3. Polinomios y fracciones algebraicas

ACTIVIDADES

1. a) Grado: 4 término independiente: 7

b) Grado: 13 término independiente: 1

— $P(2) = 2 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 = 11$

$Q(-3) = -(-3)^3 - 5(-3)^2 - 3(-3) + 1 = 82$

— Los coeficientes pedidos de $P(x)$ son (–2) y 7 y los de $Q(x)$, (-1) y 5

2. a) $P(x) = 6x^4 + 3x^3 - 22x^2 + 3$ No es completo

b) $Q(x) = x^3 + 12x^2 - x + 6$ Es completo

c) $R(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ Es completo

— Se trata de términos semejantes.

— De cada polinomio, los términos solicitados son, respectivamente:

a) $6x^4$ y (–3)

b) x^3 y 6

c) $2x^4$ y (–8)

3. a) $P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
3x^3 & -2x^2 & -x & -5 \\
 & x^2 & -2x & +4 \\
\hline
3x^3 & -x^2 & -3x & -1
\end{array}$$

b) $Q(x) - P(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & -2x & +4 \\
-3x^3 & +2x^2 & +x & +5 \\
\hline
-3x^3 & +3x^2 & -x & +9
\end{array}$$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -2x^2 & -x & -5 \\
 & & & x^2 & -2x & +4 \\
 & & 12x^3 & -8x^2 & -4x & -20 \\
 & -6x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +10x & \\
3x^5 & -2x^4 & -x^3 & -5x^2 & & \\
\hline
3x^5 & -8x^4 & +15x^3 & -11x^2 & +6x & -20
\end{array}$$

d) $-2Q(x)$

$$\begin{array}{rrr}
-2x^2 & +4x & -8
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -5x^3 & & -7x & +5 & x^2 - 2x + 2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 - x - 6 \\
\cline{1-4}
 & -x^3 & -4x^2 & -7x & & \\
 & x^3 & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & -6x^2 & -5x & +5 & \\
 & & 6x^2 & -12x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & -17x & +17 &
\end{array}$$

Comprobación

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -2x & +2 \\
 & & 2x^2 & -x & -6 \\
\hline
 & & -6x^2 & +12x & -12 \\
 & -x^3 & +2x^2 & -2x & \\
2x^4 & -4x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
2x^4 & -5x^3 & & +10x & -12
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
2x^4 & -5x^3 & +10x & -12 \\
 & & -17x & +17 \\
\hline
2x^4 & -5x^3 & -7x & +5
\end{array}$$

5. a)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +4x^3 & -x^2 & -16x & +12 & x^2 + x - 6 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & +6x^2 & & & x^2 + 3x + 2 \\
\cline{1-3}
 & 3x^3 & +5x^2 & -16x & & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & +18x & & \\
\cline{2-4}
 & & 2x^2 & +2x & +12 & \\
 & & -2x^2 & -2x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 24 &
\end{array}$$

Cociente: $x^2 + 3x + 2$; resto: 24

b)

$$\begin{array}{rrrr|l}
-2x^3 & & +3x & -5 & x^2 + x - 2 \\
\cline{5-5}
2x^3 & +2x^2 & -4x & & -2x + 2 \\
\cline{1-3}
 & 2x^2 & -x & -5 & \\
 & -2x^2 & -2x & +4 & \\
\cline{2-4}
 & & -3x & -1 &
\end{array}$$

Cociente: $-2x + 2$; resto: $-3x - 1$

c) $2x^4+22x^3-58x^2-2x-40 \quad | \quad x^2+6x-5$

$-2x^4-12x^3+10x^2 \quad\quad 2x^2+10x-108$

$10x^3-48x^2-2x$

$10x^3-60x^2+50x$

$108x^2+48x-40$

$108x^2+648x-540$

$696x-580$

Cociente: $2x^2 + 10x - 108$; resto: $696x - 580$

6. Un método es dividir los polinomios:

a) $x^3-4x^2+9x+18 \quad | \quad x+2$

$-x^3-2x^2 \quad\quad x^2-6x+21$

$-6x^2+9x$

$6x^2+12x$

$21x+18$

$-21x-42$

-24

b) $x^4+x^3-18x^2-16x+32 \quad | \quad x-4$

$-x^4+4x^3 \quad\quad x^3+5x^2+2x-8$

$5x^3-18x^2$

$-5x^3+20x^2$

$2x^2-16x$

$-2x^2+8x$

$-8x+32$

$8x-32$

0

Otro método consiste en aplicar la regla de Ruffini:

a)

	1	– 4	9	18
– 2		– 2	12	– 42
	1	– 6	21	– 24

Cociente: $x^2 - 6x + 21$; resto: -24

b)

	1	1	– 18	– 16	32
4		4	20	8	– 32
	1	5	2	– 8	0

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$; resto: 0

7. a)

	5	4	2	7
2		10	28	52
	5	14	26	59

Cociente: $5x^2 + 14x + 26$; resto: 59

b)

	– 1	12	– 4	0	– 10
– 5		5	– 85	445	– 2225
	– 1	17	– 89	445	– 2235

Cociente: $-x3 + 17x2 - 89x + 445$; resto: -2235

8. Los polinomios b) y c) son divisibles, mientras que el polinomio a) no lo es, pues el resto es 56.

a)

	1	10	3	– 54
– 5		– 5	– 25	110
	1	5	– 22	56

b)

	2	3	– 35	9	45
– 5		– 10	35	0	– 45
	2	– 7	0	9	0

c)

	3	2	– 49	76	– 20
– 5		– 15	65	– 80	20
	3	– 13	16	– 4	0

9. El producto de los dos polinomios será múltiplo de ambos: $2x^3 + 11x^2 + 10x - 8$

10. El valor numérico del polinomio para $x = a$ es igual al resto de la división del polinomio entre $x - a$.

a) 384

	3	4	– 17	– 6
5		15	95	390
	3	19	78	384

b) 0

	3	4	– 17	– 6
– 3		– 9	15	6
	3	– 5	– 2	0

c) –66

	3	4	– 17	– 6
– 4		– 12	32	– 60
	3	– 8	15	– 66

11. El resto de la división será igual a la suma del término independiente más un número entero multiplicado por *a*. Para que dé 0, el término independiente ha de ser divisor de *a*.

a) No, porque 15 no es divisible entre 4.

	1	3	– 15
4	0	4	28
	1	7	13

b) Es posible, porque 15 es divisible por 3, pero comprobamos que no lo es.

	1	3	– 15
3	0	3	18
	1	6	3

c) Es posible, porque 6 es divisible entre 3, pero también comprobamos que no lo es.

