10. Geometría analítica en el plano

ACTIVIDADES

1. $|\overrightarrow{AB}|=3$; $|\overrightarrow{CD}|=3$; $|\overrightarrow{EF}|=3$;

$|\overrightarrow{GH}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$; $|\overrightarrow{IJ}|=3$;

$|\overrightarrow{KL}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$; $|\overrightarrow{MN}|=3$; $|\overrightarrow{OP}|=2$;

$|\overrightarrow{QR}|=2$; $|\overrightarrow{ST}|=3$

— Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{ST}$ tienen la misma dirección. Los vectores $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IJ}$ y $\overrightarrow{MN}$ tienen la misma dirección. Y, por último, los vectores $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{KL}$ tienen también la misma dirección.

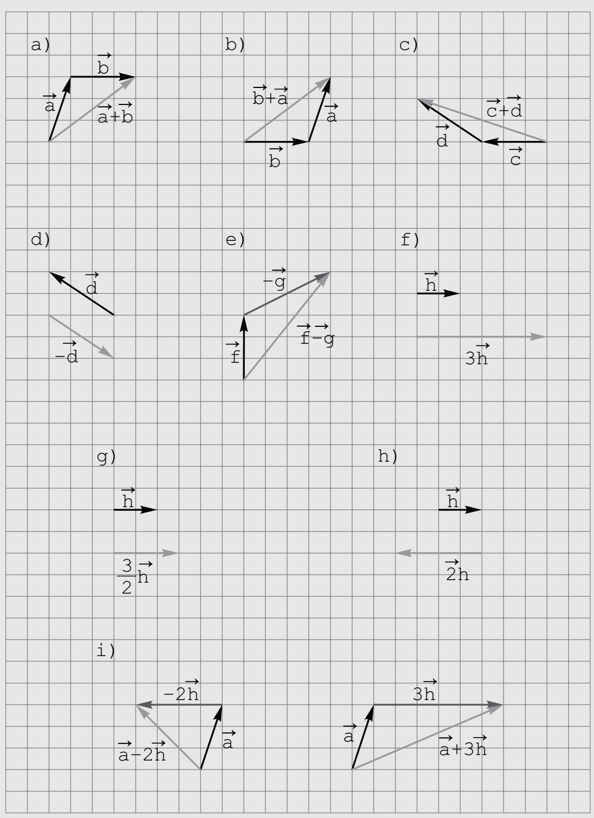
— Los vectores $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{MN}$ tienen la misma dirección y sentido contrario.

— Hay cuatro conjuntos de vectores equipolentes:

$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ST}\}$; $\{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{IJ}\}$; $\{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{KL}\}$; $\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{QR}\}$

2. Son falsas las afirmaciones b), d), e) y f).

3.



4. Es linealmente independiente el conjunto de vectores $\{\vec{a},\vec{b}\}$. El resto son conjuntos de vectores linealmente dependientes.

— El conjunto $\{\vec{a},\vec{b}\}$ es una base de V_2.

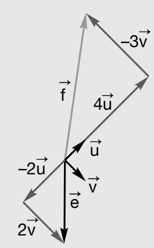
5. Primero expresamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ para poder escribir estos últimos vectorescomo combinación lineal de la base B dada:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}\\ \vec{v}=\vec{i}-\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{i}=\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2};\ \vec{j}=\frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}$$

Con estas dos expresiones y las de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ en términos de $\{\vec{i},\vec{j}\}$, se deducen sus componentes en la base B:

$$\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}=\frac{6}{2}(\vec{u}+\vec{v})+\frac{2}{2}(\vec{u}-\vec{v})=4\vec{u}+2\vec{v}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{a}=(4,2)$$
$$\vec{b}=-2\vec{i}+6\vec{j}=\frac{-2}{2}(\vec{u}+\vec{v})+\frac{6}{2}(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}-4\vec{v}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{b}=(2,-4)$$
$$\vec{c}=-2\vec{i}-3\vec{j}=\frac{-2}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\frac{3}{2}(\vec{u}-\vec{v})=$$
$$=\frac{-5}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\Rightarrow \vec{c}=\left(\frac{-5}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\vec{d}=6\vec{i}-2\vec{j}=\frac{6}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\frac{2}{2}(\vec{u}-\vec{v})=$$
$$=2\vec{u}+4\vec{v}\Rightarrow \vec{d}=(2,4)$$

— Podemos representar los vectores $\vec{e}$ y $\vec{f}$ sumando gráficamente sus respectivas combinaciones lineales en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; o bien calculando sus componentes en la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$:



$$\vec{e}=(-2,2)=2\vec{u}+2\vec{v}=-2(\vec{i}+\vec{j})+2(\vec{i}-\vec{j})=-4\vec{j}$$
$$\vec{f}=(4,-3)=4\vec{u}-3\vec{v}=4(\vec{i}+\vec{j})-3(\vec{i}-\vec{j})=\vec{i}+7\vec{j}$$

6. a) $\vec{u}+\vec{v}=(1,2)+(2,-1)=$
$=(1+2,2-1)=(3,1)$

b) $\vec{u}-\vec{v}=(1,2)-(2,-1)=$
$=(1-2,2+1)=(-1,3)$

7. a) $6\vec{u}=6(1,2)=(6,12)$

b) $3\vec{u}-\vec{v}=3(1,2)-(2,-1)=$
$=(3-2,6+1)=(1,7)$

—$(4,3)=K_1(1,2)+K_2(2,-1)$

$(4,3)=(K_1+2K_2,2K_1-K_2)$

$$\left.\begin{array}{l}4=K_1+2K_2\\ 3=2K_1-K_2\end{array}\right\}\Rightarrow K_1=2\ \text{y}\ K_2=1$$

$\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$

8. Las coordenadas de los distintos puntos son:

P(2,3); Q(6,6); S(8,2).

Los vectores en función de la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ son:

$\overrightarrow{OP}=(2,3)$; $\overrightarrow{OQ}=(6,6)$; $\overrightarrow{OS}=(8,2)$

9. $[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{OB}]-[\overrightarrow{OA}]=(1,2)-(2,-1)=(-1,3)$

— La distancia entre A y B es el módulo de $[\overrightarrow{AB}]$:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

Es decir, vale $\sqrt{10}$ unidades de longitud.

