PÁGINA 122

PRACTICA

Sistemas lineales

1 Comprueba si el par (3, –1) es solución de alguno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \ \ x - 2y = 5 \\ 4x + \ \ y = 8 \end{cases}$

El par (3, –1) es solución de un sistema si al sustituir x por 3 e y por –1, se verifican ambas igualdades:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{array}\right\} \rightarrow$ (3, –1) es solución del sistema.

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 4x + \ \ y = 8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{array}\right\}$

La segunda ecuación no se cumple para $x = 3$, $y = -1$. El par (3, –1) no es solución de este sistema.

2 Completa para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:

a) $\begin{cases} \ \ x - 3y = \dots \\ 2x + \ \ y = \dots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \ \ y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \ \ \ y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = \dots \\ 2x + \ \ y = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

Así, $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + \ \ y = 0 \end{cases}$ es el sistema buscado.

b) $\left.\begin{array}{l} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{array}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

El sistema que tiene como solución $x = -1$, $y = 2$ es: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = \dots \\ \dots + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \ \rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} 3 \cdot (-1) + 2 = -3 + 2 = -1 \\ \dots + \dfrac{2}{2} = 0 \rightarrow \dots = -1 \ \text{ luego } \dots \text{ es } x \end{array}\right.$

El sistema buscado es:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = -1 \\ x + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array}\right.$$

d) $\left.\begin{array}{l} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{array}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \ \rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} \dots -2(-1) = 4 \rightarrow \dots + 2 = 4 \rightarrow \dots = 2 = y \\ 3 \cdot 2 + \dots = 1 \rightarrow \dots = -5 \ \text{ luego } \dots \text{ es } 5x \end{array}\right.$

El sistema buscado es:

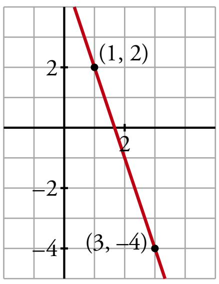
$$\left\{\begin{array}{l} y - 2x = 4 \\ 3y + 5x = 1 \end{array}\right.$$

3 **Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:**

a) $\boldsymbol{3x + y = 5}$ **b)** $\boldsymbol{2x - y = 4}$

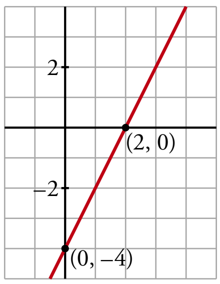
a) $3x + y = 5$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: $(1, 2)$ y $(3, -4)$



b) $2x - y = 4$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: $(0, -4)$ y $(2, 0)$

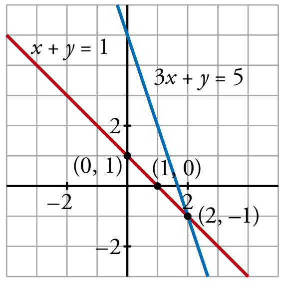


4 **Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x + \ \ 3 = 0 \end{array}\right.$

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$



Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$

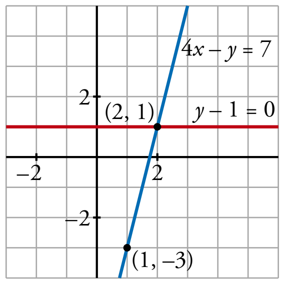
x	y
0	5
2	–1

$x + y = 1$

x	y
0	1
1	0

Las rectas se cortan en el punto (2, –1) $\longrightarrow$ La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$.

b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$



La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje X, $y = 1$.

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, –3) y (2, 1).

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$, punto de intersección de ambas rectas.

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

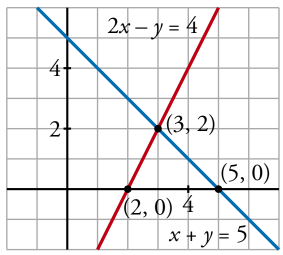
Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

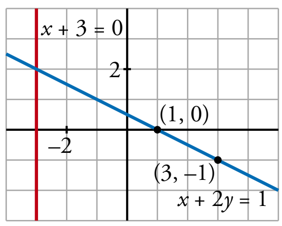
$2x - y = 4$

x	y
2	0
3	2



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), luego $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$



La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, 0) y (3, –1).