	2	– 5	– 6
3	0	6	3
	2	1	– 3

12. No, porque la raíz no es un divisor del término independiente, –15.

13. a) ±1

b) ±1

c) ±1, ±2, ±3, ±6

d) ±1, ±3, ±5, ±15

e) ±1, ±7

14. a) Ninguna.

b) ±1, ya que $Q(1)$) = $Q(-1) = 0$

c) –2, 1 y 3, ya que $R(-2) = R(1) = R(3) = 0$

d) –1, 1, 3, 5, ya que $S(-1) = S(1) = S(3) = S(5) = 0$

e) 7, ya que $T(7) = 0$

15. a) Cuando el término independiente del polinomio sea cero.

b) 4. Ya que al ser primo únicamente tiene como divisores enteros el 1 y el mismo término independiente. Véase por ejemplo el apartado e) de la actividad 13.

16. a) $P(x) = 36x^2(2x^2 - 1)$

b) $Q(x) = 4x(1 + 25x^2)$

c) $R(x) = x^2(3x^3 - 6x^2 + 7)$

d) $S(x) = 6x^2(x^2 + 1)$

e) $T(x) = 7x^3 - 4$

17. a) $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

b) $Q(x) = (x - 3)^2$

c) $R(x) = (x + 7)^2$

d) $S(x) = (x + 5)(x - 5)$

e) $T(x) = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

18. $(x - 1)\ (x - 5)\ (x - 3)$

19. Las soluciones de $2x^2 + 4x - 6 = 0$ son +1 y –3.

Como $(x - 1)\ (x + 3) = x^2 + 2x - 3$, una descomposición factorial del polinomio $2x^2 + 4x - 6$ es $2\ (x - 1)\ (x + 3)$.

20. $(x + 2)\ (x - 4)\ (x^2 + 2x + 2)$

21. Las cuatro expresiones son fracciones algebraicas. En la 2.ª y la 4.ª podemos considerar que el divisor es el polinomio 1.

22. $\dfrac{(x^2-1)(3x-1)}{(x+1)(3x-1)} = \dfrac{3x^3-x^2-3x+1}{3x^2+2x-1}$

$\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

23. Dado que x2 - 9 = (x + 3) · (x - 3), basta multiplicar el numerador y el denominador por (x - 3) para obtener la fracción equivalente deseada:

$\dfrac{x^2-4x+3}{x+3} = \dfrac{(x^2-4x+3)\cdot(x-3)}{x^2-9} =$

$= \dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^2-9}$

24. a) Sí, ya que

$(x - 2)\ (6x^2 + 2x) = (3x + 1)\ (2x^2 - 4x)$

$6x^3 - 10x^2 - 4x = 6x^3 - 10x^2 - 4x$

b) No, ya que

$(x + 1)\ 3x \neq (x^2 + 1)\ (2x^2 + 1)$

$(x + 1)\ 3x = 3x^2 + 3x$

$(x^2 + 1)\ (2x^2 + 1) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

25. $\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{2\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{2}{(x-2)}$

26. Calculamos el m.c.m. de los denominadores:

$4x + 4 = 4\ (x + 1)$

$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)\ (x + 3)$

m.c.m. = $4\ (x + 1)\ (x + 3)$

Dividimos el m.c.m. por cada uno de los denominadores:

$[4\ (x + 1)\ (x + 3)] : (4x + 4) = x + 3$

$[4\ (x + 1)\ (x + 3)] : (x^2 + 4x + 3) = 4$

Multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente correspondiente.

$\dfrac{x(x+3)}{4(x+1)(x+3)} = \dfrac{x^2+3x}{4x^2+16x+12}$

$\dfrac{2\cdot 4}{(x+1)(x+3)\cdot 4} = \dfrac{8}{4x^2+16x+12}$

27. a) $\dfrac{x^2-2x-5}{x^2+2}$

b) $\dfrac{x^3+2x^2-4x-5}{x^2+x-2}$

c) $\dfrac{2x^2+3x+11}{x^3+2x^2-5x-6}$

d) $\dfrac{6x^5+12x^4-10x^3-x^2+8x+12}{2x^4+2x^3-19x^2-21x+18}$

28. a) $\dfrac{x+3}{x^2+2x-15}$

b) $\dfrac{4x-8}{x^4-3x^3-x^2+15x-20}$

29. a) $\dfrac{2}{x-1}$

b) $\dfrac{3x^2+19x-14}{2x^3-6x}$

30.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & K \\ -2 & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{K+6} \end{array}$$

Puesto que el resto ha de ser 5:

$K + 6 = 5$

$K = -1$

31.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & K \\ -2 & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{K+6} \end{array}$$

Puesto que el resto ha de ser 0:

$K + 6 = 0$

$K = -6$

32. a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & 0 & K \\ -1 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & -8 & 8 & \boxed{K-8} \end{array}$$

Puesto que el resto ha de ser 0:

$K - 8 = 0$

$K = 8$

b) Para que el resto sea 3:

$K - 8 = 3$

$K = 11$

33. Por ejemplo: $9x^4 - 3x + x$

34. a) $P(1) = 2 \cdot 13 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot 1 - 12 = 0$

b) $P(2) = 2 \cdot 23 + 8 \cdot 22 + 2 \cdot 2 - 12 = 40$

c) $P(3) = 2 \cdot 33 + 8 \cdot 32 + 2 \cdot 3 - 12 = 120$

35. Sí, por ejemplo la suma de los polinomios $x^5 + 2x^2$ y $-x^5 + x$ da un polinomio de grado 2: $2x^2 + x$.

36. No, el producto de dos polinomios de grado 5 será un polinomio de grado 10.

37. El grado del polinomio cociente es la resta del grado del dividendo menos el grado del divisor.

38. La relación que se establece entre las figuras geométricas y las expresiones de sus áreas es la siguiente: Figura 1 – b; Figura 2 – a; Figura 3 – d; Figura 4 – c.

39. a) $P(x) + Q(x) =$

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & & +3x^2 & -2x & +7 \\ -8x^4 & -3x^3 & & +x & -5 \\ \hline -7x^4 & -3x^3 & +3x^2 & -x & +2 \end{array}$$

b) $-3\,R(x) = -3\,(x^3 + 7x2 - x + 3) =$

$= -3x^3 - 21x2 + 3x - 9$

$P(x) - 3\,R(x) =$

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & & +3x^2 & -2x & +7 \\ & -3x^3 & -21x^2 & +3x & -9 \\ \hline x^4 & -3x^3 & -18x^2 & +x & -2 \end{array}$$

c) $P(x) + Q(x) = -7x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2$

$P(x) + Q(x) - R(x) =$

$$\begin{array}{rrrrr} -7x^4 & -3x^3 & +3x^2 & -x & +2 \\ & -x^3 & -7x^2 & +x & -3 \\ \hline -7x^4 & -4x^3 & -4x^2 & & -1 \end{array}$$

d) $2\,P(x) = 2\,(x^4 + 3x^2 - 2x + 7) =$

$= 2x^4 + 6x^2 - 4x + 14$

$2\,P(x) - Q(x) =$

$$\begin{array}{rrrrr} 2x^4 & & +6x^2 & -4x & +14 \\ 8x^4 & +3x^3 & & -x & +5 \\ \hline 10x^4 & +3x^3 & +6x^2 & -5x & +19 \end{array}$$

