f_1 es positiva.

3 Las funciones f (*x*) = a^x y g (*x*) = $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ **son simétricas respecto:**

a. Del eje *X*. c. Del eje *Y*.
b. De la bisectriz *y* = *x*. **d. Del origen de coordenadas.**

La función exponencial en base a y su inversa, son simétricas respecto al eje *Y*.

4 **De las siguientes afirmaciones sobre la función f (x) = |2x – 8| no es cierta:**
a. Su dominio es $\mathbb{R}$.
b. Su recorrido es [0 , +∞)
c. Es simétrica par.
d. Es continua.



5 **Las funciones f (x) = a^x y g (x) = $\log_a$ (x) son decrecientes:**
a. Siempre.
b. Si 0 < a < 1.
c. Nunca.
d. Si a > 1.

6 **De las siguientes afirmaciones sobre la función f (x) = sen (x) es cierta:**
a. Su recorrido es $\mathbb{R}$.
b. Es simétrica impar.
c. Es periódica de periodo π.
d. Corta al eje Y en el punto (0 , 1).