La segunda ecuación es la de una recta paralela al eje Y, $x = -3$.

Las dos rectas se cortan en el punto (–3, 2) $\longrightarrow$ La solución del sistema es $x = -3$, $y = 2$.

5 **Dos de los siguientes sistemas tienen solución única; uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

- El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.
- El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left.\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{matrix}\right\} \text{ Imposible que se cumplan ambas a la vez.}$$

- Los sistemas a) y d) tienen solución.

Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

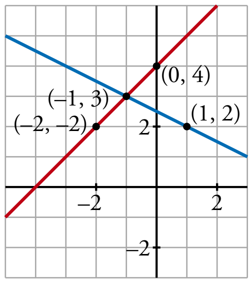
a) $\left.\begin{matrix} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{matrix}\right\}$

$x + 2y = 5$

x	y
1	2
–1	3

$y - x = 4$

x	y
–2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en $(-1, 3)$ $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$.

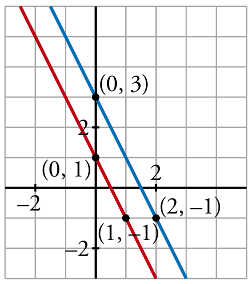
b) $\left.\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{matrix}\right\}$

$2x + y = 3$

x	y
0	3
2	–1

$4x + 2y = 2$

x	y
0	1
1	–1



Las rectas son paralelas $\rightarrow$ El sistema no tiene solución.

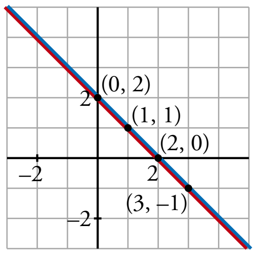
c) $\left.\begin{matrix} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{matrix}\right\}$

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

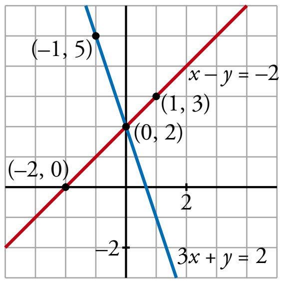
$3x + 3y = 6$

x	y
1	1
3	–1



Se trata de la misma recta $\rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$



$3x + y = 2$

x	y
0	2
–1	5

$x - y = -2$

x	y
–2	0
1	3

El sistema tiene solución única $x = 0$, $y = 2$, punto de corte de ambas rectas.

6 **Dada la ecuación $x + 3y = 1$, busca otra ecuación que forme con ella un sistema cuya única solución sea $x = -2$, $y = 1$. Busca también otra ecuación que forme con ella un sistema incompatible y otra que forme con ella un sistema indeterminado.**

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{array}\right\}$ es un sistema que tiene como solución $x = -2$, $y = 1$.

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -1 \end{array}\right\}$ es un sistema que no tiene solución, es un sistema incompatible.

$$\begin{array}{r} -2x - 6y = -2 \\ 2x + 6y = -1 \\ \hline 0 = -3 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$ es un sistema que tiene infinitas soluciones, es un sistema indeterminado (la 2.ª ecuación es la tercera parte de la primera).

7 **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + \ \ y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 5 \\ 4x + \ \ y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = -1 - 4x$

$3x - 5(-1 - 4x) = 5 \ \rightarrow \ 3x + 5 + 20x = 5 \ \rightarrow \ 23x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

$y = -1 - 4 \cdot 0 = -1$

Solución: $x = 0$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = -5 - 6y$

$8(-5 - 6y) - 7y = 15 \ \rightarrow \ -40 - 48y - 7y = 15 \ \rightarrow \ -55y = 55 \ \rightarrow \ y = -1$

$x = -5 - 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = 3x - 7$

$2x + 5(3x - 7) = -1 \;\rightarrow\; 2x + 15x - 35 = -1 \;\rightarrow\; 17x = 34 \;\rightarrow\; x = 2$