$2\,P(x) - Q(x) - R(x) =$

$$\begin{array}{rrrrr} 10x^4 & +3x^3 & +6x^2 & -5x & +19 \\ & -x^3 & -7x^2 & +x & -3 \\ \hline 10x^4 & +2x^3 & -x^2 & -4x & +16 \end{array}$$

40. a) $P(x) \cdot Q(x) =$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & 2x^2 & +4x & -8 \\ & & & x^3 & -x & +2 \\ \hline & & & 4x^2 & +8x & -16 \\ & & -2x^3 & -4x^2 & +8x & \\ 2x^5 & +4x^4 & -8x^3 & & & \\ \hline 2x^5 & +4x^4 & -10x^3 & & +16x & -16 \end{array}$$

b) En el anterior apartado se ha obtenido $P(x) \cdot Q(x)$, por tanto, para hallar $P(x) \cdot Q(x)$, basta multiplicar el resultado de a) por $\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}P(x)\cdot Q(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x - 8$$

41. a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -12x & & x^2-2x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x+6 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & -12x & & \\
 & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3}
 & & 0 & &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & & +4 & x^2-4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & +4x & & x-3 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & +4x & & \\
 & 3x^2 & & -12 & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & -8 &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -13x & +10 & x^2-3x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +3x^2 & -2x & & x+5 \\ \cline{1-3}
 & 5x^2 & -15x & +10 & \\
 & -5x^2 & +15x & -10 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -6x & +7 & x^2+x-6 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & +6x & & x \\ \cline{1-3}
 & & & 7 & \\
 & & & 0 & \\ \cline{2-4}
 & & & 7 &
\end{array}$$

— Las divisiones son exactas en los apartados a) y c).

42. a)

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & -3 \\
-3 & & -3 & 3 \\ \hline
 & 1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^2 + 2x - 3) : (x + 3) = x - 1$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^3 - 7x - 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 8 & -23 & -30 \\
-10 & & -10 & 20 & 30 \\ \hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^3 + 8x^2 - 23x - 30) : (x + 10) = x^2 - 2x - 3$

43. a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -10 & 10 \\
4 & & 4 & 4 & -24 \\ \hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{-14}
\end{array}$$

Cociente: $x^2 + x - 6$
Resto: -14

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -7 & -41 & +100 \\
-5 & & -5 & 60 & -95 \\ \hline
 & 1 & -12 & 19 & \boxed{5}
\end{array}$$

Cociente: $x^2 - 12x + 19$
Resto: 5

44. Para calcular $P(a)$ podemos proceder de los siguientes modos:

1) Sustituimos a en el polinomio $P(x)$ y efectuamos las operaciones correspondientes.

2) Dividimos $P(x)$ entre $x - a$. El residuo que se obtiene es igual a $P(a)$.

45. Dividimos el polinomio por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & +6 \\
1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x - 1$, lo que nos indica que $x = 1$ es una raíz.

Dividimos el cociente obtenido por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 1 & -6 \\
2 & & 2 & 6 \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x - 2$, lo que nos indica que $x = 2$ es una raíz.

Como que el segundo cociente obtenido es $x - 3$, $x = 3$ es una raíz.

46. $P(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$

$P(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$

$$\left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a-b=-2 \\ 2a+b=\ \ 5 \\ \hline a \qquad \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ =\ 3 \end{array}$$

$a + b = 2 \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 3 = -1$

El polinomio $P(x)$ es: $P(x) = 3x - 1$

47. a)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -6x^2 & & +8 & 2x-4 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & x^2-x-2 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & +0x & & \\
 & 2x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3}
 & & -4x & +8 & \\
 & & 4x & -8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$2x^3 - 6x^2 + 8$ es divisible por $2x - 4$.

b)

$$
\begin{array}{rr|l}
x^3 & -2x^2 & 2x-4 \\ \cline{3-3}
-x^3 & +2x^2 & \frac{1}{2}x^2 \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$x^3 - 2x^2$ es múltiplo de $2x - 4$.

c)

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +6x & -4 & 2x-4 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & +4x & & x+5 \\ \cline{1-2}
 & 10x & -4 & \\
 & -10x & +20 & \\ \cline{2-3}
 & & 16 &
\end{array}
$$

$2x^2 + 6x - 4$ no es múltiplo de $2x - 4$.

d)

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +3x & -2 & 2x-4 \\ \cline{4-4}
-x^2 & +2x & & \frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ \cline{1-2}
 & 5x & -2 & \\
 & -5x & +10 & \\ \cline{2-3}
 & & 8 &
\end{array}
$$

$x^2 + 3x - 2$ no es múltiplo de $2x - 4$.

48. a) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x - 3)$

Cociente: $3x^2 + 27x + 114$

Resto: 360

No es divisor.

b) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x + 1)$

Cociente: $3x^2 + 15x + 18$

Resto: 0

Sí que es divisor.

c) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (3x^2 + 3x + 6)$

Cociente: $x + 5$

Resto: $12x - 12$

No es divisor.

d) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x^2 - 4x - 1)$

Cociente: $3x + 30$

Resto: $156x + 48$

No es divisor.

49. Calculamos la división del polinomio por $x - 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
3 & & 3 & 15 & 30 \\ \hline
 & 1 & 5 & 10 & \boxed{24}
\end{array}
$$

Por lo tanto, el valor numérico del polinomio para $x = 3$ es 24.

Calculamos la división del polinomio para $x + 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
-3 & & -3 & 3 & 6 \\ \hline
 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Por lo tanto, el valor numérico del polinomio para $x = -3$ es 0.

50. a) $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x + 1$ y
$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 1 = 4$. Por tanto, el resto es 4.

b) $P(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ y
$P(-1) = (-1)^4 + 5 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 5 = 2$. Así, el resto es 2.

c) $P(x) = -3x^3 + 10x^2 + 27x - 10$ y
$P(5) = -3 \cdot 5^3 + 10 \cdot 5^2 + 27 \cdot 5 - 10 = 0$. Así, el resto es 0.

d) $P(x) = 2x^2 - 3x - 8$ y
$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 8 = 6$. Por tanto, el resto es 6.

