b) Gracias a la gráfica, podemos verificar que la altura máxima fue de 50 cm.

Algebraicamente tenemos: $a = -\frac{1}{8}$, $b = 7$ y $c = -48$. Así, la ordenada del vértice es:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{7^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot(-48)}{4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} = -\frac{49-24}{-\frac{1}{2}} = \frac{25}{\frac{1}{2}} = 50$$

c) Tenemos que la abscisa del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{7}{\frac{1}{4}} = 28\,\text{cm}$$

La distancia alcanzada en la horizontal fue 28 – 10 = 18 cm.

d) La altura de la segunda plataforma es:

$$h(40) = -\frac{1}{8}\cdot 40^2 + 7\cdot 40 - 48 = -\frac{1600}{8} + 280 - 48 =$$

$$= -200 + 280 - 48 = 32\,\text{cm}$$

e) Las dos plataformas distan 40 – 10 = 30 cm.

4. a) Cuesta 5 euros.

b) Debemos pagar 10 euros.

c) Podamos alquilar el patinete durante 12 h.

d) El dominio es [0,24] y el recorrido es $\{5\}\cup\{10\}\cup\{15\}\cup\{20\}\cup\{25\}$.

e) El precio de dos días sería $25 + 25\cdot 0{,}9 = 25 + 22{,}5 = 47{,}5$ euros.

5. a) El chalé de la amiga se sitúa a 400 m de la casa de Ana.

b) Tarda 8 min en llegar al chalé de su amiga.

c) Tarda 8 min en recorrer 400 m, esto es, 480 s. A través de una regla de tres, donde x es la velocidad media, en metros por segundo, tenemos que $x = \frac{400}{480} \simeq 0{,}83\,\text{m/s}$.

d) Caminaron 400 – 150 = 250 m.

e) Tenemos el primer intervalo de la función en $y = 50x$, una vez que es una función lineal y que la pendiente es igual a 50.

En el segundo intervalo de la función, tenemos que la pendiente es $m = \frac{150-400}{16-8} = \frac{-250}{8} = -31{,}25$. Por tanto, $y = -31{,}25x + b$. El punto (16,150) pertenece a la gráfica de la función. Así, sustituyendo los valores de las coordenadas en la expresión algebraica, tenemos que $150 = -31{,}25\cdot 16 + b \Leftrightarrow 150 = -500 + b \Leftrightarrow b = 650$. Por tanto, $y = -31{,}25x + 650$.

Así, la expresión algebraica de la función definida a trozos es:

$$y = \begin{cases} 50x & \text{si } 0 \le x < 8 \\ -31{,}25x + 650 & \text{si } 8 \le x \le 16 \end{cases}$$

7. Estudio de otras funciones

ACTIVIDADES

1. a) $y = \frac{k}{x} \Rightarrow y\cdot x = k$. Según la tabla de valores:

$60\cdot 1 = 30\cdot 2 = \ldots = 10\cdot 6 \Rightarrow k = 60$

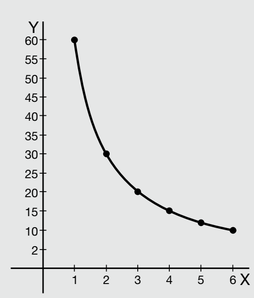
Por tanto: $y = \frac{60}{x}$

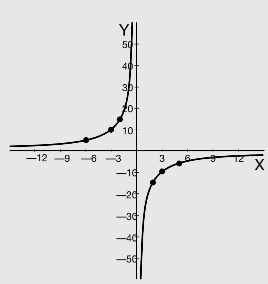
b) Según la tabla de valores:

$-15\cdot 2 = -10\cdot 3 = \ldots = 2\cdot(-15) \Rightarrow k = -30$

Por tanto: $y = \frac{-30}{x}$

La representación gráfica de estas funciones es:





2. a) $f(2) = 3^2 = 9$

b) $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 3^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

3. $f(2) = 25;\ x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

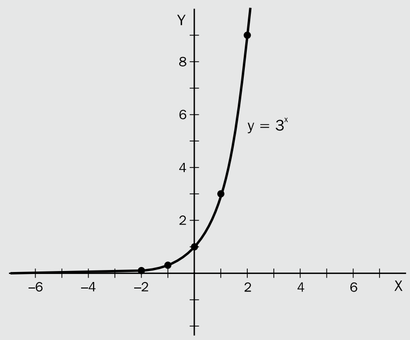
4. a) $f(2) = 25;\ f(3) = 125;\ f(4) = 625$

b) $f(2) = \frac{1}{25};\ f(3) = \frac{1}{125};\ f(4) = \frac{1}{625}$

c) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3;$

$4^x = 1 \Rightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0$

5. a) $y = 3^x$

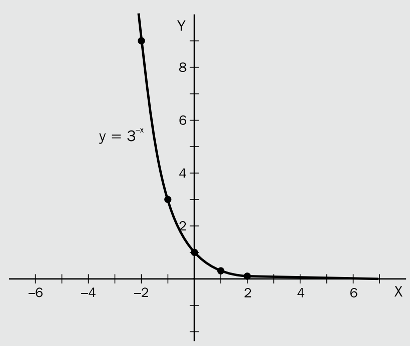


Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(0, +\infty)$

Corta al eje *OY* en el punto (0, 1). Es estrictamente decreciente. Es continua.

b) $y = 3^{-x}$

x	–2	–1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

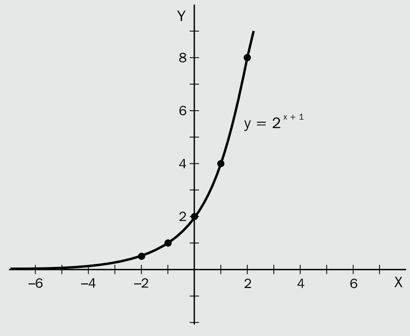


Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(0, +\infty)$

Corta al eje *OY* en el punto (0, 1). Es estrictamente decreciente. Es continua.

c) $y = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

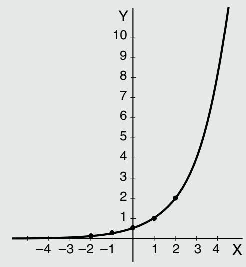


Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(0, +\infty)$

Corta al eje *OY* en el punto (0, 2). Es estrictamente creciente. Es continua.

d) $y = 2^{x-1}$

x	–2	–1	0	1	2
y	0,125	0,25	0,5	1	2



Dominio: $\mathbb{R}$ Recorrido: $(0, +\infty)$

Corta al eje *OY* en el punto (0, 0,5). Es estrictamente creciente. Es continua.