10. Buscamos la recta: $y=mx+b$

De las coordenadas de dos puntos de la recta se obtiene este sistema:

$$\left.\begin{array}{l}3=-3m+b\\1=3m+b\end{array}\right\}\Rightarrow b=2;\;\; m=-\frac{1}{3}$$

Por tanto, la recta es: $y=\frac{-1}{3}x+2$

11. La ecuación de la recta es: $y=2x+b$. El valor de b se halla de las coordenadas del punto P:

$-3=2\cdot 4+b\Rightarrow b=-11$

Por tanto, la recta es: $y=2x-11$

12. La pendiente vale: $m=\text{tg }45°=+1$, por lo que la ecuación de la recta es: $y=x+b$. El valor de b sehalla de las coordenadas del punto P:

$5=1\cdot(-3)+b\Rightarrow b=8$

Por tanto, la recta es: $y=x+8$

13. $m=\text{tg }135°=-1$

$y=mx+b=-x+b$

Si pasa por $P(-3,5)$:

$5=-1\cdot(-3)+b\Rightarrow b=2$

$y=-x+2$

14. De los puntos $P(10)$ y $Q(0,2)$ hallamos la pendiente de la recta:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{0-1}=-2$$

La ecuación de la recta es: $y=-2x+b$. El valor de b se halla de las coordenadas de uno de los puntos, por ejemplo, el Q:

$2=-2\cdot 0-b\Rightarrow b=2$

Por tanto, la recta es: $y=-2x+2$

15. El vector $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$ es vector director de la recta. También son vectores directores de la recta todos los vectores que tengan la misma dirección que $\vec{v}$. Es decir, todos los vectores que sean de la forma: $k\cdot(\vec{i}-\vec{j})$, donde k es un número real. Por tanto, los casos a) y c) corresponden a vectores directores de la recta dada, pero el caso b), no.

— Si ya se conoce un vector director de una recta, se pueden obtener diferentes vectores directores hallando vectores paralelos al primero, del mismo sentido o bien de sentido contrario.

16. Un vector director puede ser:

$\vec{u}=(3-(-1),1-2)=(4,-1)$

Otro vector director es, por ejemplo:

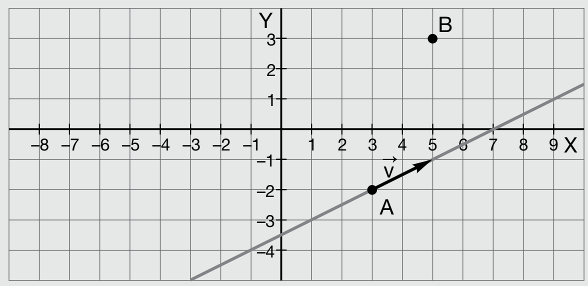
$\vec{u}=2\cdot(4,-1)=(8,-2)$

17. a) $m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{-2}{2}=-1$;

b) $m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{-2}{3}$;

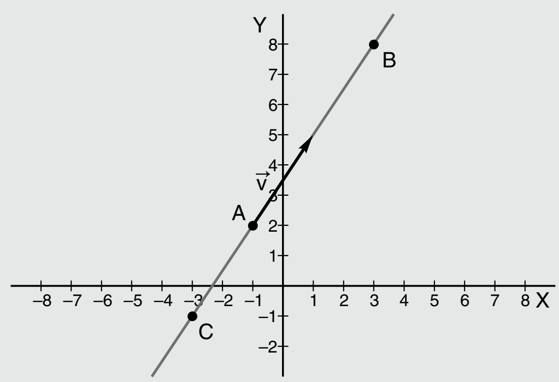
c) $m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{4}{2}=2$

18.



El punto B no pertenece a la recta.

19. a)



Otros dos puntos de la recta son, por ejemplo: B(3,8) y C(–3,–1)

b) $m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{2}$

c) La recta es: $y=\frac{3}{2}x+b$

A pertenece a la recta: $2=\frac{3}{2}\cdot(-1)+b\Rightarrow b=\frac{7}{2}$

La ecuación de la recta es: $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

20. Determinamos la pendiente a partir de las componentes del vector director:

$$m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{-2}{1}=-2$$

La recta es: $y=-2x+b$

A pertenece a la recta: $3=-2\cdot(-3)+b\Rightarrow b=-3$

La ecuación de la recta es: $y=-2x-3$

21. De la figura se obtiene: $A(-3,0)$ y $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$

Se deduce el valor de la pendiente: $m=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{1}{2}$

La recta es: $y=\dfrac{1}{2}x+b$

A pertenece a la recta: $0=\dfrac{1}{2}\cdot(-3)+b \Rightarrow b=\dfrac{3}{2}$

La ecuación de la recta es: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

22. a) $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \\ y=-2x-10 \end{array}\right\}$

$\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}=-2x-10 \Rightarrow \dfrac{5x}{2}=-\dfrac{15}{2} \Rightarrow x=-3$

Y la ordenada vale: $y=-2\cdot(-3)-10=-4$

Las rectas *r* y *s* son secantes y se cortan en el punto $(-3,-4)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 2y=4x-7 \\ y=2x+2 \end{array}\right\}$

$2\cdot(2x+2)=4x-7$

$4x+4=4x-7$

$0x=-11$

El sistema no tiene solución por lo que las rectas *r* y *s* son paralelas.

c) $\left.\begin{array}{l} y=-2x+1 \\ -3y=6x-3 \end{array}\right\}$

$-3\cdot(-2x+1)=6x-3$

$6x-3=6x-3$

$0x=0$

El sistema tiene infinitas soluciones por lo que las rectas *r* y *s* son coincidentes.

23. a) La ecuación de la recta dada equivale a la de la recta $r: 2y=-4x-4 \rightarrow y=-2x-2$. Por tanto, las dos rectas son coincidentes.

b) $\left.\begin{array}{l} y=-2x-2 \\ y=\dfrac{1}{2}x-2 \end{array}\right\}$

$-2x-2=\dfrac{1}{2}x-2$

$\dfrac{5}{2}x=0 \Rightarrow x=0;\quad y=-2\cdot 0-2=-2$

Las dos rectas son secantes y se cortan en el punto $(0,-2)$.

c) Como tienen la misma pendiente pero distinta ordenada en el origen, las restas son paralelas.

d) $\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{2}x+2 \\ y=-2x-2 \end{array}\right\}$

$-\dfrac{1}{2}x+2=-2x-2$

$\dfrac{3}{2}x=-4 \Rightarrow x=-\dfrac{8}{3};\ y=-2\cdot\left(\dfrac{-8}{3}\right)-2=\dfrac{10}{3}$

Las dos rectas son secantes y se cortan en el punto $\left(\dfrac{-8}{3},\dfrac{10}{3}\right)$.