$y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = \dfrac{3x - 2}{2}$

$5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x - 2}{2}\right) = 7 \;\rightarrow\; 5x + 2(3x - 2) = 7 \;\rightarrow\; 5x + 6x - 4 = 7 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 11x = 11 \;\rightarrow\; x = 1$

$y = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{1}{2}$

8 □□□ **Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:**

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{array}\right\}$ Igualamos las y: $2x - 3 = \dfrac{x - 3}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4x - 6 = x - 3 \;\rightarrow\; 3x = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de cada una de las ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 8 - 5x = 2x + 1 \;\rightarrow\; 7 = 7x \;\rightarrow\; x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{array}\right\} \rightarrow -2 - 6y = 1 + 3y \rightarrow -3 = 9y \rightarrow y = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$x = -2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 + 2 = 0$$

Solución: $x = 0$, $y = -\frac{1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5y - 2}{4} \\[2ex] x = \dfrac{10 - 2y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{5y - 2}{4} = \dfrac{10 - 2y}{3} \\ 3(5y - 2) = 4(10 - 2y) \\ 15y - 6 = 40 - 8y \rightarrow 23y = 46 \rightarrow y = 2 \end{array}$$

$$x = \frac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Solución: $x = 2$, $y = 2$

9 □□□ **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos $8x = 8 \rightarrow x = 1$

$$3 \cdot 1 + 2y = 4 \rightarrow 2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Solución: $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{array}{r} -4x - 10y = -22 \\ 4x - 3y = -4 \\ \hline -13y = -26 \end{array} \rightarrow y = 2$

$$2x + 5 \cdot 2 = 11 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{array}{r} -3x - 18y = 12 \\ 3x - \ \ 5y = 11 \\ \hline -23y = 23 \end{array} \to y = -1$

$x + 6 \cdot (-1) = -4 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la primera ecuación por –2 y sumamos:

$\begin{array}{r} -10x + 4y = -6 \\ 10x + 3y = -1 \\ \hline 7y = -7 \\ y = -1 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} 5x - 2 \cdot (-1) = 3 \\ 5x + 2 = 3 \\ 5x = 1 \\ x = \dfrac{1}{5} \end{array}$ $\qquad$ Solución: $x = \dfrac{1}{5},\ y = -1$

10 **Resuelve por el método que consideres más adecuado:**

a) $\begin{cases} \mathbf{7x + 6y = 2} \\ \mathbf{y + 5 = 3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathbf{5x - 3y = 1} \\ \mathbf{4x + 2y = 14} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{3(x + 2) = y + 7} \\ \mathbf{x + 2(y + 1) = 0} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3} \\ \mathbf{2(x + y) = 16} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \mathbf{4x - 3 = 2y - 21} \\ \mathbf{3y = \dfrac{15 - x}{2}} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \mathbf{\dfrac{-x + 7}{2} = y + 4} \\ \mathbf{2x = \dfrac{3y - 10}{5}} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera: $y = -2$

$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \to 7x - 12 = 2 \to 7x = 14 \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times 2} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 6y = 2 \\ 12x + 6y = 42 \\ \hline 22x \qquad = 44 \end{array} \to x = 2$

$5 \cdot 2 - 3y = 1 \to 9 = 3y \to y = 3$

Solución: $x = 2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x - \ \ y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 3x - 1$

$x + 2(3x - 1) = -2 \rightarrow x + 6x - 2 = -2 \rightarrow 7x = 0 \rightarrow x = 0$

$y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

Solución: $x = 0$, $y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 18 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 8 - y$

$2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \rightarrow 16 - 2y + 3y = 18 \rightarrow y = 2$

$x = 8 - 2 = 6$

Solución: $x = 6$, $y = 2$

e) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x - 2y = 3 - 21 \\ 6y = 15 - x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = -18 \\ x + 6y = 15 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$x = 15 - 6y$

$4(15 - 6y) - 2y = -18 \rightarrow 60 - 24y - 2y = -18 \rightarrow 60 + 18 = 26y \rightarrow 78 = 26y \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{78}{26} = 3$