6. $\text{pH} = -\log x = 2,5$

$\log x = -2,5 \Leftrightarrow x = 10^{-2,5}$

$x = 3,16 \cdot 10^{-3}$ moles H^+/litro

7. a) $f\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = -2$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^1}\right) = -1$

c) $f(3) = \log_3(3) = 1$

d) $f(27) = \log_3(3^3) = 3$

e) $f(9) = \log_3(3^2) = 2$

f) $f(81) = \log_3(3^4) = 4$

8. a) $f(625) = \log_5 625 = 4$

b) $f\left(\frac{1}{125}\right) = \log_5\left(\frac{1}{5^3}\right) = -3$

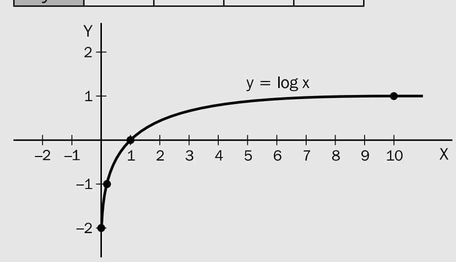
c) $f(0,04) = f\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5\left(\frac{1}{5^2}\right) = -2$

d) $f(x) = 5 \Rightarrow \log_5(x) = 5 \Rightarrow x = 5^5 = 3125$

e) $f(x) - 1 \Rightarrow \log_5(x) = -1 \Rightarrow x = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2$

9. a) $y = \log x$

x	0,01	0,1	1	10
y	–2	–1	0	1



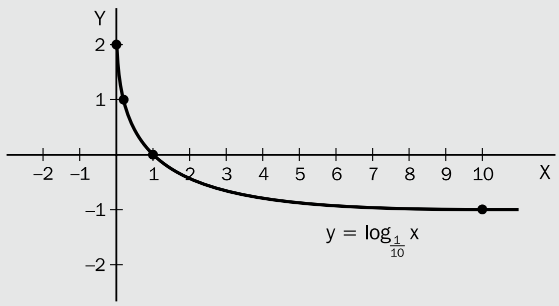
Dominio: $(0, +\infty)$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Corta al eje *OX* en el punto (1, 0). Es estrictamente creciente. Es continua.

b) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

x	0,01	0,1	1	10
y	2	1	0	–1



Dominio: $(0, +\infty)$

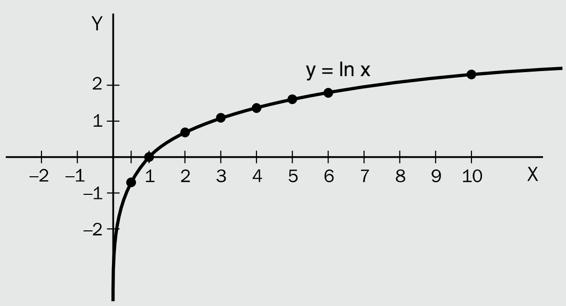
Recorrido: $\mathbb{R}$

Corta al eje *OX* en el punto (1, 0). Es estrictamente decreciente. Es continua.

c) $y = \ln x$

x	0,5	1	2	3
y	–0,7	0	0,7	1,1

x	4	5	6	10
y	1,4	1,6	1,8	2,3



Dominio: $(0, +\infty)$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Corta al eje *OX* en el punto (1, 0). Es estrictamente decreciente. Es continua.

10. a) Presentan una asíntota vertical.

b) Se deduce de la propia definición de logaritmo.

11. Son simétricas respecto del eje *OX*.

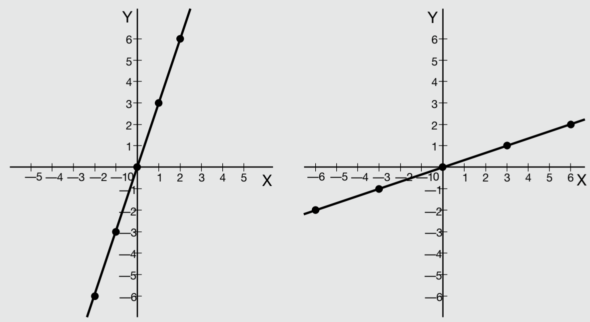
12.

x	–2	–1	0	1	2
y	–6	–3	0	3	6

x	–6	–3	0	3	6
y	–2	–1	0	1	2

—La función inversa es: $y = \frac{x}{3}$

—La representación de ambas funciones es:



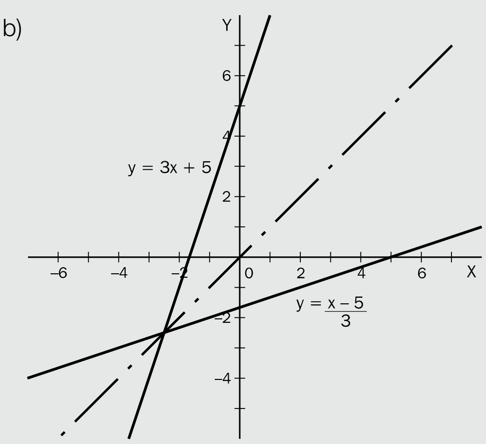
13. a)

x	–2	–1	0	1	2
y	–1	2	5	8	11

Realizamos cambio de valores en la tabla.

x	–1	2	5	8	11
y	–2	–1	0	1	2

b)

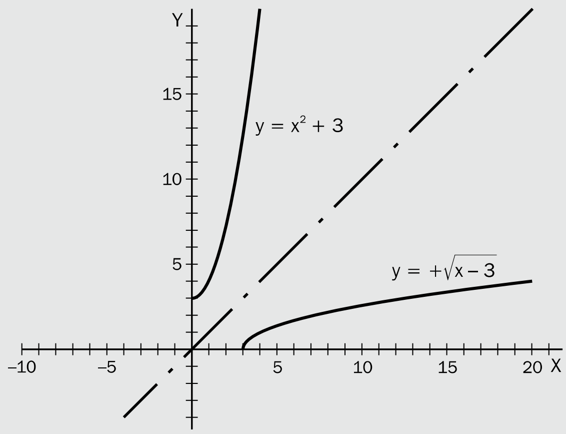


c) $y = \frac{x-5}{3}$

14.

x	0	1	2	3	4
$y = x^2 + 3$	3	4	7	12	19

x	3	4	7	12	19
$y = +\sqrt{x-3}$	0	1	2	3	4



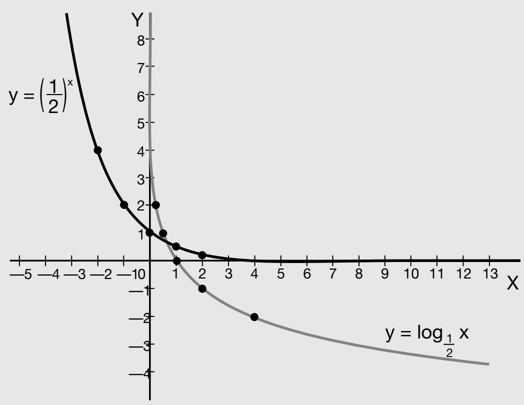
Las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