51. a) $P(x) = -x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x + 11$ y
$P(-2) = -(-2)^4 - 6 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 11 = 1$.
Por tanto, el resto es 1.

b) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 2x - 2$ y
$P(3) = 3^5 - 2 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 4$. Así, el resto es 4.

c) $P(x) = -3x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 6x + 12$ y
$P(-1) = -3 \cdot (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 +$
$+ 6 \cdot (-1) + 12 = 5$. Por tanto, el resto es 5.

d) $P(x) = 9x^5 + 36x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 30x + 40$ y
$P(-4) = 9 \cdot (-4)^5 + 36 \cdot (-4)^4 - 2 \cdot (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 +$
$+ 30 \cdot (-4) + 40 = 0$. Así, el resto es 0.

52. Las posibles raíces enteras del polinomio serán los divisores del término independiente: ±1; ±2; ±4.

53. a) $x\,(x - 1)^2$

b) $(x - 3)\,(x + 1)\,(x + 3)$

c) $(x^2 - 3)\,(x^2 + 3)$ (también podríamos escribir:

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

54. a) m.c.d. = $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$

m.c.m. = $(x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 3) =$
$= x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) m.c.d. = $(x - 2)^2 (x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4$

m.c.m.= $2(x - 2)^2 (x + 1) = 2x^3 - 6x^2 + 8$

c) m.c.d. = 1

m.c.m. = $x(x - 2)(x - 3)(x^3 - 3x^2 - 19x + 20) =$

$= x^6 - 2x^5 - 19x^4 + 28x^3 + 80x^2 - 120x$

55. a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x = x \cdot (x^2 - 2x + 5)$

b) $Q(x) = 6x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 16x = 2x \cdot (3x^3 + x^2 + 4x - 8)$

c) $R(x) = -7x^4 + 28x^3 - 14x^2 = 7x^2 \cdot (-x^2 + 4x - 2)$

d) $S(x) = -3x^3 + 9x^2 - 12x = 3x \cdot (-x^2 + 3x - 4)$

56. a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 + 4x + 4) =$

$= x \cdot (x + 2)^2$

b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 - 6x + 9) =$

$= x \cdot (x - 3)^2$

c) $R(x) = x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

d) $S(x) = 2x^3 - 16x^2 + 32x = 2x \cdot (x^2 - 8x + 16) =$

$= 2x \cdot (x - 4)^2$

57. Podríamos hacerlo con la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado, pero hagámoslo en este caso por Ruffini.

Tenemos que 1 es una raíz del polinomio, puesto que $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

Por el teorema de Ruffini:

	1	1	–3
1		1	3
	1	3	0

Por tanto, $x^2 + 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 3)$.

58. Por la regla de Ruffini:

	1	–9	11	21
3		3	–18	–21
	1	-6	–7	0

Aplicamos nuevamente la regla de Ruffini:

	1	–6	–7
–1		–1	7
	1	–7	0

Por tanto, $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 7)$

59. Sacamos factor común:

$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x = x \cdot (x^3 + 5x^2 + 2x - 8)$

A través de la regla de Ruffini:

	1	5	2	–8
1		1	6	8
	1	6	8	0

Aplicamos de nuevo la regla de Ruffini y obtenemos el otro factor:

	1	6	8
–2		–2	–8
	1	4	0

Por tanto,

$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x = x \cdot (x^3 + 5x^2 + 2x - 8) =$

$= x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$

60. Como el término independiente es 15, las raíces enteras pueden ser $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

El polinomio es divisible entre –3 pues se anula en ese valor de *x*.

A través de la regla de Ruffini:

	1	0	–4	15
–3		–3	9	–15
	1	–3	5	0

Así, tenemos que $x^3 - 4x + 15 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 5)$ pues el polinomio de grado 2 no tiene raíces reales.

61. Como el término independiente es –2, las raíces enteras pueden ser $\pm 1, \pm 2$.

Sabemos que el polinomio es divisible entre –2 pues se anula en ese valor de *x*.

A través de la regla de Ruffini:

	2	5	2	–2
–2		–4	–2	2
	2	1	–1	0

Obtenemos el polinomio $2x^2 + x - 1$. Calculamos sus raíces:

	2	1	–1
–1		–2	1
	2	–1	0

Por tanto, $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = (2x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) =$.

$= 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$

62. Por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & -3 \\ -3 & & -3 & \frac{9}{2} & 3 \\ \hline & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{array}$$

Obtenemos el polinomio $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$. Calculamos sus raíces:

$x=\dfrac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2}$

$x=\dfrac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}}{2}$

$x=\dfrac{\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}}{2}$

$x=2, x=-\dfrac{1}{2}$

Por tanto, $x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3=(x+3)\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

63. Como el término independiente es –40, las raíces enteras pueden ser $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm8, \pm10, \pm20, \pm40$.

Sabemos que el polinomio es divisible entre –2, pues se anula en ese valor de x.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -22 & -40 \\ -2 & & -2 & 2 & 40 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array}$$

Obtenemos el polinomio x^2-x-20. Calculamos sus raíces:

x^2-x-20

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{81}}{2}$

$x=\dfrac{1\pm9}{2}$

$x=5, x=-4$

Por tanto, $x^3+x^2-22x-40=(x+2)\cdot(x-5)\cdot(x+4)$.

64. Las cuatro expresiones son fracciones algebraicas.

— $\frac{1}{2}$ es la división de dos polinomios de grado 0.

— $2x^2+2x+2$ es la división del polinomio $2x^2+2x+2$ por el polinomio 1.

65. — $\dfrac{x^2+3}{4x+1}\cdot\dfrac{x}{x}=\dfrac{x^3+3x}{4x^2+x}$

— $\dfrac{x^2+3}{4x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x+1}=\dfrac{x^3+x^2+3x+3}{4x^2+5x+1}$

66. a) $\dfrac{2x^2-6x+4}{2x^2-5x+3}=\dfrac{2(x-2)\ \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\ (2x-3)}=\dfrac{2x-4}{2x-3}$

b) $\dfrac{2x^2-6x+4}{2x^2-6x+4}=1$

67. a) $x^2-4=(x-2)(x+2)$

$x^2-3x+10$ No puede descomponerse.