24. Calculemos un vector director de la recta a partir de los dos puntos por los que pasa: $\vec{v}=(1,5)$

Ecuación vectorial: $(x,y)=(2,-1)+\lambda(1,5)\qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=-1+5\lambda \end{array}\right.\qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuación continua: $x-2=\dfrac{y+1}{5}$

Ecuación punto-pendiente: $y+1=5(x-2)$

Ecuación explícita: $y = 5x - 11$

Ecuación implícita: $-5x + y + 11 = 0$

Recta que pasa por dos puntos: $y+1=\dfrac{4+1}{3-2}(x-2)$

25. Necesitamos un vector director $\vec{v}=(1,2)$ y un punto $A(0,1)$. Con estos dos elementos:

Ecuación vectorial: $(x,y)=(0,1)+\lambda(1,2)\qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \end{array}\right.\qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuación continua: $x=\dfrac{y-1}{2}$

Ecuación punto-pendiente: $y-1=2x$

Ecuación explícita: $y = 2x + 11$

Buscamos un segundo punto que esté contenido en la recta a partir de cualquiera de las ecuaciones anteriores: $B(1,3)$

Recta que pasa por dos puntos: $y-1=\dfrac{3-1}{1-0}(x-0)$

26. A partir de la relación entre pendientes de rectas paralelas y perpendiculares y teniendo en cuenta que las rectas tienen que verificar las ecuaciones del punto exterior:

r: $2x - y + 6 = 0 \rightarrow m = 2$

Recta paralela: $y = 2x + b \rightarrow -1 = 4 + b \rightarrow b = -5 \rightarrow y = 2x - 5$

Recta perpendicular: $y = -1/2x + b \rightarrow -1 = -1 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow y = 2x$

27. Serán secantes si las pendientes son distintas.

r: $x + y - 2 = 0 \rightarrow m = -1$

s: $x - 2y + 4 = 0 \rightarrow m' = 1/2$

Para obtener el punto intersección resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Obtenemos el puntos $A(0,2)$.

28. $m_1 = \dfrac{p_1 + q_2}{2} = \dfrac{-5+7}{2} = 1$

$m_2 = \dfrac{p_2 + q_2}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$

Las coordenadas del punto medio son (1, 2).

29. Los puntos $M(x,y)$ y $N(x',y')$ verificarán que:

$$3 \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$3(x-1, y-0) = (4-1, 5-0) \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 3 \rightarrow x = 2 \\ 3y = 5 \rightarrow y = 5/3 \end{cases}$$

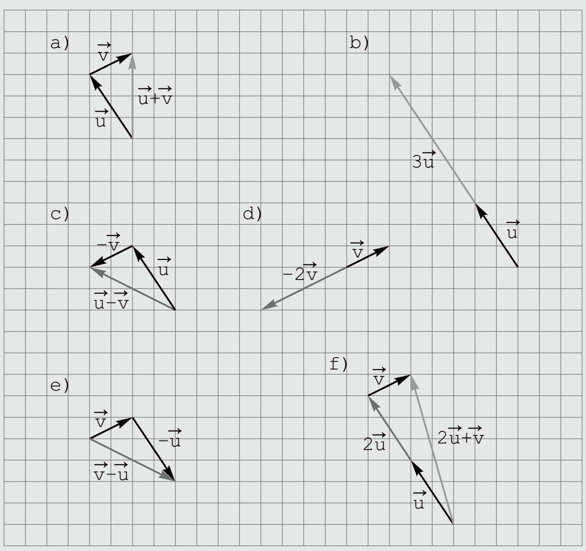
$M(2,5/3)$

$$3 \cdot \left|\overrightarrow{NB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$3(4-x', 5-y') = (3,5) \Rightarrow \begin{cases} 12 - 3x' = 3 \rightarrow x' = 3 \\ 15 - 3y' = 5 \rightarrow y' = 10/3 \end{cases}$$

$N(3,10/3)$

30.



31. a) $[\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DB}] = [\overrightarrow{AB}]$

b) $[\overrightarrow{AM}] - [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{BM}]$

c) $[\overrightarrow{AD}] - [\overrightarrow{AB}] - [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{CD}]$

d) $[\overrightarrow{AB}] + \dfrac{1}{2} \cdot [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AM}]$

32. Primero expresamos los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ 2\vec{v} = -2\vec{i} + 4\vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\vec{u} + 2\vec{v}}{5} = \vec{j} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right);$$

$$\vec{i} = 2\vec{j} - \vec{v} = \frac{2\vec{u} + 4\vec{v}}{5} - \vec{v} = \frac{2\vec{u} - \vec{v}}{5} = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

La expresión de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, se deduce de sus componentes en la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) +$$

$$+ 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}\right) = \frac{7}{5}\vec{u} + \frac{4}{5}\vec{v}$$

$$\vec{b} = -6\vec{i} + 4\vec{j} = -6 \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) +$$

$$+ 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}\right) = \frac{-8}{5}\vec{u} + \frac{14}{5}\vec{v}$$

$$\vec{c} = -6\vec{i} - 3\vec{j} = -6 \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) -$$

$$-3 \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}\right) = -3\vec{u}$$

$$\vec{d} = \vec{i} - 3\vec{j} = \left(\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) -$$

$$-3 \cdot \left(\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}\right) = \frac{-1}{5}\vec{u} - \frac{7}{5}\vec{v}$$

33. Primero expresamos los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} = \vec{i};\ \vec{j} = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}$$

Las componentes de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en la base B se deducen a partir de sus componentes en la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{a} = 6\vec{i} = 6 \cdot \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}\right) = 3\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{a} = (3,3)$$

$$\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4 \cdot \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}\right) =$$

$$= 3\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow \vec{b} = (3,1)$$

$$\vec{c} = +5\vec{i} + 2\vec{j} = -5 \cdot \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}\right) =$$

$$= \frac{-3}{2}\vec{u} - \frac{7}{2}\vec{v} \Rightarrow \vec{c} = \left(\frac{-3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$$