15. a)

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	0,5	0,25

b)

x	4	2	1	0,5	0,25
y	–2	–1	0	1	2

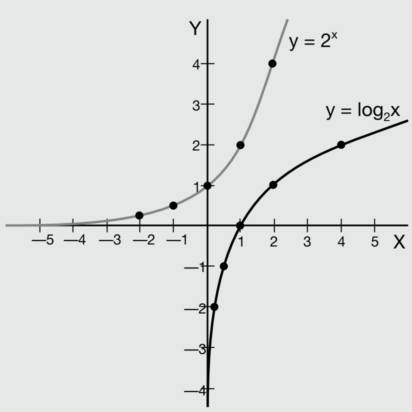


16. a)

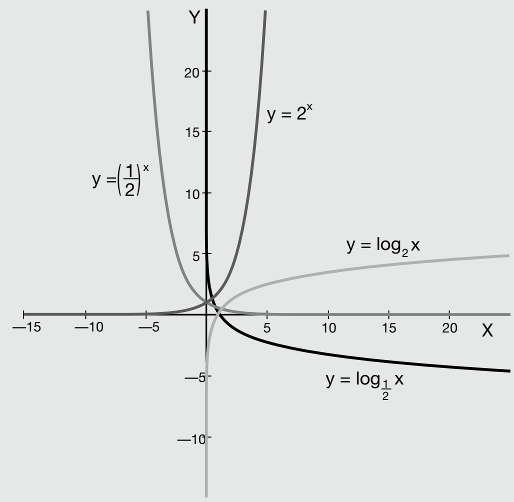
x	–2	–1	0	1	2
y	0,25	0,5	1	2	4

b)

x	0,25	0,5	1	2	4
y	–2	–1	0	1	2



17.



Las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = 2^x$ son simétricas respecto al eje Y.

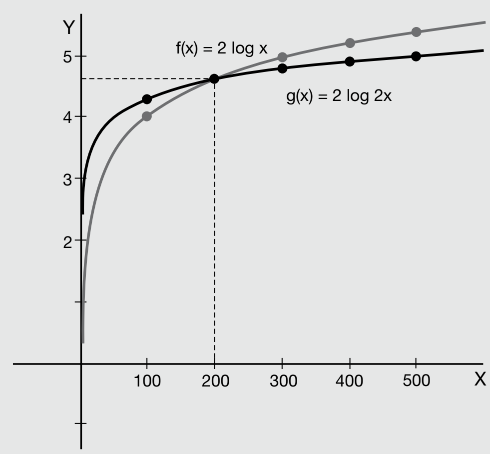
Las funciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}}$ son simétricas respecto al eje X.

Las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}}$ son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Las funciones $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$.

18.

x	100	200	300	400	500
$f(x)$	4	4,60	4,95	5,20	5,40
$g(x)$	4,30	4,60	4,78	4,90	5

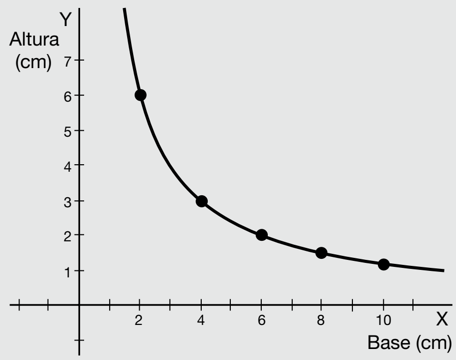


Las gráficas de las dos funciones se cortan en el punto (200, 4,60)

19. a)

x	2	4	6	8	10
y	6	3	2	1,5	1,2

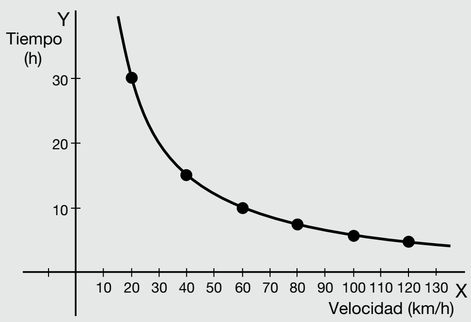
b)



Se deduce que: $\frac{x \cdot y}{2} = 6 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$; es decir, la expresión algebraica de la función es $y = \frac{12}{x}$.

Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

20. a)



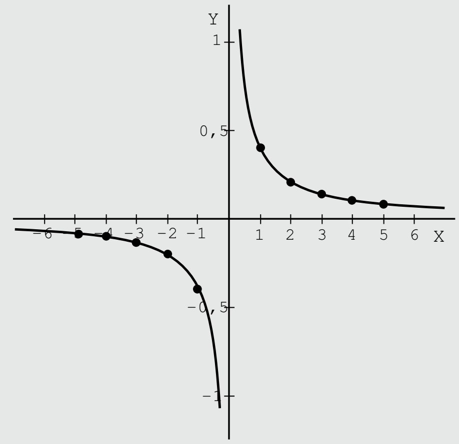
La expresión algebraica de la función es $y = \frac{600}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa.

b) $x = 75 \Rightarrow y = \frac{600}{x} = \frac{600}{75} = 8$. Tardará 8 horas.

21. a) $y = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{5}$. La expresión algebraica de la función es: $y = \frac{\frac{2}{5}}{x} = \frac{2}{5 \cdot x}$.

b)

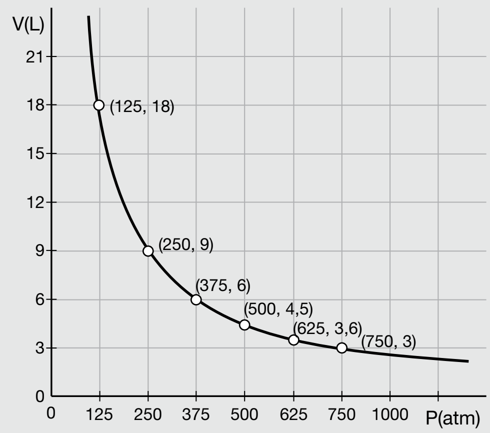
x	y
–5	–2/25
–4	–1/10
–3	–2/15
–2	–1/5
–1	–2/5
1	2/5
2	1/5
3	2/15
4	1/10
5	2/25



22. La constante de proporcionalidad inversa es igual a $125 \cdot 18 = 2\,250$.

V (L)	125	250	375	500	625	750
P (atm)	18	9	6	4,5	3,6	3

La gráfica de la función es:



23. a) Gracias a la gráfica, observamos que se emplean 2 h para llegar al otro pueblo. Así, la distancia entre los dos pueblos es de $100 \cdot 2 = 200$ km.

b) La persona tarda 10 horas en llegar al otro pueblo.

c) Tres horas y 12 minutos son 3,2 horas. Así, la velocidad media del coche era de $V = \frac{200}{3{,}2} = 62{,}5\,\text{km/h}$.