$x = 15 - 6 \cdot 3 = 15 - 18 = -3$

Solución: $x = -3$, $y = 3$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + 7 = 2(y + 4) \\ 10x = 3y - 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + 7 = 2y + 8 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x - 2y = 1 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\}$

Aplicamos el método de reducción: multiplicamos la primera ecuación por 10 y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -10x - 20y = 10 \\ 10x - 3y = -10 \\ \hline -23y = 0 \end{array} \rightarrow y = 0$$

$-x - 2 \cdot 0 = 1 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 0$

11 □□□ **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ecuación por (–2) y sumamos:

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = -8 \\ 4x + 3y = -7 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y = -15 \ \to \ y = -3 \\ x = \dfrac{4+y}{2} \ \to \ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \ \text{Solución: } x = \frac{1}{2}, \ y = -3$$

Comprobación: $\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1{,}25 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ 6x - 2y = -2{,}5 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x = -3{,}5 \ \to \ x = \dfrac{-3{,}5}{7} = -0{,}5 \\ y = \dfrac{-1-x}{2} \ \to \ y = -0{,}25 \end{array}\right\} \to \ \text{Solución: } x = -0{,}5, \ y = -0{,}25$$

Comprobación: $\begin{cases} -0{,}5 + 2(-0{,}25) = -0{,}5 - 0{,}5 = -1 \\ 3(-0{,}5) - (-0{,}25) = -1{,}5 + 0{,}25 = -1{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x - \ \ 2y = 2 \\ -3x - 12y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y = 7 \ \rightarrow \ y = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{-5}{3} - 4y \ \rightarrow \ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Solución: } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{2}$$

Comprobación: $\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2 - 3y = 7 - 8y \ \rightarrow \ 5y = 5 \ \rightarrow \ y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \ \rightarrow \ x = -1 \end{array}$$

Solución: $x = -1,\ y = 1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \dfrac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

PÁGINA 123

12 **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4(x-3)+y=0 \\ 3(x+3)-y=18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x-12+y=0 \\ 3x+\ \ 9-y=18 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 4x+y=12 \\ 3x-y=\ \ 9 \\ \hline 7x\qquad =21 \end{array} \rightarrow x=3 \rightarrow y=3\cdot 3-\ 9=0$$

Solución: $x=3,\ y=0$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y+1}{5}=1 \\ x+3y=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x+4y+4}{20}=\dfrac{20}{20} \\ x+3y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x+4y=16 \\ x+3y=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{array}{r} 5x+\ \ 4y=16 \\ -5x-15y=-5 \\ \hline -11y=11 \end{array} \rightarrow y=-1$$

$x+3\cdot(-1)=1 \rightarrow x-3=1 \rightarrow x=4$

Solución: $x=4,\ y=-1$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5}-y=-1 \\ \dfrac{x-6}{5}+y=-1 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} x+4-5y=-5 \\ x-6+5y=-5 \\ \hline 2x-2\qquad =-10 \end{array} \rightarrow x=-4$$

$-4+4-5y=-5 \rightarrow -5y=-5 \rightarrow y=1$

Solución: $x=-4,\ y=1$

d) $\begin{cases} x=\dfrac{y-4}{3}+1 \\ y+\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 3x=y-4+3 \\ 3y+1=x+4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x-\ \ y=-1 \\ -x+3y=3 \end{array}\right\}$$

$y=3x+1$

$-x+3(3x+1)=3 \rightarrow -x+9x+3=3 \rightarrow 8x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=1$

Solución: $x=0,\ y=1$

Sistemas no lineales

13 **Halla las soluciones de estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 1 - y$

$(1 - y)y + 2y = 2 \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow -y^2 + 3y - 2 = 0$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = 1 \\ x_2 = -1,\ y_2 = 2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \rightarrow x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \rightarrow 5x^2 - 12x + 7 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm 2}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7}{5} \rightarrow y_1 = 3 - 2 \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5},\ y_1 = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2},\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

$y = 3x - 3$

$2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \;\rightarrow\; 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \;\rightarrow\; 11x^2 - 18x = 0$

$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 18/11 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_1 = 0,\; y_1 = -3$