34. a) $\vec{r} + \vec{s} = (3,1) + (-2,2) = (1,3)$

b) $\vec{s} - 2\vec{r} = (-2,2) - 2(3,1) = (-8,0)$

c) $2\vec{r} - \vec{s} = 2(3,1) - (-2,2) = (8,0)$

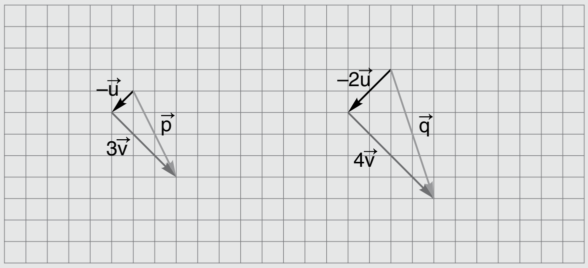
d) $-\dfrac{2}{3}\vec{r} = -\dfrac{2}{3}(3,1) = \left(-2, -\dfrac{2}{3}\right)$

e) $-\vec{r} - \vec{s} = -(3,1) - (-2,2) = (-1,-3)$

f) $3\vec{r} - \dfrac{1}{2}\vec{s} = 3(3,1) - \dfrac{1}{2}(-2,2) = (10,2)$

35. Representamos las componentes del vector $\vec{x}$ por:

$\vec{x} = (x_1, x_2)$



$3\vec{u} - 5\vec{v} + 2\cdot(\vec{w} - \vec{x}) = 2\vec{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\vec{u} - 5\vec{v} + 2\vec{w} - 2\vec{x} = 2\vec{v}$

$3\cdot(5,2) - 5\cdot(3,4) + 2\cdot(0,2) - 2\cdot(x_1, x_2) = 2\cdot(3,4) \Rightarrow$

$\Rightarrow (15, 6) - (15, 20) + (0, 4) - (2x_1, 2x_2) = (6, 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow (15 - 15 - 2x_1, 6 - 20 + 4 - 2x_2) = (6, 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2x_1, -10 - 2x_2) = (6, 8) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -2x_1 = 6 \\ -10 - 2x_2 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \dfrac{6}{-2} = -3 \\ -2x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = \dfrac{18}{-2} = -9 \end{matrix}$$

Las componentes de $\vec{x}$ son: $\vec{x} = (-3, -9)$.

36. a) (13,3);

b) (3,13);

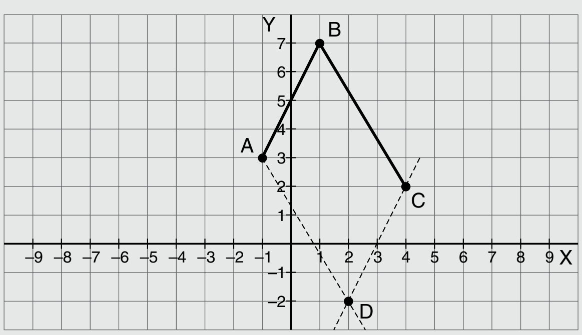
c) Sean $\vec{i}\,'$ y $\vec{j}\,'$ dos vectores unitarios de dirección los ejes de coordenadas y con origen en Q. Tenemos:

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = 2\vec{i}\,' \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}\,' \end{matrix}\right\} \vec{j}\,' = \frac{\vec{v} - \vec{u}}{2};\ \vec{i}\,' = \frac{\vec{u}}{2}$$

$$QP = 5\vec{i}\,' + 3\vec{j}\,' = 5\cdot\frac{1}{2}\vec{u} + 3\cdot\left(\frac{-\vec{u} + \vec{v}}{2}\right) = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

Por tanto, las coordenadas de P son: $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

37.



Sean (d_1, d_2) las coordenadas del punto D. Si los puntos A, B, C y D son los vértices correlativos de un paralelogramo, las componentes del vector $\overrightarrow{BC}$ tienen que coincidir con las del vector $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BC} = (4 - 1, 2 - 7) = (3, -5)$

$\overrightarrow{AD} = (d_1 - (-1),\ d_2 - 3) = (d_1 + 1, d_2 - 3)$

Igualando componentes:

$3 = d_1 + 1 \Rightarrow d_1 = 2$

$-5 = d_2 - 3 \Rightarrow d_2 = -2$

Así pues, el punto es el $D(2, -2)$

38. $d(A,D) = \sqrt{(5-1)^2 + (m-3)^2}$

$\sqrt{(5-1)^2 + (m-3)^2} = 5$

$16 + m^2 - 6m + 9 = 25$

$m^2 - 6m = 0$

$m(m - 6) = 0 \Rightarrow m_1 = 0;\ m_2 = 6$

Los posibles valores de m son 0 y 6.

39. a) $[\overrightarrow{AB}] = (8 - 1, 2 - 1) = (7, 1);$

$[\overrightarrow{BC}] = (4 - 8, 4 - 2) = (-4, 2);$

$[\overrightarrow{CA}] = (1 - 4, 1 - 4) = (-3, -3)$

b) $d(A,B) = \sqrt{(8-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$d(B,C) = \sqrt{(4-8)^2 + (4-2)^2} =$

$= \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(C,A) = \sqrt{(1-4)^2 + (1-4)^2} =$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

El perímetro del triángulo es $8\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ unidades.

40. a) Las coordenadas de los vértices del paralelogramo son $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$ y $D(1, 4)$.

b) $d(A,C) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

La longitud de la diagonal del paralelogramo es $\sqrt{20}$ unidades.

41. $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{3 + 9}{2} = 6;$

$m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$

El punto medio del segmento AB es el (6,3).

42. Representamos las coordenadas del otro extremo del segmento por $B(b_1, b_2)$. Se cumple:

$[\overrightarrow{AB}] = 2\cdot[\overrightarrow{AM}]$

$(b_1 - 1, b_2 - 5) = 2\cdot(3 - 1, 8 - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (b_1 - 1, b_2 - 5) = 2\cdot(2,3) \Rightarrow (b_1 - 1, b_2 - 5) = (4,6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 - 1 = 4 \\ b_2 - 5 = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_1 = 4 + 1 = 5;\ b_2 = 6 + 5 = 11$$

Las coordenadas del otro extremo del segmento son $B(5, 11)$.

43. La relación entre rectas, pendientes y puntos es:

recta	pendiente	punto
$x - y = 0$	1	B(0,0)
$2x - 3y - 6 = 0$	–2/3	A(0,2)
$y = 3x + 4$	3	C(–1,1)
$y = -2x + 11$	–2	D(1,9)

44. Respuesta sugerida: $A(0,-3)$, $B(1,-5)$, $C(-3/2,0)$, $D(-2,1)$

45. $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\}$

$\frac{x}{2} - 2 = -x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2;\ y = -2 + 1 = -1$

El punto de corte es el (2,–1).

46. a) Representamos por $D(d_1, d_2)$ las coordenadas del vértice D.

$[\overrightarrow{BC}] = (3 - 0, 0 - (-3)) = (3,3)$

$[\overrightarrow{AD}] = (d_1 - (-3), d_2 - 0) = (d_1 + 3, d_2)$

Al ser los lados de los cuadrados de igual longitud:

$(d_1 + 3, d_2) = (3,3) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_1 + 3 = 3; d_1 = 0 \\ d_2 = 3 \end{array}\right\}$

Las coordenadas del vértice D son $D(0, 3)$.

b) **Recta *AB*:**

$m = \frac{-3 - 0}{0 - (-3)} = \frac{-3}{3} = -1$

$y = -x + b$

La recta pasa por $A(-3,0)$. Por tanto:

$0 = -(-3) + b \Rightarrow\ b = -3$

La ecuación de la recta AB es: $y = -x + 3$.

