

PÁGINA 240

PRACTICA

Formar agrupaciones

1 ■ □ □ a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.

b) Haz lo mismo para cuatro bolas distintas.

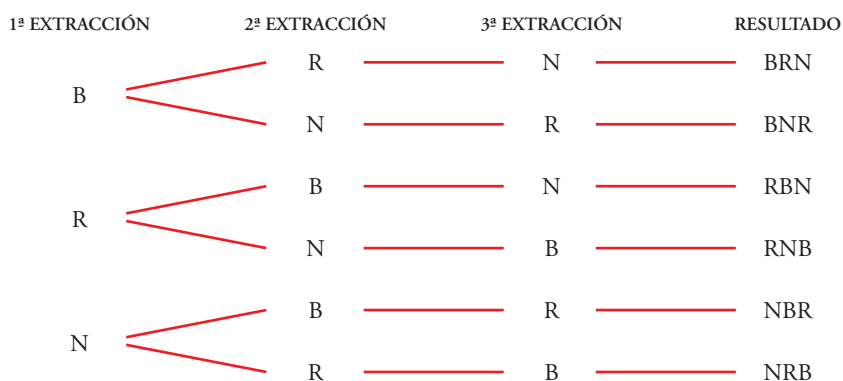
c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

a) Llamando B → extracción de bola blanca

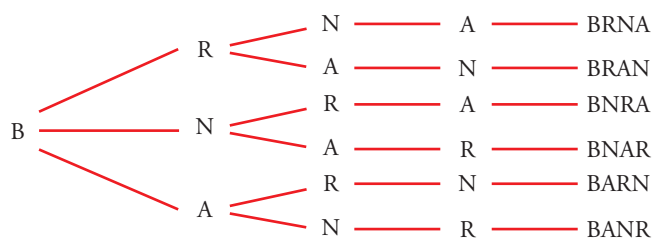
R → extracción de bola roja

N → extracción de bola negra



Tenemos 6 posibles resultados.

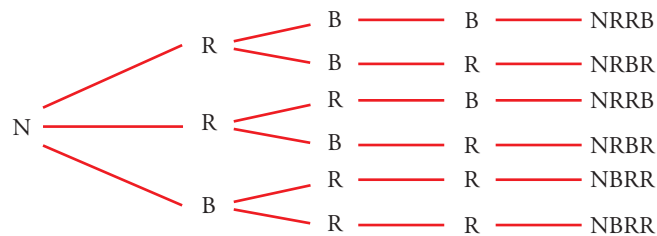
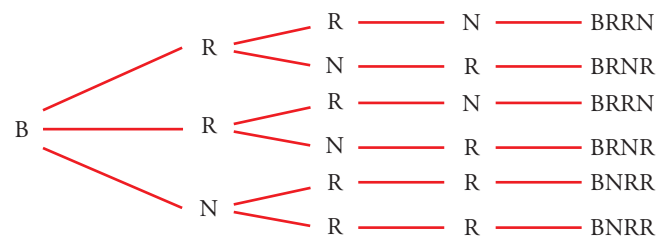
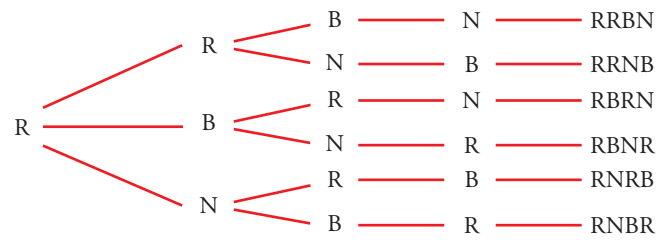
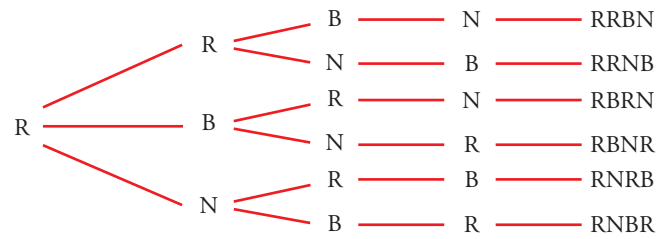
b) Añadimos, por ejemplo, una bola azul (A).



Hacemos lo mismo empezando con R, con N y con A.

Al final tenemos $6 \cdot 4 = 24$ resultados posibles.