El mínimo común múltiplo de los denominadores es: $(x-2)(x+2)(x^2-3x+10)$

$\dfrac{x(x^2-3x+10)}{(x^2-4)(x^2-3x+10)}=$

$=\dfrac{x^3-3x^2+10x}{x^4-3x^3+6x^2+12x-40}$

$\dfrac{(3x+1)(x-2)(x+2)}{(x^2-3x+10)(x-2)(x+2)}=$

$=\dfrac{3x^3+x^2-12x-4}{x^4-3x^3+6x^2+12x-40}$

b) $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

$x^2-3x+10=(x-1)(x+3)$

El m.c.m. de los denominadores es:

$(x-4)(x-1)(x+3)$

$\dfrac{2x(x-1)}{(x^2-x-12)(x-1)}=\dfrac{2x^2-2x}{x^3-2x^2-11x+12}$

$\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-2x^2-11x+12}$

68. a) $\dfrac{1}{(x-6)}+\dfrac{3x}{2}=\dfrac{2}{(x-6)\cdot2}+\dfrac{3x(x-6)}{2(x-6)}=$

$=\dfrac{2+3x(x-6)}{2(x-6)}=\dfrac{3x^2-18x+2}{2x-12}$

b) $\dfrac{5}{x^2+x-6}+\dfrac{2x}{x^2+2x-3}=$

$=\dfrac{5(x-1)}{x^2+2x-3}+\dfrac{2x(x-2)}{(x^2+2x-3)(x-2)}=$

$=\dfrac{5x-5+2x^2-4x}{x^3-7x+6}=\dfrac{2x^2+x-5}{x^3-7x+6}$

c) $\dfrac{2x+2}{x^3-2x^2-9x+18}+\dfrac{x-3}{x^3-x^2-14x+24}=$

$\dfrac{(2x+2)(x+4)}{(x^3-2x^2-9x+18)(x+4)}+$

$+\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x^3-x^2-14x+24)(x+3)}=$

$=\dfrac{2x^2+10x+8-(x^2-9)}{x^4+2x^3-17x^2-18x+72}=$

$=\dfrac{x^2+10x+17}{x^4+2x^3-17x^2-18x+72}$

69. a) $\dfrac{-3x+2}{x^2+4x+3}\cdot\dfrac{x^2-4}{-2x-3}=$

$=\dfrac{3x^3-2x^2-12x+8}{2x^3-11x^2-18x+9}$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^3-x+3}\cdot\dfrac{2+3}{3-2}=$

$=\dfrac{2x^3+3x^2+2x+3}{3x^4-2x^3-3x^2-11x-6}$

70. a) $\dfrac{3x^2+1}{2x^2+1}:\dfrac{x+1}{4x+3}=\dfrac{3x^2+1}{2x^2+1}\cdot\dfrac{4x+3}{x+1}=$

$=\dfrac{12x^3+9x^2+4x+3}{2x^3+2x^2+x+1}$

b) $\dfrac{x^2+4x-3}{2x-3}:\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}=$

$=\dfrac{x^2+4x-3}{2x-3}\cdot\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}=$

$=\dfrac{x^3+8x^2+13x-12}{2x^2-5x+3}$

71. $(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)=x^4-7x^3+17x^2-$

$-17x+6x^4-6x^3+13x^2-12x+4=$

$=(x-1)^2\cdot(x-2)^2$

$\dfrac{(x-1)^2\cdot(x-2)^2}{(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$

Obtenemos:

$\dfrac{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}{x^4-7x^3+17x^2-17x+6}=$

$=\dfrac{(x-1)^2\cdot(x-2)^2}{(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$

72. a) $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-3x}=\dfrac{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-3)}=\dfrac{(x+1)\cdot(x+2)}{x-3}=$

$=\dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$

b) $\dfrac{x^3+x^2-16x+20}{x^3+2x^2-13x+10}=\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+5)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

c) $\dfrac{4x^3+28x^2-4x-28}{2x^3+6x^2-2x-6}=\dfrac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+7)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}=$

$=\dfrac{2\cdot(x+7)}{x+3}=\dfrac{2x+14}{x+3}$

73. a) $\dfrac{x-4}{x+5}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x\cdot(x-4)+(x+5)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+5)}=$

$=\dfrac{x^2-4x+x^2+6x+5}{x^2+5x}=\dfrac{2x^2+2x+5}{x^2+5x}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{x-2}{(x-3)\cdot(x+1)}+\dfrac{3}{x-3}=$

$=\dfrac{x-2+3\cdot(x+1)}{x^2-2x-3}=\dfrac{x-2+3x+3}{x^2-2x-3}=\dfrac{4x+1}{x^2-2x-3}$

c) $\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{x+5}{x^2-7x+10}=\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{x+5}{(x-5)\cdot(x-2)}=$

$=\dfrac{2x\cdot(x-2)-x-5}{x^2-7x+10}=\dfrac{2x^2-4x-x-5}{x^2-7x+10}=\dfrac{2x^2-5x-5}{x^2-7x+10}$

74. a) $\dfrac{x+3}{x-2}\cdot\dfrac{5x}{x+1}=\dfrac{(x+3)\cdot 5x}{(x-2)\cdot(x+1)}=\dfrac{5x^2+15x}{x^2-x-2}$

b) $\dfrac{2x-1}{5x+15}\cdot\dfrac{x+3}{x-7}=\dfrac{(2x-1)\cdot(x+3)}{(5x+15)\cdot(x-7)}=$

$=\dfrac{(2x-1)\cdot(x+3)}{5\cdot(x+3)\cdot(x-7)}=\dfrac{2x-1}{5\cdot(x-7)}=\dfrac{2x-1}{5x-35}$

c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+1}\cdot\dfrac{x-5}{x+2}=\dfrac{\left(x^2-4\right)\cdot(x-5)}{\left(x^2-5x+1\right)\cdot(x+2)}=$

$=\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-5)}{\left(x^2-5x+1\right)\cdot(x+2)}=\dfrac{(x-2)\cdot(x-5)}{x^2-5x+1}=$

$=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+1}$

75. a) $\dfrac{4x+3}{x}:\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{4x+3}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(4x+3)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-2)}=$

$=\dfrac{4x^2+7x+3}{x^2-2x}$

b) $\dfrac{2\cdot(x-4)}{x-5}:\dfrac{x^2-8x+16}{x+1}=\dfrac{2\cdot(x-4)}{x-5}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-8x+16}=$

$=\dfrac{2\cdot(x-4)\cdot(x+1)}{(x-5)\cdot\left(x^2-8x+16\right)}=\dfrac{2\cdot(x-4)\cdot(x+1)}{(x-5)\cdot(x-4)^2}=$

$=\dfrac{2\cdot(x+1)}{(x-5)\cdot(x-4)}=\dfrac{2x+2}{x^2-9x+20}$

c) $\dfrac{2x^2}{x+4}:\dfrac{4x-4}{x^2+1}=\dfrac{2x^2}{x+4}\cdot\dfrac{x^2+1}{4x-4}=\dfrac{2x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{(x+4)\cdot(4x-4)}=$

$=\dfrac{2x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{4\cdot(x+4)\cdot(x-1)}=\dfrac{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{2\cdot(x+4)\cdot(x-1)}=$

$=\dfrac{x^4+x^2}{2\cdot\left(x^2+3x-4\right)}=\dfrac{x^4+x^2}{2x^2+6x-8}$

76. $\left(\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{5}{x+2}\right)\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{2x}=$

$=\left(\dfrac{(x+1)\cdot(x+2)+5\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)}\right)\cdot\dfrac{(x+2)^2}{2x}=$