Recta *CD*:

Tiene la misma pendiente que la recta AB: $m = -1$. Por tanto: $y = -x + b$

Además, la recta pasa por el punto $C(3,0)$:

$0 = -3 + b \Rightarrow\ b = 3$

La ecuación de la recta CD es: $y = -x + 3$.

Recta *BC*:

$m = \frac{0 - (-3)}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$

$y = x + b$

La recta pasa por $B(0,-3)$. Por tanto:

$-3 = 0 + b \Rightarrow\ b = -3$

La ecuación de la recta BC es: $y = x + 3$.

Recta *DA*:

Tiene la misma pendiente que la recta BC: $m = 1$. Por tanto: $y = x + b$

Además, la recta pasa por el punto $D(0,3)$:

$3 = 0 + b \Rightarrow\ b = 3$

La ecuación de la recta DA es: $y = x + 3$.

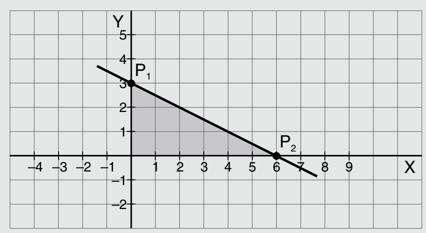
47. Primero hallamos los puntos de corte de la recta $y = -\frac{1}{2}x + 3$ con los ejes:

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow P_1 = (0, 3)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -x + 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow P_2 = (6, 0)$

El triángulo formado es:



Su área vale: $A = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ unidades cuadradas.

48. La relación que se establece es:

a - 2; b - 3; c - 4; d - 1

49. $3x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$

La recta paralela tendrá la misma pendiente:

$y = \frac{3}{2}x + n$

Se impone el punto:

$-1 = \frac{3}{2} \cdot 1 + n \Rightarrow n = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

50. $\left.\begin{array}{r} y = 2x + 3 \\ y = -2x + 3 \\ 2y = 10x + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 3 = -2x + 3 \Rightarrow x = 0;$

$y = 3 \Rightarrow$ Secantes

Punto de intersección (0, 3).

$\left.\begin{array}{r} y = -2x + 2 \\ y = -2x - 2 \\ \frac{y}{2} = -x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 2 = -2x - 2 \Rightarrow\ 2 = -2 \Rightarrow$ Parale-las

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{10}x - \frac{4}{5} \\ y = -\frac{1}{10}x - \frac{4}{5} \\ y = -\frac{1}{10}x - \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Coincidentes

51. Escribimos la ecuación de cada recta en la forma: $y = mx + b$ para poder comparar los respectivos valores de pendiente y ordenada en el origen:

— Recta p: $y = x + 0$

— Recta q: $y = x + 2$

— Recta r: $y = x + 2$

— Recta s: $y = x + 3$

- Rectas coincidentes:

  Las rectas q y r son coincidentes ya que tienen la misma ecuación. Son las únicas rectas coincidentes porque son las únicas con iguales valores de pendiente y ordenada en el origen.

- Rectas paralelas:

  Las rectas p y q son paralelas ya que $m = m' = 1$ y $0 \neq 2 \Rightarrow b \neq b'$. Del mismo modo, las rectas p y r son paralelas.

- Rectas secantes:

  Las rectas p y s son secantes ya que:

  $1 \neq -1 \Rightarrow m \neq m'$.

  Las rectas q y s son secantes ya que

  $1 \neq -1 \Rightarrow m \neq m'$.

  Del mismo modo, las rectas r y s son secantes.

52. Respuesta gráfica.

53. El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(1-2, 5-(-3)\right) = (-1{,}8)$.

Así, la ecuación vectorial de la recta es:

$(x,y) = (2,-3) + \lambda(-1{,}8)$

54. El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0-6, -7-2) = (-6,-9)$.

Así, la ecuación vectorial de la recta es:

$(x,y) = (0,-7) + \lambda(-6,-9)$

Igualando $\lambda = 1$ y sustituyendo en la ecuación de arriba, obtenemos el punto $C = (0,-7) + (-6,-9) = (-6,-16)$.

55. El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(3-(-3), -2-2\right) = (6,-4)$.

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 + 6\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

56. Como $A(-5,-4)$ y $B(4,-1)$, el vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(4-(-5), -1-(-4)\right) = (9,3)$.

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -5 + 9\lambda \\ y = -4 + 3\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

57. La ecuación continua es:

$$\frac{x-10}{-2} = \frac{y-(-3)}{4} \Rightarrow \frac{x-10}{-2} = \frac{y+3}{4}$$

58. La ecuación continua es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{5-x}{2} \\ t = \dfrac{y+1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5-x}{2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{-2} = \frac{y+1}{3}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto (–1,7) en la ecuación continua:

$$\frac{-1-5}{-2} = \frac{7+1}{3} \Rightarrow \frac{-6}{-2} = \frac{8}{3} \Rightarrow 3 = \frac{8}{3}$$

Esta igualdad no se cumple. Por tanto, el punto (–1,7) no pertenece a la recta.

59. La pendiente es $m = \frac{4}{-1} = -4$.

Así, su ecuación punto-pendiente es

$$y - (-5) = -4\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow y + 5 = -4\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

60. La pendiente de la recta es $m = \frac{10}{-2} = -5$.

Así, tenemos que la ecuación explícita de la recta es:

$$y - (-1) = -5\left(x - \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \Rightarrow y + 1 = -5\left(x + \frac{3}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = -5x - 3 \Rightarrow y = -5x - 4$$

61. La ecuación general de la recta es:

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-5}{2} \Rightarrow 2(x+3) = -4(y-5) \Rightarrow$$

$$2x + 6 = -4y + 20 \Rightarrow 2x + 4y - 14 = 0$$

62. Tenemos que $A(-2,2)$ y $B(5,-2)$.

Así, la ecuación de dos puntos de la recta AB es:

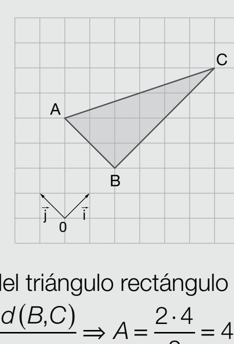
$$\frac{x-(-2)}{5-2} = \frac{y-2}{-2-2} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 8 = 3y - 6 \Rightarrow -4x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 2 = 0$$

63. Respuesta abierta.

64. Por ejemplo, sea $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ el sistema de referencia que está representado en la siguiente gráfica:



Así, el área del triángulo rectángulo es:

$$A = \frac{d(A,B) \cdot d(B,C)}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ unidades cuadradas.}$$

65. Tenemos que $C=\left(-\frac{7}{2},2\right)$ y que el perímetro es

$P=2\pi r=2\pi\cdot\frac{5}{2}=5\pi=15{,}7$ cm.