24. $f(1) = 6{,}528 \Rightarrow k \cdot a^{1-1} = 6{,}528 \Rightarrow k \cdot a^0 = = 6{,}528 \Rightarrow k = 6{,}528$

La función es de la forma $f(x) = 6{,}528 \cdot a^{x-1}$.

$f(3) = 40{,}8 \Rightarrow 6{,}528 \cdot a^{3-1} = 40{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{40{,}8}{6{,}528} = 6{,}25 \Rightarrow a = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

Así, la función es: $f(x) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{x-1}$.

$f(2) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{2-1} = 6{,}528 \cdot 2{,}5 = 16{,}32$.

$f(4) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{4-1} = 6{,}528 \cdot 2{,}5^3 = 102$.

x	1	2	3	4
$f(x)$	6,528	16,32	40,8	102

25. a)

n	0	1	2	3	4
$A(n)$	5	8,45	14,28	24,13	40,79
$B(n)$	2	4,8	11,52	27,65	66,36

b) Entre las 2 y las 3 horas.

26. El gráfico pasa por el punto $P(0,5)$. Por tanto:

$5 = k \cdot a^0 \Rightarrow 5 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 5$

La imagen de 2 por f es el doble de la imagen de 1:

$f(2) = 2 \cdot f(1) \Rightarrow 5 \cdot a^2 = 2 \cdot 5 \cdot a^1 \Rightarrow 5a^2 = 10a \Rightarrow$

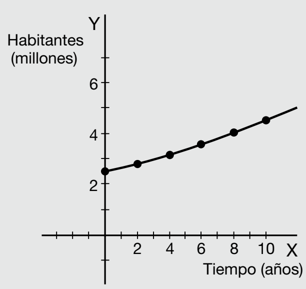
$\Rightarrow 5a^2 - 10a = 0 \Rightarrow 5a(a-2) = 0$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $a = 0$ y $a = 2$, de las cuales sólo tiene sentido el valor $a = 2$. La función es: $f(x) = 5 \cdot 2^x$

27. a) La expresión algebraica de la función es: $P_n = 2{,}5(1 + 0{,}06)^n$, $n \geq 0$ donde P_n es el número de habitantes en millones y n es el tiempo transcurrido en años.

x	0	2	4	6	8	10
y	2,5	2,81	3,16	3,55	3,98	4,48

b)



28. $3 = ka^0 \Rightarrow k = 3$

$\frac{1}{12} = 3a^2 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

La función que buscamos es $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$

29. a) Cierto

b) Cierto. Es una función exponencial para si a es un número real positivo y diferente de 1.

c) Falso. El recorrido es $(0, +\infty)$.

d) Cierto.

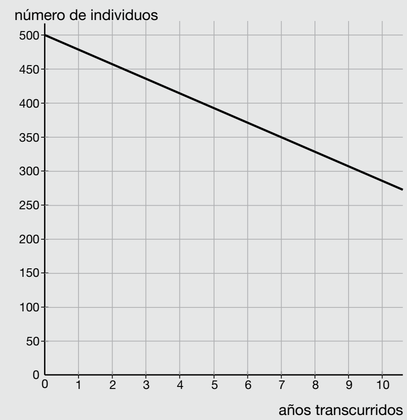
30. $\left.\begin{array}{l} y = 3^{-2x} \\ y = 3^{x-6} \end{array}\right\}$

$3^{-2x} = 3^{x-6} \Rightarrow -2x = x - 6 \Rightarrow x = 2$

$y = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

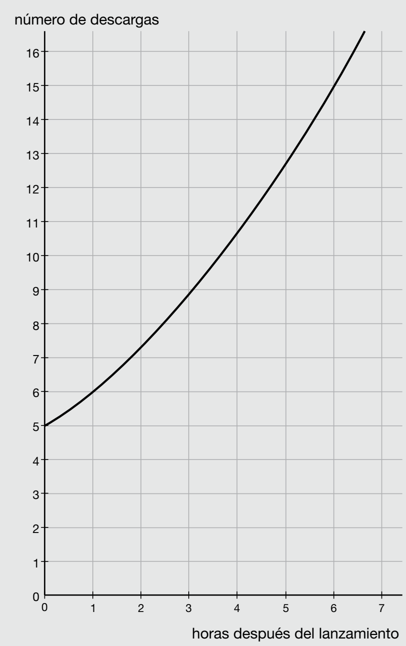
31. a) $f(x) = 500 \cdot (1 - 0{,}05)^x = 500 \cdot 0{,}95^x$

b) La gráfica es:



32. a) Si las descargas crecieran un 20 %, $f(x) = 5 \cdot (1 + 0{,}2)^x = 5 \cdot 1{,}2^x$.

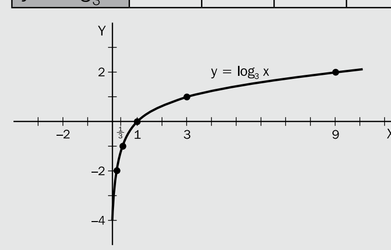
b) La gráfica de la función es:



33. La relación entre las gráficas y las funciones logarítmicas es: **1** - c; **2** - b; **3** - d; **4** - a.

34. a) $y = \log_3 x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	–2	–1	0	1	2



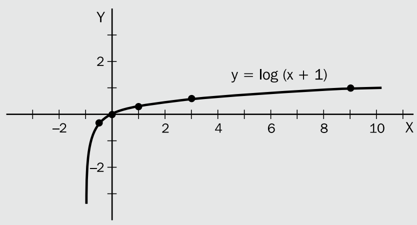
— Dominio: $(0, +\infty)$ y recorrido: $\mathbb{R}$

Intersecciones con el eje *OX*: (1, 0)

Es estrictamente creciente. Es continua.

b) $y = \log(x + 1)$

x	–0,5	0	1	3	9
y	–0,30	0	0,30	0,60	1



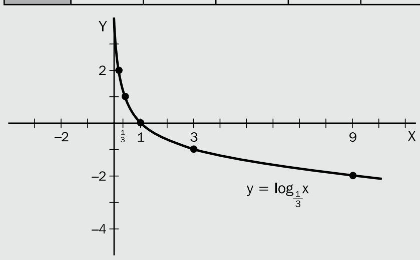
— Dominio: $(-1, +\infty)$ y recorrido: $\mathbb{R}$

Intersecciones con los ejes: Corta al eje *OX* y al eje *OY* en el punto (0, 0).