Si $x_2 = \dfrac{18}{11} \;\rightarrow\; y = \dfrac{21}{11} \;\rightarrow\;$ Solución: $x_2 = \dfrac{18}{11},\; y_2 = \dfrac{21}{11}$

14 **Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la primera ecuación:

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2y^2 = -148 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \\ \hline -5y^2 = -125 \end{array}$$

$-5y^2 = -125 \;\rightarrow\; y^2 = \dfrac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$

Si $y_1 = 5 \;\rightarrow\; x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Si $y_2 = -5 \;\rightarrow\; x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 7,\; y_1 = 5;\; x_2 = -7,\; y_2 = 5;\; x_3 = 7,\; y_3 = -5;\; x_4 = -7,\; y_4 = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos por el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por –3.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \\ \hline 23y^2 = 23 \end{array}$$

$23y^2 = 23 \;\rightarrow\; y^2 = 1 \qquad 3x^2 - 5 \cdot 1 = 7 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3x^2 = 7 + 5 \;\rightarrow\; 3x^2 = 12 \begin{cases} x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Por tanto si $y = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 2$

$y = -1 \rightarrow x = \pm 2$

Las soluciones son: $x_1 = -2,\; y_1 = -1;\; x_2 = -2,\; y_2 = 1;\; x_3 = 2,\; y_3 = -1;\; x_4 = 2,\; y_4 = 1$

15 Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 + 2y$

Luego, sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \sqrt{1 + 2y + 2} \rightarrow y = \sqrt{3 + 2y}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $y^2 = 3 + 2y \rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow x = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ -1 \rightarrow x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones obtenidas cumplen la primera ecuación del sistema:

$x = 7,\ y = 3 \rightarrow 3 = \sqrt{7+2} \rightarrow 3 = \sqrt{9} \rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ Solución válida

$x = -1,\ y = -1 \rightarrow -1 = \sqrt{-1+2} \rightarrow -1 = \sqrt{1} \rightarrow -1 \neq 1 \rightarrow$ Solución no válida

Por tanto, la solución es $x = 7,\ y = 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{x} + 7 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x-6)^2 = x \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \rightarrow y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

Comprobación (de la 2.ª ecuación)

$x_1 = 9,\ y_1 = 10 \rightarrow \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \rightarrow$ Solución válida

$x_2 = 4,\ y_2 = 5 \rightarrow \sqrt{4} + 7 = 9 \neq 5 \rightarrow$ Solución no válida

Solución: $x = 9,\ y = 10$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{25}{2}y$

$$xy = 2 \rightarrow \frac{25}{2}y \cdot y = 2 \rightarrow \frac{25}{2}y^2 = 2 \rightarrow y^2 = \frac{4}{25} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5}$$

Si $y = \dfrac{2}{5} \rightarrow x = \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = \dfrac{2}{5}$

$y = -\dfrac{2}{5} \rightarrow x = -5$ $x_2 = -5,\ y_2 = -\dfrac{2}{5}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \;\rightarrow\; x = 4 - 2y \end{array}\right\}$

$2xy = 3 \;\rightarrow\; 2(4 - 2y) \cdot y = 3 \;\rightarrow\; 8y - 4y^2 = 3 \;\rightarrow\; 4y^2 - 8y + 3 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \\[2ex] \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\; y_1 = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = 3,\; y_2 = \dfrac{1}{2}$

16 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 1} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 11 - 3x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2y = 0} \\ \boldsymbol{x(x - y) = 2(y^2 - 4)} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

$x = 1 + y$

$(1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \;\rightarrow\; 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \;\rightarrow\; x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 2,\; y_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5}{2},\; y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

$y = \dfrac{-3x}{2}$

$$x^2 - x\left(\frac{-3x}{2}\right) = 2\left(\frac{9x^2}{4} - 4\right) \;\rightarrow\; x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{9x^2}{2} = -8$$

$2x^2 + 3x^2 = 9x^2 - 16 \;\rightarrow\; 4x^2 = 16$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Si $x_1 = 2 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_1 = 2,\; y_1 = -3$

Si $x_2 = -2 \;\rightarrow\; y = 3 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_2 = -2,\; y_2 = 3$