66. a) $d(A,B)=\sqrt{(5-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$

La distancia que ha recorrido es $\sqrt{45}$ unidades.

b) Representamos por $P(p_1, p_2)$ y por $Q(q_1, q_2)$ los puntos en los que se para.

$[\overrightarrow{AB}]=3\cdot[\overrightarrow{AP}]$

$(5-2,7-1)=3\cdot(p_1-2,p_2-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow(3,6)=(3p_1-6,3p_2-3)\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}3=3p_1-6\\6=3p_2-3\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}-3p_1=-9\Rightarrow p_1=\frac{-9}{-3}=3\\-3p_2=-9\Rightarrow p_2=\frac{-9}{-3}=3\end{array}$$

Uno de los puntos en que se para es el $P(3,3)$.

$[\overrightarrow{AB}]=\frac{3}{2}\cdot[\overrightarrow{AQ}]$

$(5-2,7-1)=\frac{3}{2}\cdot(q_1-2,q_2-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow(3,6)=(\frac{3}{2}q_1-3,\frac{3}{2}q_2-\frac{3}{2})\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}3=\frac{3}{2}q_1-3\\6=\frac{3}{2}q_2-\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}6=3q_1-6\Rightarrow q_1=\frac{-12}{-3}=4\\12=3q_2-3\Rightarrow q_2=\frac{-15}{-3}=5\end{array}$$

El otro punto en que se para es el $Q(4, 5)$.

67. • Ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1,-2)$ y $C(6,5)$:

$m=\frac{5-(-2)}{6-(-1)}=1$

$y=x+b$

La recta pasa por $A(-1,-2)$. Por tanto:

$-2=-1+b\Rightarrow b=-1$

La ecuación de la recta AC es: $y=x-1$.

• Ecuación de la recta que pasa por los puntos y $B(5,-2)$ y $D(2,4)$:

$m=\frac{4-(-2)}{2-5}=\frac{6}{-3}=-2$

$y=-2x+b$

La recta pasa por $B(5,-2)$. Por tanto:

$-2=-2\cdot5+b\Rightarrow b=8$

La ecuación de la recta BD es: $y=-2x+8$.

• Punto donde se cortan las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}y=x-1\\y=-2x+8\end{array}\right\}$$

$x-1=-2x+8\Rightarrow$

$\Rightarrow3x=9\Rightarrow x=3;\ y=3-1=2$

En este sistema de referencia, las coordenadas del punto de corte de las dos carreteras son: $P(3, 2)$

68. Representamos por $P(x, y)$ el punto en que se detiene. Puesto que este punto se halla sobre la recta $y=x$, y podemos representarlo como $P(x, x)$.

$d(A, P)=d(B, P)$

$\sqrt{(x-1)^2+(x-4)^2}=\sqrt{(x-4^2+(x-7)^2}$

$(x-1)^2+(x-4)^2=(x-4)^2+(x-7)^2$

$(x-1)^2=(x-7)^2\Rightarrow x^2-2x+1=$

$=x^2-14x+49\Rightarrow-2x+14x=49-1\Rightarrow$

$x=\frac{48}{12}=4$

El excursionista se detiene en el punto $P(4, 4)$.

69. a) $\vec{f}_1+\vec{f}_2=(2,3)+(3,-4)=(5,-1)$

b) Para que la fuerza resultante tenga la dirección del canal, la componente de f_2 en la dirección perpendicular a la del canal tiene que ser opuesta a la correspondiente componente de f_1. Es decir, tiene que valer –3 en vez de –4:

$\vec{f}_2{}'=(3,-3)$

Entonces: $\vec{f}_1+\vec{f}_2{}'=(2,3)+(3,-3)=(5,0)$

70. Primero, hallamos la ecuación explícita de la recta AB:

$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-2}{6-2}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{4}\Rightarrow4x-8=2y-4\Rightarrow$

$2y=4x-4\Rightarrow y=2x-2$

Ahora, tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}y=2x-2\\y=-x+8\end{array}\right\}\Rightarrow2x-2=-x+8\Rightarrow3x=10\Rightarrow$$

$x=\frac{10}{3}\Rightarrow y=-\frac{10}{3}+8=\frac{14}{3}$

Por tanto, el punto de intersección de las dos rectas es $\left(\frac{10}{3},\frac{14}{3}\right)$.

71. La ecuación explicita de la recta AA' es:

$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-1}{-1-1}\Rightarrow\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-2}\Rightarrow x-2=y-1\Rightarrow y=x-1$

La ecuación de la recta BB' es $x=4$.

Así, el centro de la homotecia es el punto de intersección de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l}y=x-1\\x=4\end{array}\right\}\Rightarrow y=4-1=3$$

Por tanto, el centro de la homotecia es (4,3).

72. Sea $M(m_1, m_2)$ el punto buscado. Dado que está alineado con P y Q, el punto M pertenece a la recta r que contiene a P y Q.

— recta r:

$$m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

La recta pasa por $Q(-2, 2)$. Por tanto:

$$2 = \frac{1}{2}\cdot(-2) + b \Rightarrow b = 3.$$

La recta r es: $y = \frac{1}{2}x + 3.$

En consecuencia, las coordenadas de M están relacionadas según: $m_2 = \frac{1}{2}m_1 + 3$

Imponemos la condición que: $|\overrightarrow{MQ}| = 3\cdot|\overrightarrow{MP}|$

$$\sqrt{(m_1 - (-2))^2 + (m_2 - 2)^2} =$$
$$= 3\cdot\sqrt{(m_1 - 6)^2 + (m_2 - 6)^2}$$
$$(m_1 + 2)^2 + \left(\frac{m_1}{2} + 3 - 2\right)^2 =$$
$$= 9\cdot\left[(m_1 - 6)^2 + \left(\frac{m_1}{2} + 3 - 6\right)^2\right]$$
$$m_1^2 + 4m_1 + 4 + \frac{m_1^2}{4} + m_1 - 1 =$$
$$= 9\cdot\left(m_1^2 - 12m_1 + 36 + \frac{m_1^2}{4} - 3m_1 + 9\right)$$
$$\frac{5}{4}m_1^2 + 5m_1 + 5 = 9\cdot\frac{5}{4}m_1^2 - 9\cdot 15m_1 + 9\cdot 45$$
$$m_1^2 - 14m_1 + 40 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_1 = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 40}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2}$$

Hay dos posibles valores para m_1: $m_1 = 10$ y $m_1' = 10$ y que dan lugar, respectivamentente a: $m_2 = \frac{10}{2} + 3 = 8$ y $m_2' = \frac{4}{2} + 3 = 5.$

Por tanto, hay dos puntos que satisfacen la condición del enunciado: M(10,8) y M' (4,5)

73. a) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

b) $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{e} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{f} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

c) En el espacio, una base tiene tres, y sólo tres, vectores.