Es estrictamente creciente. Es continua.

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	–2	–1	0	1	2



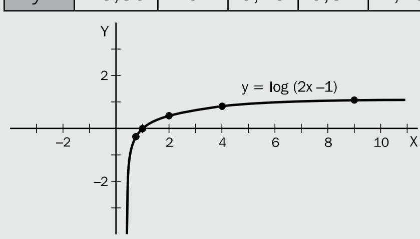
— Dominio: $(0, +\infty)$ y recorrido: $\mathbb{R}$

Intersecciones con los ejes: Corta al eje *OX* en el punto (1, 0).

Es estrictamente decreciente. Es continua.

d) $y = \log(2x - 1)$

x	0,75	1	2	4	9
y	–0,30	0	0,48	0,84	1,23



— Dominio: $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y recorrido: $\mathbb{R}$

Intersecciones con los ejes: Corta al eje *OX* en el punto (1, 0).

Es estrictamente creciente. Es continua.

35. a) $y = \log(3x - 1)$

$$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$D = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

b) $y = \log(x^2 - 1)$

$$x^2 - 1 > 0$$

Resolvemos la inecuación de segundo grado:
$x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$

Intervalo	Valor	Desigualdad	¿Es solución?
$(-\infty, -1)$	–2	$(-2)^2 - 1 > 0$	Sí
$(-1, 1)$	0	$0 - 1 < 0$	No
$(1, +\infty)$	2	$2^2 - 1 > 0$	Sí

Solución: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

36. a) Es cierta.

b) Es cierta.

c) Es falsa. La función $y = \log_2 x$ es estrictamente creciente.

d) Es cierta.

37. La gráfica de la función exponencial $y = a^x$ pasa por el punto $P\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto:

$$\frac{1}{4} = a^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

La gráfica de la función logarítmica $y = \log_b x$ pasa por el punto $Q\left(\frac{1}{125}, -3\right)$. Por tanto:

$$-3 = \log_b \frac{1}{125} \Rightarrow b^{-3} = \frac{1}{125} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{-3} = 5^{-3} \Rightarrow b = 5$$

38. Si buscamos la inversa de una de las funciones, obtendremos la otra.

$$y = \log(4x) + 4 \Rightarrow y - 4 = \log(4x) \Rightarrow$$

$$10^{y-4} = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}10^{y-4}$$

$$y = \frac{1}{4}10^{x-4}$$

39. a) $10^{-5} = 0{,}00001$. Así, el volumen del sonido es de 70 dB.

b) La intensidad es de $0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$ W/m^2..

40. $\ln(7+1) = \ln 8 \simeq 2{,}08$. Así, el área del trapecio es

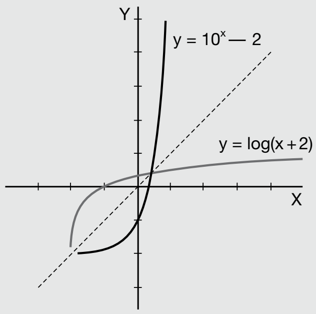
$$\frac{2{,}08 + 4}{2} \cdot 7 = \frac{6{,}08}{2} \cdot 7 = 3{,}04 \cdot 7 = 21{,}28\,\text{cm}^2$$

41. Despejamos la variable x para hallar la función inversa de $f(x) = 10^x - 2$:

$$y = 10^x - 2 \Rightarrow y + 2 = 10^x \Rightarrow \log(y+2) = \log 10^x$$

$$\Rightarrow \log(y+2) = x \cdot \log 10 \Rightarrow \log(y+2) = x$$

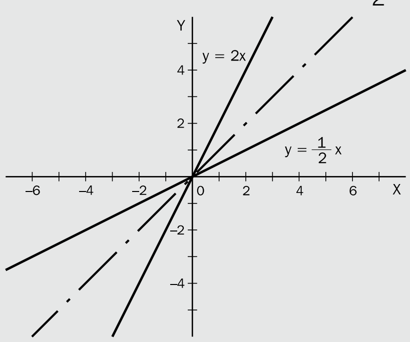
Intercambiamos x e y en la expresión anterior:



$y = \log(x + 2)$, que es la función inversa de $f(x) = 10^x - 2$ para $x > -2$

Los gráficos de las dos funciones son simétricos respecto a la bisectriz del primero y del tercer cuadrante, la recta $y = x$.

42. La función inversa de $y = 2x$ es $y = \dfrac{1}{2}x$



— El elemento de simetría corresponde a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

43. $y = f(x) = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2

—$f^{-1}(x) = \log_3 x$

44. El área del triángulo isósceles es igual a 6,64 cm². Así,

$$\frac{4 \cdot \text{altura}}{2} = 6{,}64 \Leftrightarrow 2 \cdot \text{altura} = 6{,}64 \Leftrightarrow \text{altura} = \frac{6{,}64}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{altura} = 3{,}32\,\text{cm}.$$

Por tanto, $f(10) = 3{,}32$. Así, $f^{-1}(3{,}32) = 10$. El área del triángulo rectángulo es $\dfrac{3{,}32 \cdot 9}{2} = 1{,}66 \cdot 9 = 14{,}94\ \text{cm}^2$.

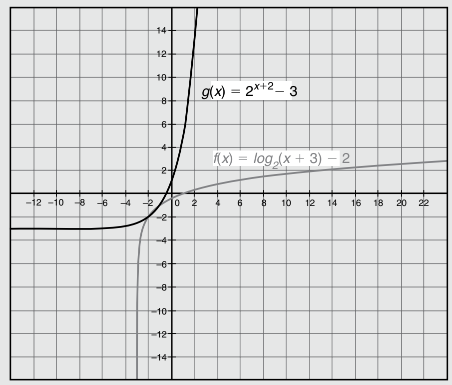
45. Calculamos $f^{-1}(x)$:

$$y = 2^{x+2} - 3 \Rightarrow y + 3 = 2^{x+2} \Rightarrow$$

$$\log_2(y+3) = x + 2 \Rightarrow x = \log_2(y+3) - 2$$

$$y = f^{-1}(x) = \log_2(x+3) - 2$$

Representamos $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en una misma gráfica:



a) Para $f(x)$:

Dominio: $\mathbb{R}$; recorrido: $(-3, +\infty)$.

Para $f^{-1}(x)$:

Dominio: $(-3, +\infty)$; recorrido: $\mathbb{R}$.

b) Ambas son crecientes.

c) Para $f(x)$:

Los puntos de corte son (0, 1) y ($\log_2 3 - 2$, 0).

Para $f^{-1}(x)$:

$$x = 0 \Rightarrow y = \log_2(0+3) - 2 = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \log_2(x+3) - 2$$

Los puntos de corte son ($\log 2_3 - 2$, 0).