$=\dfrac{x^2+8x-13}{(x-3)\cdot(x+2)}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{2x}=\dfrac{\left(x^2+8x-13\right)\cdot(x+2)}{2x\cdot(x-3)}=$

$=\dfrac{x^3+10x^2+3x-26}{2x^2-6x}$

77. $\dfrac{x-3}{x^2-1}:\left(\dfrac{7x}{x^2+6x+5}-\dfrac{x+2}{x+1}\right)=$

$=\dfrac{x-3}{x^2-1}:\left(\dfrac{7x}{(x+1)\cdot(x+5)}-\dfrac{x+2}{x+1}\right)=$

$=\dfrac{x-3}{x^2-1}:\dfrac{7x-(x+2)\cdot(x+5)}{(x+1)\cdot(x+5)}=$

$=\dfrac{x-3}{x^2-1}:\dfrac{7x-x^2-7x-10}{(x+1)\cdot(x+5)}=\dfrac{x-3}{x^2-1}:\dfrac{-x^2-10}{(x+1)\cdot(x+5)}=$

$=\dfrac{x-3}{(x+1)\cdot(x-1)}\cdot\dfrac{(x+1)\cdot(x+5)}{-x^2-10}=\dfrac{(x-3)\cdot(x+5)}{(x-1)\cdot\left(-x^2-10\right)}=$

$=\dfrac{x^2+2x-15}{-x^3+x^2-10x+10}$

78. a) $\left(\dfrac{x+2}{x-5}+\dfrac{(x+1)\cdot(x-2)}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x-5}{x+4}=$

$=\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)+(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{x-5}{x+4}=$

$=\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)+\left(x^2-x-2\right)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{x-5}{x+4}=$

$=\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)+\left(x^3-6x^2+3x+10\right)}{(x-5)\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{x-5}{x+4}=$

$=\dfrac{x^3-6x^2+6x+12}{(x-5)\cdot(x+1)}\cdot\dfrac{x-5}{x+4}=\dfrac{x^3-6x^2+6x+12}{(x+1)\cdot(x+4)}=$

$=\dfrac{x^3-6x^2+6x+12}{x^2+5x+4}$

b) $\left(\dfrac{x\cdot(x+5)}{x+2}-\dfrac{x}{(x+2)\cdot(x-3)}\right):\dfrac{x-3}{(x+2)^2}=$

$=\left(\dfrac{x^2+5x}{x+2}-\dfrac{x}{(x+2)\cdot(x-3)}\right):\dfrac{x-3}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{\left(x^2+5x\right)\cdot(x-3)-x}{(x+2)\cdot(x-3)}:\dfrac{x-3}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{\left(x^3+2x^2-15x\right)-x}{(x+2)\cdot(x-3)}:\dfrac{x-3}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{x^3+2x^2-16x}{(x+2)\cdot(x-3)}:\dfrac{x-3}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{x^3+2x^2-16x}{(x+2)\cdot(x-3)}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x-3}=\dfrac{\left(x^3+2x^2-16x\right)\cdot(x+2)}{(x-3)^2}=$

$=\dfrac{x^4+4x^3-12x^2-32x}{x^2-6x+9}$

79. a) $(x+1)^2=x^2+2x+1;\;\; A(x)=x^2+2x+1$

b) Suma de x con el anterior a x:

$x+x-1=2x-1.$

$(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

Así, pues: $(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

c) Triple del número siguiente a x:

$3\cdot(x+1)=3x+3$. Se tiene:

$(x-1)\cdot(3x+3)=3x^2+3x-3x-3=3x^2-3;$

$C(x)=3x^2-3$

d) Cubo del número anterior a x:

$(x-1)^3=(x-1)^2\cdot(x-1)=(x^2-2x+1)\cdot(x-1)=$

$=x^3-2x^2+x-x^2+2x-1=$

$=x^3-3x^2+3x-1$

Se tiene:

$x^3-(x-1)^3=x^3-(x^3-3x^2+3x-1)=$

$=3x^2-3x+1;$

$D(x)=3x^2-3x+1$

80. Dividendo $=$ divisor $\cdot$ cociente $+$ resto $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ divisor $=\dfrac{\text{Dividendo}-\text{resto}}{\text{cociente}}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ divisor $=\dfrac{(3x^4-5x^3+6x^2+3x-2)-(12x-7)}{3x^2+x+5}$

$=\dfrac{3x^4-5x^3+6x^2-9x+5}{3x^2+x+5}$

Efectuamos esta división:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +6x^2 & -9x & +5 & 3x^2+x+5 \\
-3x^4 & -x^3 & -5x^2 & & & x^2-2x+1 \\
 & -6x^3 & +x^2 & -9x & & \\
 & 6x^3 & +2x^2 & +10x & & \\
 & & 3x^2 & +x & +5 & \\
 & & -3x^2 & -x & -5 & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

El divisor es x^2-2x+1

81. A través del teorema del resto, tenemos que:

$P(-2)=3\cdot(-2)^3+k\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-1=5$

$3\cdot(-8)+k\cdot4+5\cdot(-2)-1=5$

$-24+4k-10-1=5$

$4k=40$

$k=10$

82. El polinomio debe tener los factores $(x-3)$, $(x+1)$ y $(x-2)$:

$P(x)=(x-3)\,(x+1)\,(x-2)=$

$=x^3-4x^2+x+6$

83. Un polinomio de grado 2 será de la forma:

$P(x) = ax^2 + bx + c$

Como el coeficiente de x es nulo: $b = 0$

$P(1) = a + c = 3$

$P(2) = a \cdot 4 + c = 13$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+c=3 \\ 4a+c=13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrl} 4a & +c & = 13 \\ -a & -c & = -3 \\ \hline 3a & & = 10 \end{array} \qquad a = \frac{10}{3}$$

$$\begin{array}{rrl} 4a & +c & = 13 \\ -4a & -4c & = -12 \\ \hline & -3c & = 1 \end{array} \qquad b = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $P(x) = \frac{10}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.

84. Sea x el dinero que tiene el primer amigo. El dinero del segundo amigo es: $x^2 - 5x$

El dinero que tiene el tercer amigo es:

$$\left(\frac{x^2-5x}{10}\right)^2 = \frac{x^4-10x^3+25x^2}{100} =$$

$$= \frac{1}{100}x^4 - \frac{10}{100}x^3 + \frac{25}{100}x^2 =$$

$$= \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

La cantidad de dinero que podrán reunir expresada mediante un polinomio es:

$$D(x) = x + x^2 - 5x + \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 4x$$

Hallamos la cantidad de dinero que podrán reunir si el primer amigo dispone de 10 €:

$$x = 10 \Rightarrow D(10) = \frac{1}{100}\cdot 10^4 - \frac{1}{10}\cdot 10^3 +$$

$$+\frac{5}{4}\cdot 10^2 - 4\cdot 10 = 100 - 100 + 125 - 40 = 85$$

Podrán reunir 85 €.