PIENSA Y RESUELVE

Sistemas lineales

17 □□□ **Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €.**

¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

$$\left.\begin{array}{l} x \to \text{precio de una barra de pan} \\ y \to \text{precio de un litro de leche} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 6,8 \\ 3x + 4y = 4,7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} \\ \xrightarrow{\times (-4)} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 18y = 20,4 \\ -12x - 16y = -18,8 \\ \hline 2y = 1,6 \end{array} \to y = 0,8$$

$$4x + 6 \cdot 0,8 = 6,8 \to 4x + 4,8 = 6,8 \to 4x = 2 \to x = \frac{2}{4} = 0,5$$

Una barra de pan cuesta 0,50 €, y un litro de leche, 0,80 €.

18 □□□ **Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?**

Llamamos:

x = n.º de botellas de aceite de 2 *l*

y = n.º de botellas de aceite de 5 *l*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1\,200 \\ 2x + 5y = 3\,000 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times (-2)} \begin{array}{r} -2x - 2y = -2\,400 \\ 2x + 5y = 3\,000 \\ \hline 3y = 600 \end{array} \to y = 200 \to$$

$$\to x = 1\,200 - 200 = 1\,000$$

Se han utilizado 1 000 botellas de 2 *l* y 200 de 5 *l*.

19 □□□ **Un test consta de 48 preguntas. Por cada acierto se suma 0,75 puntos y por cada error se resta 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve?**

x = n.º de aciertos

y = n.º de errores

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 48 \\ 0,75x - 0,25y = 18 \end{array}\right\} \quad x = 48 - y$$

$0,75(48 - y) - 0,25y = 18$

$36 - 0,75y - 0,25y = 18$

$18 = y$

$x = 48 - 18 = 30$

Tuve 30 aciertos y 18 errores.

20 **La suma de dos números es 14. Añadiendo uno al mayor se obtiene el doble del menor. Halla los dos números.**

x = n.º mayor
y = n.º menor

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + 1 &= 2y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 2y - 1$$

$2y - 1 + y = 14 \rightarrow 3y = 15 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Los números son 5 y 9.

21 **Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,80 € por cada pieza que sale de su taller para la venta, pero sufre una pérdida de 1 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2 255 bombillas, obteniendo unos beneficios de 1 750 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?**

Llamamos:

x = n.º de bombillas válidas

y = n.º de bombillas defectuosas

$$\left.\begin{array}{l} \text{En un día fabrica 2 255 bombillas} \rightarrow x + y = 2\,255 \\ \text{En un día obtiene 1 750 € de benficio} \rightarrow 0{,}80x - y = 1\,750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2\,255 \\ 0{,}80x - y &= 1\,750 \\ \hline 1{,}80x &= 4\,005 \end{aligned}$$

$1{,}80x = 4\,005 \rightarrow x = \dfrac{4\,005}{1{,}80} = 2\,225 \rightarrow y = 2\,255 - 2\,225 = 30$

Hay 2 225 bombillas válidas y 30 defectuosas.

22 **El perímetro de un rectángulo es de 14 cm y sabemos que su base es 3 cm más larga que su altura. Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x, y a las dimensiones del rectángulo:

x = base y = altura

$$\left.\begin{array}{l} \text{Perímetro} = 14 \rightarrow x + y = 7 \\ \text{Base} = \text{altura} + 3 \rightarrow x = y + 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y + 3 + y = 7 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ x = 2 + 3 = 5 \end{array}$$

Las dimensiones del rectángulo son: base = 5 cm, altura = 2 cm.

23 **Encuentra dos números tales que añadiendo tres al primero se obtenga el segundo y en cambio, añadiendo dos al segundo se obtenga el doble del primero.**

Llamamos x, y a los números pedidos: x es el primero e y el segundo.

$$\left.\begin{aligned} x + 3 &= y \\ y + 2 &= 2x \end{aligned}\right\} \quad x + 3 + 2 = 2x \rightarrow 5 = x \rightarrow y = 5 + 3 = 8$$

Los números son 5 y 8.