74.
$$\left.\begin{array}{c} y = x + 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2 + (x+1-2)^2 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (x-1)^2 = 2 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$$

Sustituimos en la recta y obtenemos los puntos (0,1) y (2,3)

75. $(4-1)^2 + (a-1)^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + (a-1)^2 = 25 \Rightarrow$

$$a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Si $a = 5 \Rightarrow m_1 = \frac{5-1}{4-1} = \frac{4}{3}$

Si $a = -3 \Rightarrow m_2 = \frac{-3-1}{4-1} = -\frac{4}{3}$

76. La primera recta es paralela al eje de ordenadas y, por tanto, su pendiente es 0.

Las tres rectas juntas dividen los 360º en seis ángulos iguales de 60º. Así:

r: 0 ° → $m_r = 0$; s: 60 ° → $m_s = 1{,}73$; t: 120 ° → → $m_t = -1{,}73$

77. Recta 1:

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1 x + n_1 \Rightarrow 3 = m_1 + n_1 \\ m_1 = tg\ 45º = 1 \end{array}\right\}$$

$$3 = 1 + n_1 \Rightarrow n_1 = 2 \Rightarrow y = x + 2$$

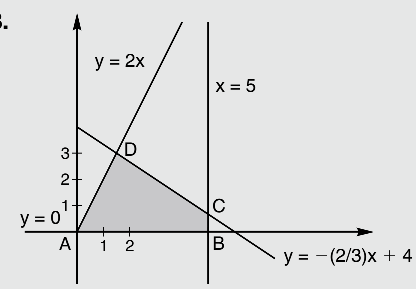
Recta 2

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1 \Rightarrow y = -x + n_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 = -(-3) + n_2 \Rightarrow n_2 = -6 \Rightarrow y = -x - 6$$

Punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 2 \\ y = -x - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -4;\ y = -2$$

78.



$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow A = (0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow B = (5, 0)$$

$$\left.\begin{array}{c} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow C = \left(5, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow D = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

$$AB = (5, 0);\quad BC = \left(0, \frac{2}{3}\right);\quad CD = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{3}\right);$$

$$AB = \left(-\frac{2}{3}, -3\right)$$

79. La tensión T se puede descomponer en dos fuerzas Ty y Tx, vertical y horizontal, respectivamente. Entonces: $2 \cdot Ty = P$ y, por tanto, $Ty = 1\,000$ N.

Y por trigonometría: $\text{sen } 30° = \dfrac{Ty}{T} \Rightarrow T = 2\,000\ N$

80. La recta que contiene la hipotenusa es el eje de abscisas: $y = 0$

Recta del cateto largo:

— Pendiente = $m_1 = \text{tg } 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

— Corta el punto (0, 0):

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + n_1 \Rightarrow n_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Recta del cateto corto:

Se puede ver que la pendiente es perpendicular a la pendiente de la recta del cateto largo:

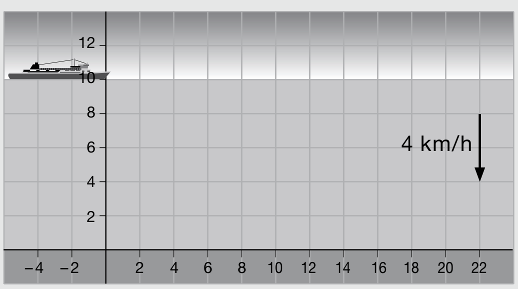
$$m_2 = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3}$$

Falta un punto de corte. Calculamos la longitud de la hipotenusa:

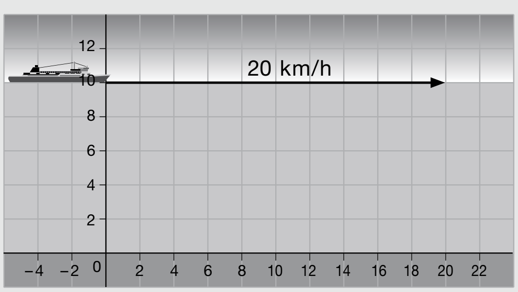
$\text{sen } 30° = \dfrac{2}{h} \Rightarrow h = \dfrac{2}{\text{sen } 30°} = 4 \Rightarrow$ La recta corta el punto (4, 0).

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

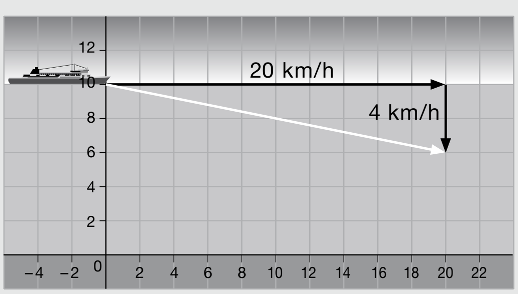
1. a)



b)



c)



El vector suma representa el recorrido del barco debido a las corrientes.

d) Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 20^2 + 4^2 \Rightarrow h^2 = 400 + 16 \Rightarrow h^2 = 416 \Rightarrow$$
$$h = \sqrt{416} \Rightarrow h = 20{,}4\text{km}$$

Por tanto, la embarcación recorrió 20,4 km.

e) El barco se encuentra a 10 – 4 = 6 km de la costa.

2. a) El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (9-0;0{,}1-1) = (9;-0{,}9)$.

Así, la ecuación vectorial de la recta AB es:

$$(x, y) = (0{,}1) + \lambda(9, -0{,}9) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El vector director es $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (13-9{,}1-0{,}1) = (4{,}0{,}9)$.

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 9 + 4\lambda \\ y = 0{,}1 + 0{,}9\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Han transcurrido 9 horas.

d) La batería ha sido cargada de nuevo.

e) Pasarán 12 – 9 = 3 h para que la batería vuelva a estar nuevamente cargada al 100 %.