46. El lado menor del pentágono mide $\sqrt{2} \simeq 1{,}41\text{cm}$.

Calculemos los dos lados adyacentes. $f^{-1}(x) = \log(x)$. Así, $f^{-1}(7) = \log(7) \simeq 0{,}85$.

Por el teorema de Pitágoras, si llamamos h al lado desconocido, tenemos que:

$$h^2 = 6^2 + 0{,}85^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 + 0{,}7225 \Leftrightarrow$$

$$h^2 = 36{,}7225 \Leftrightarrow h \simeq 6{,}06\,\text{cm}$$

Calculemos ahora los otros dos lados. $f(0{,}85) = 7$. Por tanto, consideremos otro triángulo rectángulo en el que uno de los dos catetos mide 6 – 0,85 = 5,15 cm. Así, también por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 5{,}15^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 26{,}5225 + 1 \Leftrightarrow$$

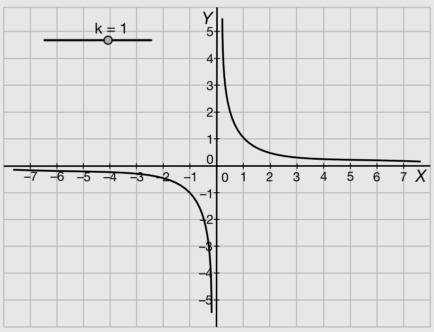
$$h^2 = 27{,}5225 \Leftrightarrow h \simeq 5{,}25\,\text{cm}$$

Por tanto, el perímetro del pentágono es igual a

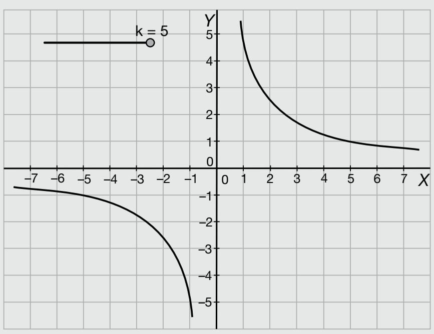
$$P = 1{,}41 + 2 \cdot 6{,}06 + 2 \cdot 5{,}25 = 1{,}41 + 12{,}12 + 10{,}5 =$$
$$= 24{,}03\,\text{cm}$$

47. Para crear el parámetro k, clica el botón «Deslizador». Cambia el nombre de a para k y teclea «OK». Después, en la entrada escribe la expresión algebraica genérica de las funciones de proporcionalidad inversa, $f(x) = \frac{k}{x}$, y clica «Intro».

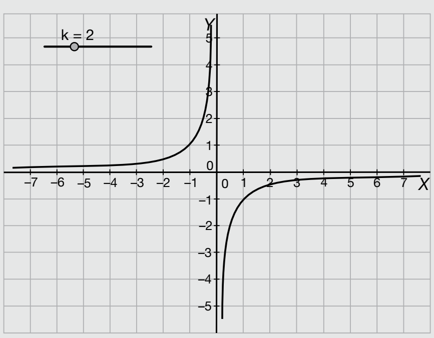
La primera función, para $k = 1$, aparece en la pantalla:



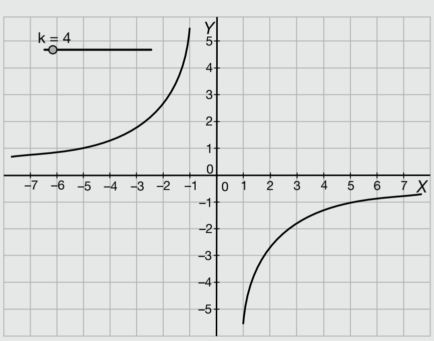
Modifica el cursor para $k = 5$. Tenemos la siguiente gráfica:



Modifica el cursor para $k = -2$. Tenemos la siguiente gráfica:



Modifica el cursor para $k = -4$. Tenemos la siguiente gráfica:



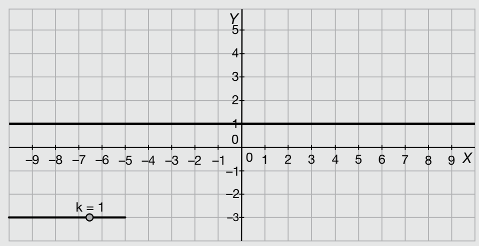
Conclusiones:

Cuando $k > 0$, las ramas de la hipérbole se sitúan en el primer y tercer cuadrantes. Cuanto mayor es su valor, más lejanas del origen están sus ramas.

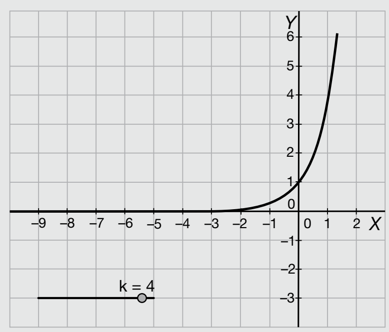
Cuando $k < 0$, las ramas de la hipérbole se sitúan en el segundo y cuarto cuadrantes. Cuanto mayor es su valor absoluto, más lejanas del origen están sus ramas.

48. Para crear el parámetro k, clica el botón «Deslizador». Cambia el nombre de a para k y teclea «OK». Después, en la entrada, escribe la expresión algebraica genérica de las funciones exponenciales, $f(x) = k^x$, y clica «Intro».

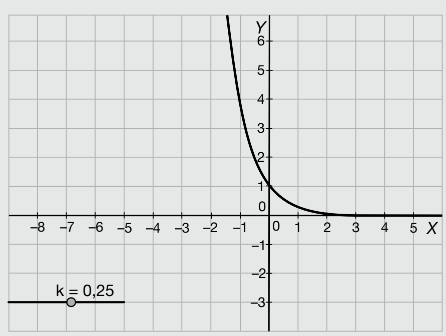
La primera función, para $k = 1$, aparece en la pantalla. Es la función constante $y = 1$:



Modifica el cursor para $k = 4$. Tenemos la siguiente gráfica:



Modifica el cursor para $k = 0{,}25$. Tenemos la siguiente gráfica:



Modifica el cursor para $k = -2$. Verifica que no aparece la gráfica de la función.

Conclusiones:

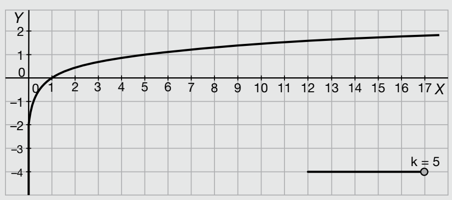
La función exponencial solo está definida en los casos en los que la base es un número real positivo diferente de 1.