24 □□□ **La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x, y a los números buscados.

La suma es 15 $\rightarrow$ $x + y = 15$

La mitad de x + tercera parte de y es 6 $\rightarrow$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 15 \\ 3x + 2y = 36 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 3x + 2(15 - x) = 36 \ \rightarrow \ 3x + 30 - 2x = 36 \ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow x = 6 \ \rightarrow \ y = 15 - 6 = 9$$

Los números buscados son 6 y 9.

25 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 124

26 □□□ **Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €.**

¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

	ANTES DE LA SUBIDA O REBAJA	CON SUBIDA O REBAJA
CALCULADORA	x	$1{,}08x$
CUADERNO	y	$0{,}9y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ \ \ y = 10{,}8 \\ 1{,}08x + 0{,}9y = 11{,}34 \end{array}\right\} \rightarrow \ y = 10{,}8 - x$$

$$1{,}08x + 0{,}9(10{,}8 - x) = 11{,}34 \ \rightarrow \ 1{,}08x + 9{,}72 - 0{,}9x = 11{,}34 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 0{,}18x = 1{,}62 \ \rightarrow \ x = \frac{1{,}62}{0{,}18} = 9 \ \rightarrow \ y = 10{,}8 - 9 = 1{,}8$$

Hace tres días, la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,80 €.

27 □□□ **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%.**

¿Cuánto le costó cada uno?

	PRECIO COMPRA	PRECIO VENTA
EQUIPO MÚSICA	x	$0{,}9x$
ORDENADOR	y	$0{,}85y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 2\,500 \\ 0{,}9x + 0{,}85y = 2\,157{,}5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0{,}9x + 0{,}85\,(2\,500 - x) = 2\,157{,}5 \end{array}\right\}$$

$0{,}9x = 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}5 \quad \to \quad 0{,}05x = 32{,}5$

$x = 650, \ \ y = 1\,850$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

28 □□□ **En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg.**
¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
CAFÉ INFERIOR	x	6	$6x$
CAFÉ SUPERIOR	y	8,5	$8{,}5y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 20 \\ 6x + 8{,}5y = 140 \end{array}\right\} \to \quad x = 20 - y$$

$6 \cdot (20 - y) + 8{,}5y = 140 \quad \to \quad 120 - 6y + 8{,}5y = 140 \quad \to \quad 2{,}5y = 20 \quad \to$

$$\to \quad y = \frac{20}{2{,}5} = 8 \quad \to \quad x = 20 - 8 = 12$$

Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

29 □□□ **¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?**

$x \quad \to \quad$ litros de leche con un 10% de grasa

$y \quad \to \quad$ litros de leche con un 4% de grasa

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0{,}1x + 0{,}04y = 0{,}06\,(x + y) \end{array}\right\} 0{,}04x = 0{,}02y \quad \to \quad y = 2x$$

$x + 2x = 18 \quad \to \quad 3x = 18 \quad \to \quad x = 6, \ \ y = 12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10% de grasa con 12 litros de leche de un 4% de grasa.

30 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

31 **La edad de un padre es hoy siete veces la edad del hijo y dentro de 10 años será solo el triple. Calcula la edad actual de cada uno.**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 10 AÑOS
PADRE	x	$x + 10$
HIJO	y	$y + 10$

$$\left.\begin{array}{l} x = 7y \\ x + 10 = 3(y + 10) \end{array}\right\} \; 7y + 10 = 3y + 30 \;\rightarrow\; 4y = 20 \;\rightarrow\; y = 5$$

Luego: $x = 7 \cdot 5 = 35$

El padre tiene 35 años, y el hijo, 5 años.

32 **Se sabe que Noelia le saca 27 años a Marcos y que dentro de 12 años le doblará en edad. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
NOELIA	x	$x + 12$
MARCOS	y	$y + 12$

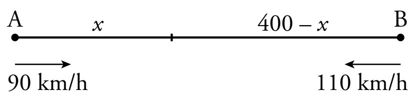
$$\left.\begin{array}{l} x = y + 27 \\ x + 12 = 2(y + 12) \end{array}\right\} \; y + 27 + 12 = 2y + 24 \;\rightarrow\; y + 39 = 2y + 24 \;\rightarrow\; 15 = y$$

Luego: $x = 15 + 27 = 42$

Noelia tiene 42 años, y Marcos, 15 años.