3. a) $O_2 = 8\vec{i_1} - 3\vec{j_1}$.

b) $O_1 = 8\vec{i_2} + 3\vec{j_2}$.

c) Por medio de una regla de tres y llamando x al tiempo que el tren quedó a llegar en segundos, $x = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$ s.

d) La vía dista de la estación 3 m.

e) $O_3 = -\vec{i_2} + 3\vec{j_2}$.

4. a) $A(12{,}5;5{,}5)$ y $B(2{,}5;2{,}5)$.

Por tanto, la ecuación explícita de la recta AB es:

$$\frac{x-12{,}5}{2{,}5-12{,}5} = \frac{y-5{,}5}{2{,}5-5{,}5} \Rightarrow \frac{x-12{,}5}{-10} = \frac{y-5{,}5}{-3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x + 37{,}5 = -10y + 55 \Rightarrow -3x - 17{,}5 = -10y$$
$$\Rightarrow y = 0{,}3x + 1{,}75$$

b) $D(4{,}4)$ y $E(7{,}5;7)$.

Por tanto, la ecuación implícita de la recta DE es:

$$\frac{x-4}{7{,}5-4} = \frac{y-4}{7-4} \Rightarrow \frac{x-4}{3{,}5} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 12 = 3{,}5y - 14 \Rightarrow 3x - 3{,}5y + 2 = 0$$

c) El punto de encuentro es la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}3x + 1{,}75 \\ 3x - 3{,}5y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - 3{,}5(0{,}3x + 1{,}75) + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 1{,}05x - 6{,}125 + 2 = 0 \Rightarrow 1{,}95x - 4{,}125 = 0$$
$$\Rightarrow x = 2{,}12 \Rightarrow y = 0{,}3 \cdot 2{,}12 + 1{,}75 \Rightarrow y = 2{,}39$$

Por tanto, $C(2{,}12;2{,}39)$.

d) $d(C,D)=\sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2}=$

$=\sqrt{(4-2{,}12)^2+(4-2{,}39)^2}=\sqrt{1{,}88^2+1{,}61^2}=$

$=\sqrt{3{,}53+2{,}59}=\sqrt{6{,}12}=2{,}47$ cm

Aplicando una regla de tres y llamando x a la distancia real en centímetros:

$x=2{,}47\cdot 5\,000=12350$ cm $=123{,}5$ m.

e) Por el teorema de Pitágoras:

$|\overline{DE}|^2=3{,}5^2+3^2\Rightarrow|\overline{DE}|^2=12{,}25+9\Rightarrow$

$\Rightarrow|\overline{DE}|^2=21{,}25\Rightarrow|\overline{DE}|=\sqrt{21{,}25}=4{,}6$ cm

Con una regla de tres y llamando x a la distancia real en centímetros: $x=4{,}6\cdot 5000=23000$ cm $=230$ m.

5. a) $v_{0x}=20\cos 60°=10$ y $v_{0y}=20\operatorname{sen} 60°=17{,}32$

b) $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0x}t+y_0=-\frac{1}{2}\cdot 9{,}8t^2+10t+1{,}8=$

$=-4{,}9t^2+10t+1{,}8$

c) El tiempo de vuelo de la pelota es el tiempo hasta que llega al suelo, esto es, hasta que $y=0$. Así:

$-4{,}9t^2+10t+1{,}8=0\Rightarrow 4{,}9t^2-10t-1{,}8=0\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{10^2+35{,}28}}{9{,}8}\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{100+35{,}28}}{9{,}8}\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{135{,}28}}{9{,}8}\Rightarrow t=\frac{10\pm 11{,}63}{9{,}8}\Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{21{,}63}{9{,}8}=2{,}2$ s

d) El balón alcanza la altura máxima en

$v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2+y_0=17{,}32\cdot 1{,}1-\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\cdot 1{,}1^2+1{,}8=$

$=14{,}92$ m

e) La pelota recorrió $v_{0x}t=10\cdot 2{,}2=22$ m.

11. Estadística

ACTIVIDADES

1. Población: todos los alumnos del centro en cuestión.

Variable estadística: videojuegos preferidos.

En este caso la representatividad de la muestra es de 10 personas por aula, escogidas al azar.

2. Hallamos el número de alumnos de ESO de la ciudad: 1 300 + 1 250 + 1 100 + 1 350 = 5 000

Representamos por n_1, n_2, n_3 y n_4 el número de alumnos de 1.º ESO, 2.º ESO, 3.º ESO y 4.º ESO respectivamente, que deben formar la muestra.

$\frac{n_1}{1300}=\frac{300}{5\,000}\Rightarrow n_1=\frac{1300\cdot 300}{5\,000}=78$

$\frac{n_2}{1250}=\frac{300}{5\,000}\Rightarrow n_2=\frac{1250\cdot 300}{5\,000}=75$

$\frac{n_3}{1100}=\frac{300}{5\,000}\Rightarrow n_3=\frac{1100\cdot 300}{5\,000}=66$

$\frac{n_4}{1350}=\frac{300}{5\,000}\Rightarrow n_4=\frac{1350\cdot 300}{5\,000}=81$

3.

Número de hermanos	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia relativa (f_i)	Frecuencia absoluta acumulada (N_i)	Frecuencia relativa acumulada (F_i)
1	4	0,16	4	0,16
2	12	0,48	16	0,64
3	6	0,24	22	0,88
4	2	0,08	24	0,96
5	1	0,04	25	1
	$\sum n_i=25$	$\sum f_i=1$		

4.

Número de hermanos	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0,08	2	0,08
1	8	0,32	10	0,40
2	10	0,4	20	0,80
3	4	0,16	24	0,9
4	1	0,04	25	1
	$\sum n_i=25$	$\sum f_i=1$		

5.

Temperatura mínima	Marca de clase	n_i	f_i	N_i	F_i
[0,2)	1	5	0,1876	5	0,1876
[2,4)	3	12	0,4286	17	0,6071
[4,6)	5	6	0,2143	23	0,8214
[6,8)	7	3	0,1071	26	0,9286
[8,10)	9	2	0,0714	28	1

6.

t (min)	Marca de clase	n_i	f_i	N_i	F_i
[0,5)	2,5	10	0,4	10	0,4
[5,10)	7,5	9	0,36	19	0,76
[10,15)	12,5	3	0,12	22	0,88
[15,20)	17,5	1	0,04	23	0,92
[20,25)	22,5	2	0,08	25	1
		$\sum n_i=25$	$\sum f_i=1$		