85. Para expresar mediante un polinomio el área de la figura sombreada restaremos al área del rectángulo el área de los tres triángulos.

- Rectángulo:

  Base: $3x + 6x - 1 = 9x - 1$

  Altura: $x + 3 + x + 1 = 2x + 4$

  $A_{\text{rectángulo}} = (9x - 1) \cdot (2x + 4) = 18x^2 + 34x - 4$

- Triángulo 1 (triángulo inferior derecho):

  $$A_{\text{triángulo 1}} = \frac{(6x-1)\cdot(x+1)}{2} = 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

- Triángulo 2 (triángulo superior derecho):

  $$A_{\text{triángulo 2}} = \frac{6x\cdot(x+3)}{2} = 3x^2 + 9x$$

- Triángulo 3 (triángulo izquierdo):

  Cateto menor: $9x - 1 - 6x = 3x - 1$

  $$A_{\text{triángulo 3}} = \frac{(3x-1)\cdot(2x+4)}{2} = 3x^2 + 5x - 2$$

- Figura sombreada:

  $$A_{\text{figura}} = A_{\text{rectángulo}} - (A_{\text{triángulo 1}} + A_{\text{triángulo 2}} + A_{\text{triángulo 3}}) =$$

  $$= 18x^2 + 34x - 4 - \left(3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} + 3x^2 + 9x\right) -$$

  $$-(3x^2 + 5x - 2) = 18x^2 + 34x - 4 - 3x^2 - \frac{5}{2}x +$$

  $$+\frac{1}{2} - 3x^2 - 9x - 3x^2 - 5x + 2 = 9x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{2}$$

  El polinomio que expresa el área de la figura es

  $$A(x) = 9x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{2}$$

86. $a\cdot(x-1)(x+2) = a\cdot(x^2+2x-x-2) = ax^2 + ax - 2a$

$b\cdot(x+3) = bx + 3b$;

$ax^2 - ax - 2a + bx + 3b = ax^2 + (a+b)x - 2a + 3b$

$ax^2 + (a+b)x - 2a + 3b = 3x^2 + 8x + 9 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+3 = 8 \end{cases}$$

$3 + b = 8 \Rightarrow b = 5$

El valor de a es 3 y el valor de b es 5.

87. a)

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +6x^3 & -4x^2 & +ax & +b & x^2+6x-1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -6x^3 & +x^2 & & & x^2-3 \\ & & -3x^2 & +ax & +b & \\ & & 3x^2 & +18x & -3 & \\ \hline & & & (a+18)x & +(b-3) & \end{array}$$

$a + 18 = 0 \Rightarrow a = -18$

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

El valor de a es -18 y el de b es 3.

b) $a + 18 = 5 \Rightarrow a = 5 - 18 = -13$

$b - 3 = -1 \Rightarrow b = -1 + 3 = 2$

El valor de a es -13 y el de b es 2.

88. Por la primera condición, el polinomio que buscamos tendrá la forma:

$(x+3)\cdot(ax+b) = ax^2 + (3a+b)x + 3b$

Imponemos las otras dos condiciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + (3a+b) + 3b = 4 \\ 3b = 6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ b = 2 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es $a = 1$ y $b = 2$.

Por tanto, $P(x) = -x^2 - x + 6$

89. $$\left.\begin{array}{r} P(x)=\dfrac{1}{2}Q(x) \\ P(x)+Q(x)=12x^2+18x+3 \end{array}\right\}$$

Hacemos que cada término de $P(x)$ sea la mitad del término semejante de $Q(x)$.

$\dfrac{a}{2}+a=12 \Rightarrow a=8$

$\dfrac{b}{2}+b=18 \Rightarrow b=12$

$\dfrac{c}{2}+c=3 \Rightarrow c=2$

Los polinomios son $P(x)=4x^2+6x+1$ y $Q(x)=8x^2+12x+2$.

90. Llamando $B(x)$ al polinomio que indica el beneficio de la tienda:

$B(x) = I(x) - C(x) = 2x^2 - 200x + 3\,203$

Por tanto, si las ventas han sido de 820 artículos, el beneficio asciende a:

$B(820) = 2 \cdot 8202 - 200 \cdot 820 + 3\,203 = 1\,184\,003$ € de beneficio.

91. Calculamos el área del triángulo mayor:

$$A_M=\frac{(3x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{3}x\right)}{2}=\frac{(3x-2)\cdot\frac{4}{3}x}{2}=2x^2-\frac{4}{3}x$$

Calculamos el área del triángulo menor:

$$A_m=\frac{x\cdot(2x+1)}{2}=x^2+\frac{1}{2}x$$

El área de la figura será la suma de estas dos:

$$A=A_M+A_m=\left(2x^2-\frac{4}{3}x\right)+\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)=3x^2-\frac{5}{6}x$$

92. Calculamos el área de los dos triángulos superiores:

$$A_s=2\cdot\frac{(x+12)\cdot(2x-5)}{2}=2x^2+19x-60$$

Calculamos el área de los dos triángulos inferiores:

$$A_i=2\cdot\frac{(x+12)\cdot\left(\frac{1}{2}x+10\right)}{2}=\frac{1}{2}x^2+16x+120$$

El área de la figura será la suma de estas dos:

$$A=A_s+A_i=\left(2x^2+19x-60\right)+\left(\frac{1}{2}x^2+16x-120\right)=$$

$$=\frac{5}{2}x^2+35x+60$$

93. a) Grado: 4 término independiente: 7

b) Grado: 13 término independiente: 1

$P(2) = 2 \cdot 24 - 2 \cdot 23 - 3 \cdot 22 + 7 = 11$

$Q(-3) = -(-3)3 - 5(-3)2 - 3(-3) + 1 = 82$

94. a) $P(x) = 6x^4 + 3x^3 - 22x^2 + 3$ No es completo

b) $Q(x) = x^3 + 12x^2 - x + 6$ Es completo

c) $R(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ Es completo

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

1. a) $V(x)=x\cdot(x+5)\cdot(x+1)$

b) $A(x)=2\cdot x\cdot(x+1)+2\cdot x\cdot(x+5)+2\cdot(x+1)\cdot(x+5)=$

$=\left(2x^2+2x\right)+\left(2x^2+10x\right)+\left(2x^2+12x+10\right)=$

$=6x^2+24x+10$

c) $S(x)=2\cdot x+2\cdot(x+1)+2\cdot(x+5)=$

$=(2x)+(2x+2)+(2x+10)=6x+12$

d) Tenemos que el volumen del sólido es $V(15)=15^3+6\cdot 15^2+5\cdot 15=4800\,\text{cm}^3$.