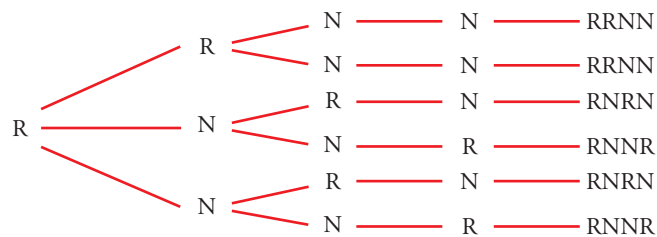
c)



Como hay dos bolas del mismo color, ahora tenemos menos resultados que en el apartado b). En concreto:

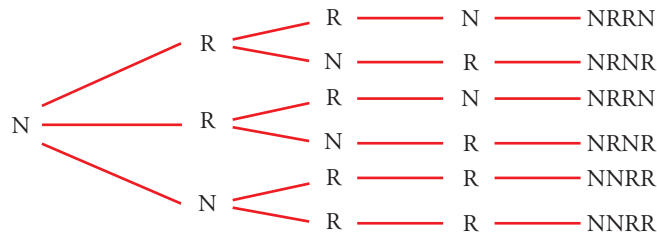
$$6 + 3 + 3 = 12 \text{ resultados}$$

d)



11 Soluciones a los ejercicios y problemas

Para la segunda roja, igual.

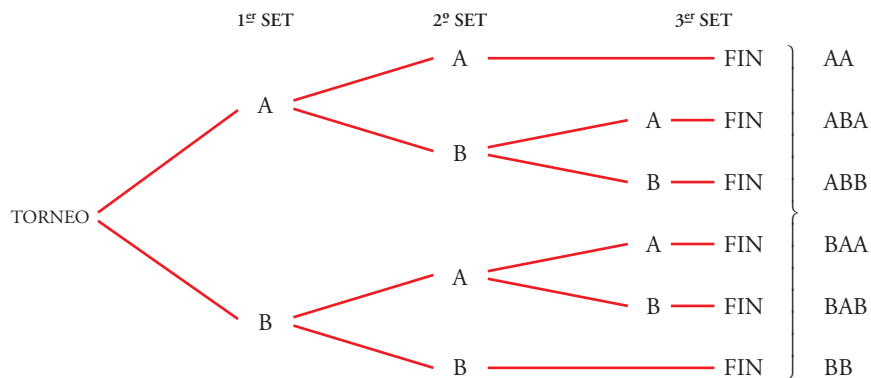


Ahora solo tenemos:

$$3 + 3 = 6 \text{ resultados}$$

2 ■■■ Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido.

Hacemos un diagrama de árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un set, el jugador A o el jugador B.



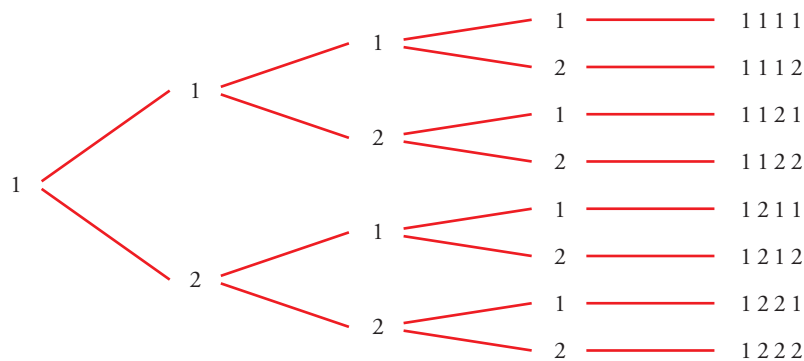
Hay 6 posibles desarrollos del torneo.

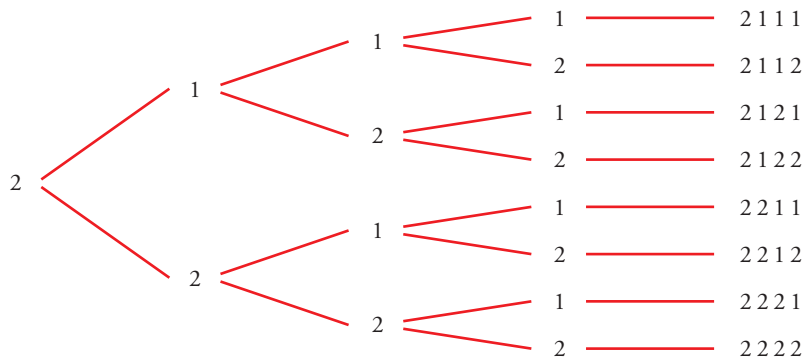
3 ■■■ a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1?

Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

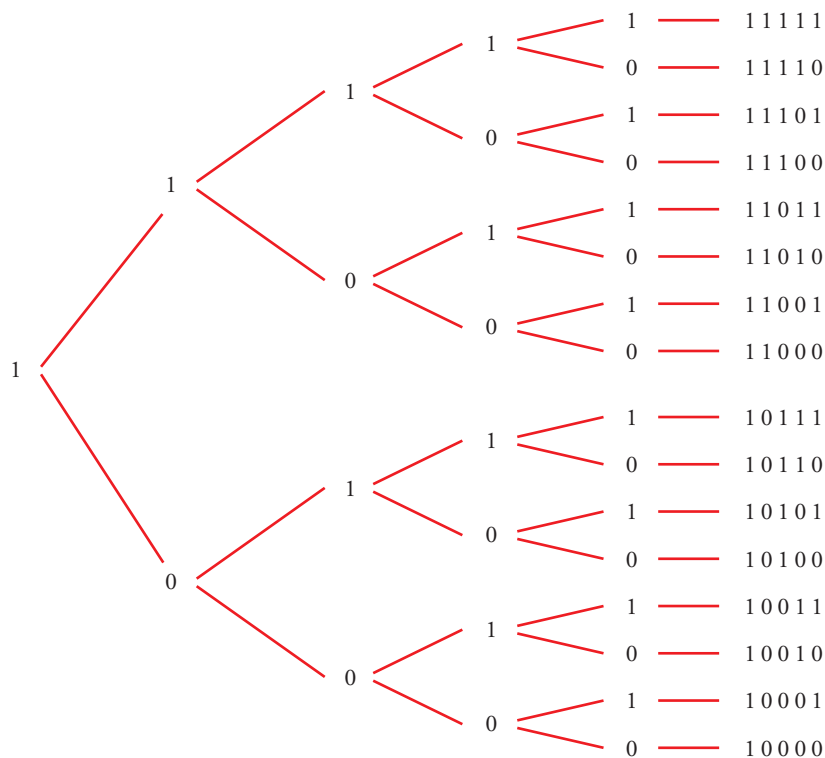
a) Hacemos un diagrama de árbol:





En total hay 16 números de cuatro cifras con los dígitos 1 y 2.

b)



Hay 16 números de 5 cifras compuestos solo por 0 y 1.

4 ■■■ Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? **Escríbelos todos.**

Llamamos: R - ROJO; A - AZUL; N - NEGRO, V - VERDE; M - AMARILLO

El lápiz bicolor de punta RA, por ejemplo, es el mismo que el de punta AR.

Los modelos de lápices bicolor son:

RA AN NV VM

RN AV NM

RV AM

RM

En total hay 10 modelos.

5 ■■■ ¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

6 ■■■ Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.

Cada ficha tiene dos números que podemos repetir, pero el orden no influye:

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	} 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 fichas
1 2	2 3	3 4	4 5		
1 3	2 4	3 5			
1 4	2 5				
1 5					

7 ■■■ Describe todos los partidos que han de jugarse en una ligilla con cinco equipos A, B, C, D y E.

Suponemos que juegan a una sola vuelta.

Los partidos serán:

A-B	A-C	A-D	A-E	} 10 partidos
B-C	B-D	B-E		
C-D	C-E			
D-E				

Si la ligilla fuera a ida y vuelta, el número de partidos sería 20.

8 ■■■ Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.