$y = k^x$ y $y = \left(\frac{1}{k}\right)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

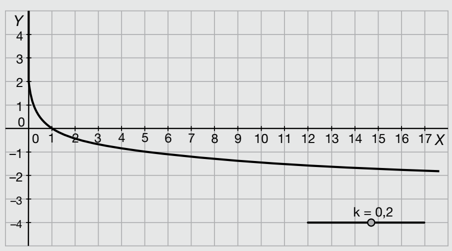
49. Para crear el parámetro *k,* clica el botón «Deslizador». Cambia el nombre de a para k y teclea «OK». Después, en la entrada escribe la expresión algebraica genérica de las funciones logarítmicas, $f(x) = \log_k x$, y clica «Intro».

Para $k = 1$, no tenemos gráfica de la función.

Para $k = 5$, tenemos la siguiente gráfica:



Para $k = 0{,}2$, tenemos la gráfica:



Para $k = -2$, no tenemos gráfica de la función.

Conclusiones:

La función logarítmica solo está definida en los casos en los que la base es un número real positivo diferente de 1. Tenemos también que $y = \log_k x$ y $y = \log_{\frac{1}{k}} x$ son simétricas respecto del eje *OX*.

50. a) $\frac{4}{3}y = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{4}{3}y - 1 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = \frac{8}{3}y - 2$

$y = \frac{8}{3}x - 2$

b) $3xy + x = 1 \Rightarrow (3y+1) \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3y+1}$

$y = \frac{1}{3x+1}$

c) $10^y = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{10^y - 2}{3}$

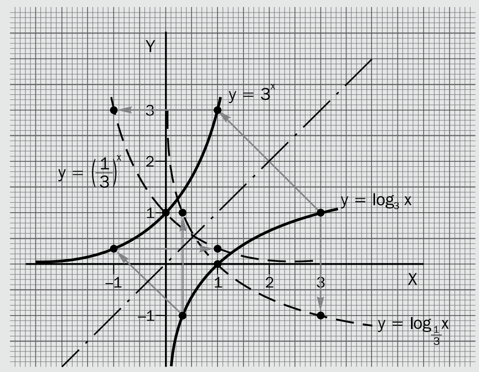
$y = \frac{10^x - 2}{3}$

d) $x^2 + 2 = 3y \Rightarrow x^2 = 3y - 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3y-2}$

No tiene función inversa porque hay elementos distintos del dominio que tienen la misma imagen.

51.

x	$\frac{1}{3}$	1	3
$y = \log_3 x$	–1	0	1



a) Si aplicamos simetría axial de la gráfica $y = \log_3 x$ respecto al eje *OX*, obtenemos la gráfica $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ $(y \to -y)$

x	$\frac{1}{3}$	1	3
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	1	0	–1

b) Si aplicamos simetría axial de la gráfica $y = \log_3 x$ respecto al eje $y = x$, obtenemos la gráfica $y = 3^x$. Realizamos los cambios:

$x \to y$

$y \to x$

x	1	0	–1
$y = 3^x$	$\frac{1}{3}$	1	3

c) Si aplicamos simetría axial de la gráfica $y = 3^x$ respecto al eje *OY,* obtenemos la gráfica: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $(x \to -x)$.

x	1	0	–1
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\frac{1}{3}$	1	3

52.

Sustancia	pH	Concentración de iones hidrógeno
Ácido de batería	1,0	10^{-1}
Ácido gástrico	2,0	10^{-2}
Zumo de naranja	3,5	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$
Café	5,0	10^{-5}
Té	5,5	$3{,}16 \cdot 10^{-6}$
Caldo de pollo	5,8	$1{,}58 \cdot 10^{-6}$
Leche	6,5	$3{,}16 \cdot 10^{-7}$
Agua	7,0	10^{-7}
Sangre	7,4	$3{,}98 \cdot 10^{-8}$
Agua de mar	8,0	10^{-8}
Jabón de manos	10,0	10^{-10}
Lejía	13,0	10^{-13}

53. a) Si P es el precio actual del coche, n es el número de años transcurridos y P_n es el precio del coche dentro de n años, la expresión algebraica de la función es $P_n = P\,(1+0{,}03)^n,\ \ n \geq 0$.

b) $P_5 = P\,(1+0{,}03)^5 \Rightarrow 20\,867 =$

$= P \cdot 1{,}03^5 \Rightarrow P = 18\,000$

Actualmente lo podemos comprar por 18 000 €.

54. a) La función que permite calcular la cantidad de sustancia radiactiva que quedará en función de los años transcurridos es $S_n = 40 \cdot 0{,}95^n$, $n \geq 0$ donde S_n es la cantidad de sustancia radiactiva en gramos y n es el número de años.

b) $S_2 = 40 \cdot 0{,}95^2 = 36{,}1$

Después de 2 años quedarán 36,1 g de sustancia radiactiva.

55. a) $C_7 = 3\,000\,(1+0{,}04)^7 = 3\,947{,}8$

Habremos acumulado un capital de 3 947,8 €.

b) $6\,000 = 3\,000\,(1+0{,}04)^n \Rightarrow 2 = \dfrac{6\,000}{3\,000} = (1+0{,}04)^n$

Sacando logaritmos:

$\log 2 = \log 1{,}04^n \Rightarrow n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}04} = 17{,}7$

Es necesario invertir los 3 000 € durante 17,7 años.

56.

$y = 2 \cdot 0{,}8^x$

— Normalmente los fármacos se toman cada 6 horas, 8 horas, 12 horas o 24 horas. Si consideramos que nos queda un 10 % del fármaco tomado, es decir, 0,2 mg de fármaco en sangre, tenemos que deben pasar 10 horas aproximadamente.

Podemos concluir que como mínimo deberían pasar 12 horas antes de tomar el fármaco.

57. $P(t) = 2\,P_O$

$2\,P_O = P_O(1+i)^t$

$2 = (1+i)^t$

$\log 2 = t \cdot \log\,(1+i)$

$t = \dfrac{\log 2}{\log\,(1+i)}$

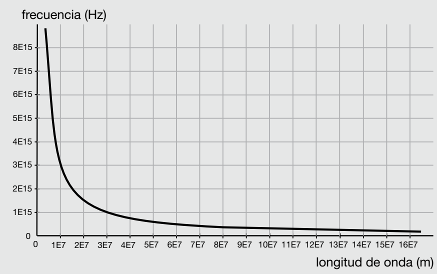
58. $8{,}25 = \dfrac{2}{3} \log \dfrac{E}{2{,}5 \cdot 10^4}$

$10^{12{,}375} = \dfrac{E}{2{,}5 \cdot 10^4}$

$E = 5{,}93 \cdot 10^{16}\,J$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a)



b) Dominio: $(0,+\infty)$; Recorrido: $(0,+\infty)$.

c) A través de una regla de tres, llamando x a la longitud de onda en metros, tenemos: $x = 450 \cdot 10^{-9} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$.