Nota: También podemos utilizar el polinomio factorizado:

e) Su área total es:

$A(15)=6\cdot 15^2+24\cdot 15+10=1720\,\text{cm}^2$

f) La suma de sus aristas mide:

$S(15)=6\cdot 15+12=102\,\text{cm}$

2. a) $A_{\text{rectángulo}}(x)=(6x+4)\cdot(3x+9)=18x^2+66x+36$

b) La base mayor es $(6x+4)-2x=4x+4$.

c) La altura del trapecio es $\frac{1}{3}\cdot(3x+9)=x+3$.

d) El área del trapecio es:

$$A_{\text{trapecio}}=\frac{(2x)+(4x+4)}{2}\cdot(x+3)=\frac{6x+4}{2}\cdot(x+3)=$$

$=(3x+2)\cdot(x+3)=3x^2+11x+6$

e) $A_{\text{rojo}}(x) = A_{\text{rectángulo}}(x) - A_{\text{trapecio}} =$

$=\left(18x^2+66x+36\right)-\left(3x^2+11x+6\right)=$

$=\left(18x^2+66x+36\right)+\left(-3x^2-11x-6\right)=$

$=15x^2+55x+30$

f) Tenemos que $3x+9=30 \to 3x=21 \to x=\frac{21}{3}=7$.

El área de la pared roja es:

$A_{\text{rojo}}(7)=15\cdot 7^2+55\cdot 7+30=1\,150\,\text{dm}^2=11{,}5\,\text{m}^2$

3. a) $$c_2(x)=c\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=c\cdot\left(1+\frac{x}{50}+\frac{x^2}{10000}\right)=$$

$$=\frac{c}{10000}x^2+\frac{c}{50}x+c$$

b) $c_2(x) = \frac{10000}{10000}x^2 + \frac{10000}{50}x + 10000 = 11236$

Así,

$x^2 + 200x + 10000 = 11236$

$x^2 + 200x - 1236 = 0$

$x = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 + 4944}}{2}$

$x = \frac{-200 \pm \sqrt{44944}}{2}$

$x = \frac{-200 \pm 212}{2}$

$x = 6, x = -206$

Por tanto, el tipo de interés anual fue del 6 %.

c) El nuevo tipo de interés anual es de $6 \cdot 0{,}9 = 5{,}4\ \%$.

d) $c_2(5{,}4) = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5{,}4}{100}\right)^2 = 10000 \cdot (1 + 0{,}054)^2 =$

$= 10000 \cdot 1{,}054^2 = 10000 \cdot 1{,}110916 = 11109{,}16\ €$

e) La variación fue $\frac{11109{,}16}{11236} = 0{,}989$; es decir, el interés compuesto obtenido disminuyó 1,1 %.

4. a) $B(x) = V(x) - C(x) = 0{,}1x - (0{,}05x + 150) =$

$= 0{,}1x + (-0{,}05x - 150) = 0{,}05x - 150$

b) Tenemos que $B(2000) = 0{,}05 \cdot 2000 - 150 = -50$. Por tanto, no hay beneficio y sí una pérdida de 50 euros.

c) Tenemos que $0{,}05x - 150 = 0 \rightarrow 0{,}05x = 150 \rightarrow$ ∴

$x = \frac{150}{0{,}05} = 3000$

Cuando se fabrican 3 000 paquetes, no hay beneficio. La empresa debe fabricar, por lo menos, 3 001 paquetes para obtener beneficios.

d) La empresa tiene que fabricar $3001 \cdot 9 = 27009$ pañuelos.

e) Cada pañuelo tiene $21^2 = 441\ \text{cm}^2$.

f) La longitud es $\frac{1}{4} \cdot 21 = 5{,}25\ \text{cm}$ y el ancho es $\frac{1}{2} \cdot 21 = 10{,}5\ \text{cm}$. Por tanto, el área del pañuelo doblado es de $5{,}25 \cdot 10{,}5 = 55{,}125\ \text{cm}^2$.

5. a) $A_{\text{semicírculo menor}} = \frac{3{,}14x^2}{2} = 1{,}57x^2$

b) $A_{\text{semicírculo mayor}} = \frac{3{,}14(2x)^2}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 4x^2}{2} = 6{,}28x^2$

c) $V_{\text{semicírculo menor}} = 1{,}57x^2 \cdot (5x + 2) = 7{,}85x^3 + 3{,}14x^2$

d) $V_{\text{semicírculo mayor}} = 6{,}28x^2 \cdot (5x + 2) = 31{,}4x^3 + 12{,}56x^2$

e) El volumen del objeto viene determinado por el polinomio:

$V(x) = V_{\text{semicírculo mayor}}(x) - V_{\text{semicírculo menor}}(x) =$

$= \left(31{,}4x^3 + 12{,}56x^2\right) - \left(7{,}85x^3 + 3{,}14x^2\right) =$

$= \left(31{,}4x^3 + 12{,}56x^2\right) + \left(-7{,}85x^3 - 3{,}14x^2\right) =$

$= 23{,}55x^3 + 9{,}42x^2$

f) Tenemos que $5x + 2 = 32 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{5} = 6$.

Por tanto, el volumen del objeto es:

$V(6) = 23{,}55 \cdot 6^3 + 9{,}42 \cdot 6^2 = 23{,}55 \cdot 216 + 9{,}42 \cdot 36 =$

$= 5086{,}8 + 339{,}12 = 5425{,}92\ \text{cm}^3$

4. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES

1. $3x + \frac{x}{2} = 28 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 28 \Rightarrow x = 8$

2. a) $-2\ (3x - 3) = 4x - 12 + x - 4$

$-6x + 6 = 4x - 12 + x - 4$

$-6x - 4x - x = -12 - 4 - 6$

$-11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $12x - 4 - 3\ (6x - 2) = 6 - 3x + 11$

$12x - 4 - 18x + 6 = 6 - 3x + 11$

$12x - 18x + 3x = 6 + 11 + 4 - 6$

$-3x = 15 \Rightarrow x = -5$

c) $3x - 7\ (1 - 5x) = 4\ (2x - 9) + 1$

$3x - 7 + 35x = 8x - 36 + 1$

$3x + 35x - 8x = -36 + 1 + 7$

$30x = -28$

$x = \frac{-28}{30} = \frac{-14}{15}$

d) $10x - 2 + 2\ (5 - 9x) = 4\ (6x - 2)$

$10x - 2 + 10 - 18x = 24x - 8$

$10x - 18x - 24x = -8 + 2 - 10$

$-32x = -16$

$x = \frac{1}{2}$

e) $3\ (2x + 4) - x + 2 = 3x + 2\ (7 + x)$

$6x + 12 - x + 2 = 3x + 14 + 2x$

$0x = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

3. Respuesta abierta.