Llamamos A, N y B a los pantalones, y A, R, V y B a las camisetas. Las posibles combinaciones son:

AA	AR	AV	AB	} Te puedes vestir de 12 formas diferentes.
NA	NR	NV	NB	
BA	BR	BV	BB	

Utilizar las fórmulas

9 ■■■ Calcula:

a) $VR_{4,3}$

b) $VR_{3,4}$

c) $V_{7,3}$

d) P_7

e) $C_{6,4}$

f) $V_{9,5}$

g) $\frac{P_{10}}{P_8}$

h) $C_{10,8}$

a) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

b) $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

c) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) $P_7 = 7! = 5\,040$

e) $C_{6,4} = \frac{V_{6,4}}{P_4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

f) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

g) $\frac{P_{10}}{P_8} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

h) $C_{10,8} = \frac{V_{10,8}}{P_8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{90}{2} = 45$

10 ■■■ Calcula:

a) $V_{5,2} - C_{5,3}$

b) $\frac{VR_{6,2}}{C_{4,2}}$

c) $\frac{P_4}{V_{4,3}}$

d) $\frac{P_5}{P_3}$

e) $\frac{P_{10}}{P_9}$

f) $\frac{P_{12}}{P_9}$

a) $V_{5,2} - C_{5,3} = 5 \cdot 4 - \frac{V_{5,3}}{P_3} = 20 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\frac{VR_{6,2}}{C_{4,2}} = \frac{6^2}{\frac{V_{4,2}}{P_2}} = \frac{36}{\frac{12}{2}} = \frac{36}{6} = 6$

c) $\frac{P_4}{V_{4,3}} = \frac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

d) $\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

e) $\frac{P_{10}}{P_9} = \frac{10!}{9!} = 10$

f) $\frac{P_{12}}{P_9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$

11 ■■■ Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8 ; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:

- a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.
 - b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.
 - c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.
 - d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario en el que participan 8 personas.
- a) P_5 b) $C_{8,2}$ c) $VR_{4,2}$ d) $V_{8,2}$

12 ■■■ Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?*

- a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.
- b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.
- c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.
- d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.
- e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.
- f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.
- g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.
- h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3 , P_6 , VR_6^3 , 1, VR_3^6 , V_6^3 . Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

- a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas.
- b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas.
- c) $V_6^3 = 120$ formas.
- d) $C_6^3 = 120$ formas.
- e) $V_6^3 = 120$ formas.
- f) 1 forma.
- g) $P_6 = 720$ formas.
- h) $C_6^3 = 20$ formas.

- 13** ■■■ ¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?

Hay $V_6^3 = 120$ formas de repartirse las entradas.

PÁGINA 241

- 14** ■■■ Para formar un equipo de baloncesto hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

a) Con 10 jugadores se quieren formar equipos de 5.

El orden no influye y no se pueden repetir.

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ equipos distintos}$$

b) Si el entrenador decide mantener dos jugadores fijos, habrá:

$$C_{8,3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ equipos distintos}$$

- 15** ■■■ Se van a celebrar elecciones en la Asociación de Padres y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

No se pueden repetir y, además, influye el orden porque no es lo mismo ser presidente, que secretario, que tesorero.

Son variaciones ordinarias: $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas distintas.

- 16** ■■■ Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

a) No se pueden repetir los regalos y sí influye el orden porque no es lo mismo que toque una bicicleta, que unos patines, que un chándal.

Son variaciones ordinarias $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

b) Ahora el orden no influye: $C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ formas.

c) Pueden repetirse e influye el orden: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ formas.

17 ■■■ Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

a) Disponemos de las 6 letras de la palabra PREMIO para agruparlas; ninguna letra está repetida y el orden influye.

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ ordenaciones distintas.}$$

b) Como P está fija, ahora se disponen de 5 letras:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ ordenaciones distintas.}$$

18 ■■■ ¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos? ¿Y si el banco es de 3 asientos?

No se pueden repetir y el orden influye:

$$\text{Si el banco es de 5 asientos: } V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ formas.}$$

$$\text{Si el banco es de 3 asientos: } P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ formas.}$$

19 ■■■ Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes.

¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

No puedes repetir y no influye el orden:

$$C_{8,4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ formas distintas.}$$

20 ■■■ El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.

Por ejemplo:

0	0	1	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Disponemos de dos elementos y los agrupamos de 8 en 8:

$$VR_{2,8} = 2^8 = 256 \text{ bytes diferentes se pueden formar.}$$

21 ■■■ Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?

Se reparten 7 fichas a cada uno. No se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{28,7} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$$

- 22** ■■■ a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra PALOTE?
 b) ¿Cuántas empiezan por P?
 c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).
 d) ¿En cuántas están alternadas vocales y consonantes?