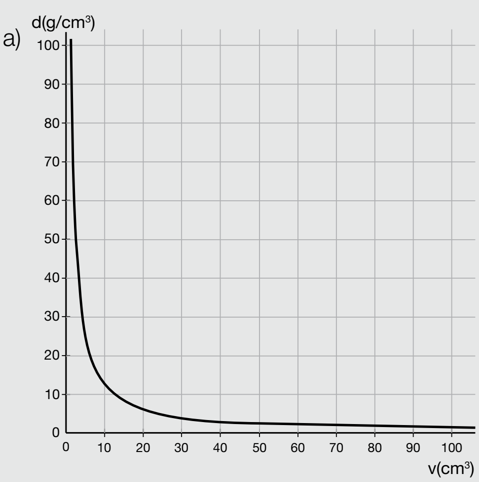
d) $f = \dfrac{3 \cdot 10^8}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} \Leftrightarrow f = 0{,}67 \cdot 10^{8+7} \Leftrightarrow f = 0{,}67 \cdot 10^{15}$

$\Leftrightarrow f = 6{,}7 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$

e) $4 \cdot 10^{14} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} \Leftrightarrow \lambda = 0{,}75 \cdot 10^{8-14}$

$\Leftrightarrow \lambda = 0{,}75 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow \lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$

2. a)



b) El volumen de la placa es $V = 229 \cdot 152 \cdot 1{,}27 = 44\,206{,}16\,\text{mm}^3$.

c) $44\,206{,}16\,\text{mm}^3 = 44{,}20616\,\text{cm}^3 \simeq 44{,}2\,\text{cm}^3$

$d = \dfrac{119{,}34}{44{,}2} \Leftrightarrow d = 2{,}7\,\text{g/cm}^3$

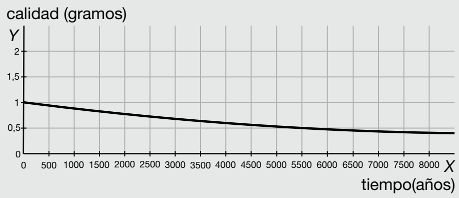
d) A través de una regla de tres, llamando x a la distancia en metros de la sonda espacial a la Tierra, tenemos que

$x = 80 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \Leftrightarrow x = 8 \cdot 10 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 11{,}968 \cdot 10^{12} \Leftrightarrow x = 1{,}1968 \cdot 10^{13}\,\text{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1{,}1968 \cdot 10^{10}\,\text{km}$

3. a)



b) Dominio: $[0,+\infty)$; Recorrido: $(0,1]$.

c) $f(2865)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2865}{5730}} \Leftrightarrow f(2865)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$f(2865)\simeq 0{,}707$ g

d) $0{,}25=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

$2=\frac{t}{5730} \Leftrightarrow t=2\cdot 5730 \Leftrightarrow t=11460$ años

e) El mamut tenía $0{,}085=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow$

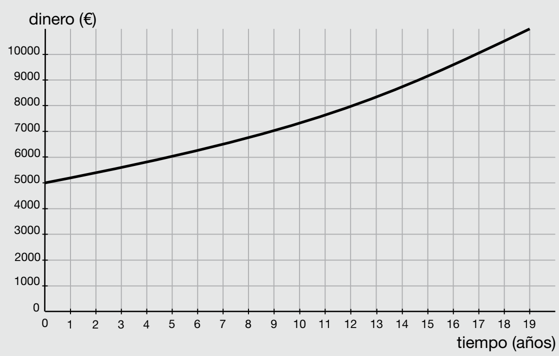
$\log_{\frac{1}{2}} 0{,}085=\frac{t}{5730} \Leftrightarrow t=5730\cdot\log_{\frac{1}{2}} 0{,}085 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\simeq 20\ 378$ años.

4. a) Tenemos que

$f(t)=5000\cdot(1+0{,}04)^{t} \Leftrightarrow f(t)=5000\cdot(1{,}04)^{t}$

b)

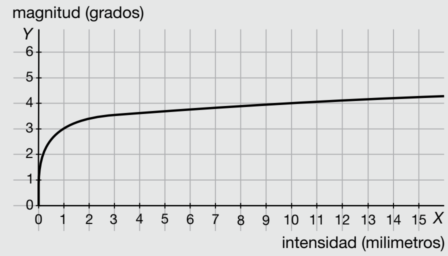


c) Dominio: $[0,+\infty)$; Recorrido: $[5\,000,+\infty]$.

d) Por la gráfica se deduce que Ana tendrá 8 000 euros. Analíticamente: $f(12)=5000\cdot(1{,}04)^{12} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(12)=8005$. Por tanto, Ana tendrá 8 005 euros en su cuenta.

e) Tenemos que $10000=5000\cdot(1{,}04)^{t} \Leftrightarrow 2=(1{,}04)^{t} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t=\log_{1.04} 2 \Leftrightarrow t\simeq 17{,}7$. Así, Ana tendrá el doble del dinero depositado transcurridos 18 años.

5. a)



b) Dominio $[0,+\infty)$; Recorrido: $[0,+\infty)$.

c) $f(10)=\log\left(\frac{10}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow f(10)=\log\left(10^{4}\right) \Leftrightarrow f(10)=4$.

Así, la magnitud del terremoto fue de 4 grados.

Nota: También se puede observar el valor en la gráfica.

d) $5=\log\left(\frac{x}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow 10^{5}=\frac{x}{10^{-3}} \Leftrightarrow x=10^{5-3}$

$\Leftrightarrow x=10^{2} \Leftrightarrow x=100\text{mm}$

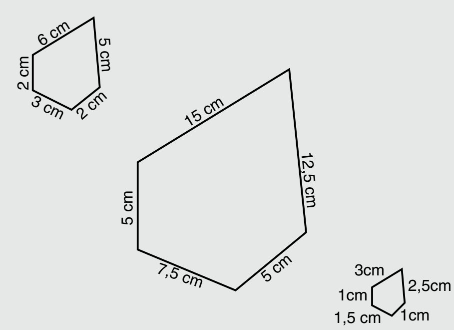
e) $\frac{100}{10}=10$. Por tanto, el segundo terremoto fue diez veces más intenso que el primero.

8. Semejanza en el plano y en el espacio

ACTIVIDADES

1. Los pentágonos resultantes son los de la figura con las siguientes medidas en centímetros:

Figura inicial	a) k = 5/2	b) k = 1/2
2 cm	5 cm	1 cm
3 cm	7,5 cm	1,5 cm
5 cm	13,5 cm	2,5 cm
6 cm	15 c	3 cm



Un pentágono con razón k = 1 será igual que el de la figura del enunciado.