33 **La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?**

☞



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400 - x$	110 km/h	t

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 90 = \dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; x = 90t \\[2ex] 110 = \dfrac{400 - x}{t} \;\rightarrow\; 400 - x = 110t \end{array}\right\} \begin{array}{l} 400 - 90t = 110t \\ 400 = 200t \;\rightarrow\; t = 2 \end{array}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a $90 \cdot 2 = 180$ km de A.

Sistemas no lineales

34 **La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 - y^2 = 144 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6+y)^2 - y^2 = 144 \rightarrow 36 + 12y + y^2 - y^2 = 144 \rightarrow 12y = 108 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow y = \frac{108}{12} = 9$$

Luego: $x = 6 + 9 = 15$

Los números son 15 y 9.

35 **Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ xy = 135 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 24 - x \\ x(24 - x) = 135 \rightarrow 24x - x^2 = 135 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \rightarrow y = 24 - 15 = 9 \\ 9 \rightarrow y = 24 - 9 = 15 \end{cases}$$

Los números son 9 y 15.

36 **Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 232 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 20 - x \\ x^2 + (20 - x)^2 = 232 \rightarrow x^2 + 400 - 40x + x^2 = 232 \end{array}$$

$$2x^2 - 40x + 168 = 0 \rightarrow x^2 - 20x + 84 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \rightarrow y = 20 - 14 = 6 \\ 6 \rightarrow y = 20 - 6 = 14 \end{cases}$$

Los números son 6 y 14.

37 **La edad actual de Rosa es el cuadrado de la de su hija y dentro de 9 años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 9 AÑOS
ROSA	x	$x + 9$
HIJA	y	$y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ x + 9 = 3(y + 9) \end{array}\right\} \quad y^2 + 9 = 3y + 27 \;\rightarrow\; y^2 - 3y - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} 6 \;\rightarrow\; x = 6^2 = 36 \\ -3 \;\; \text{No es válida.} \end{cases}$$

Rosa tiene 36 años, y su hija, 6 años.

38 **La edad actual de una madre es el cuadrado de la que tendrá su hija dentro de dos años, momento en el que la edad de la hija será la sexta parte de la edad que tiene actualmente la madre. Calcula la edad de ambas.**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 2 AÑOS
MADRE	x	$x + 2$
HIJA	y	$y + 2$

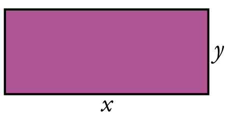
$$\left.\begin{array}{l} x = (y + 2)^2 \\ y + 2 = \dfrac{1}{6}x \end{array}\right\} \quad x = \left(\frac{1}{6}x\right)^2 \;\rightarrow\; \frac{1}{36}x^2 - x = 0 \;\rightarrow\; x\left(\frac{1}{36}x - 1\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{36}x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{36}x = 1 \;\rightarrow\; x = 36 \;\rightarrow\; y = 4$$

La madre tiene 36 años, y su hija, 4 años.

39 **Resuelto en el libro de texto.**

40 **El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?**



$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 21 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \;\rightarrow\; -x^2 + 10x - 21 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-10 \pm 4}{-2} \begin{array}{l} x_1 = 7 \;\rightarrow\; y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \;\rightarrow\; y_2 = 10 - 3 = 7 \end{array}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

41 **En un rombo, una diagonal es el triple de la otra y el área es de 6 cm^2. ¿Cuánto mide cada diagonal?**

Llamamos x, y a la longitud de cada una de las diagonales del rombo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ \dfrac{xy}{2} = 6 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \frac{3y \cdot y}{2} = 6 \;\rightarrow\; 3y^2 = 12 \;\rightarrow\; y^2 = 4 \begin{array}{l} y = -2 \;\; \text{No es válida.} \\ y = 2 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 2 = 6 \end{array}$$

Las diagonales miden 2 cm y 6 cm.