Las letras son distintas y el orden influye:

a) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

b) Si empiezan por P, ahora disponemos de 5 letras y 5 lugares:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ formas.}$$

c) Si las consonantes están en los lugares impares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Las vocales están en los lugares pares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Por cada forma de las consonantes hay 6 formas de las vocales.

En total hay: $6 \cdot 6 = 36$ formas.

d) Hay 72 formas, porque puede ser

C V C V C V (apartado c))

V C V C V C → otras 36 formas.

- 23** ■■■ Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?

Este problema es idéntico al apartado d) del problema 22. Por tanto, tienen 72 formas distintas de sentarse.

- 24** ■■■ Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

a) Tomamos los puntos de dos en dos.

$$\text{No se pueden repetir y no influye el orden: } C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ cuerdas}$$

b) $C_{16,2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$ cuerdas

- 25** ■■■ En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:

- La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.
- Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

Por cada cifra correspondiente a la sección habrá $VR_{10,3} = 1\,000$ marcas distintas.

Como hay 9 cifras correspondientes a la sección, en total se podrán hacer $9 \cdot 1\,000 = 9\,000$ marcas distintas.

26 ■■■ Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:

Música	Tecnología
Teatro	Dibujo
Informática	Periodismo

- a) ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?
 b) Si en secretaría te advierten de que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) No influye el orden y no podemos repetir las:

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ formas distintas}$$

b) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas diferentes

27 ■■■ El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.

- a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?
 b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes “ni idea”. ¿Se reducen mucho las posibilidades de selección?

a) No podemos repetirlos y no influye el orden:

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \text{ formas}$$

b) En lugar de elegir entre 10, ahora elegimos entre 8:

$$C_{8,5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ formas}$$

Se reduce mucho la selección, aproximadamente en un 77,8%.

PÁGINA 242

28 ■■■ ¿Cuántos grupos de 4 cartas distintas se pueden hacer con una baraja española? ¿Cuántos de ellos están formados por 4 FIGURAS? ¿En cuántos serán OROS las 4 cartas?

La baraja tiene 40 cartas. Se hacen grupos de 4 cartas donde no se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{40,4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 91\,390 \text{ grupos.}$$

Hay 16 figuras:

$$C_{16,4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,820 \text{ grupos están formados solo por figuras.}$$

Hay 10 oros: $C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ grupos serán solo de oros.

11 Soluciones a los ejercicios y problemas

29 ■■■ Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

Al hacer una quiniela es importante el orden y podemos repetir resultados. Por tanto:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 478\,969 \text{ quinielas distintas.}$$

30 ■■■ Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras.

Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto.

¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

- Con 10 dígitos, agrupados de 4 en 4, y teniendo en cuenta que se pueden repetir y que el orden influye, se pueden formar $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ agrupaciones distintas.
- Con 26 letras, formando grupos de 3 y considerando que el orden influye y que las letras se pueden repetir, habrá:

$$VR_{26,3} = 26^3 = 17\,576 \text{ grupos distintos}$$

Por cada grupo de 4 dígitos habrá 17 576 formas de agrupar las letras.

En total habrá: $VR_{10,4} \cdot VR_{26,3} = 175\,760\,000$ matrículas.

31 ■■■ Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños.

He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos.

¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?

El número de formas que hay de elegir los tres libros de entre 5 es:

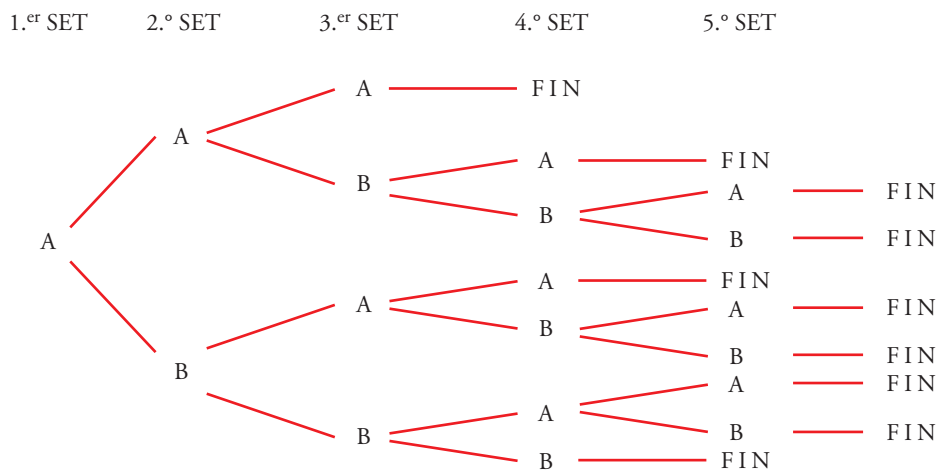
$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ formas}$$

El número de formas que hay de elegir los dos discos de entre 8 es:

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ formas}$$

Para cada una de las formas que hay de elegir los tres libros tenemos 28 formas de elegir los discos, luego en total hay $28 \cdot 10 = 280$ formas de elegir los tres libros y los dos discos.

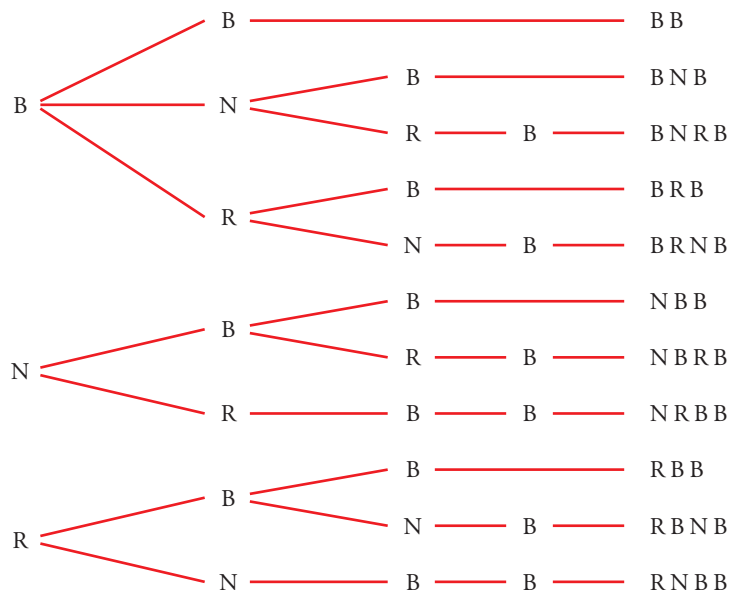
32 ■■■ Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vencedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?



Si el primer set lo gana el jugador B, tenemos un esquema análogo. Por tanto, hay 20 maneras distintas de acabar un partido.

33 ■■■ En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas. ¿Cuáles son los posibles resultados?

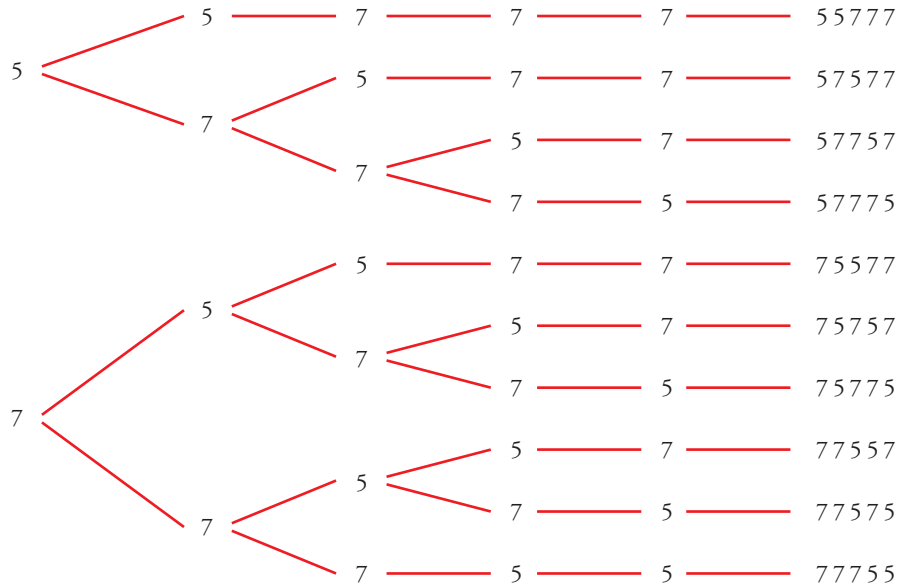
Anotamos en un diagrama de árbol la bola que se saca en cada extracción: blanca (B), negra (N), roja (R)



En total hay 11 posibles resultados.

34 ■■■ El número 75775 está formado por dos cincos y tres setes. ¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres setes?

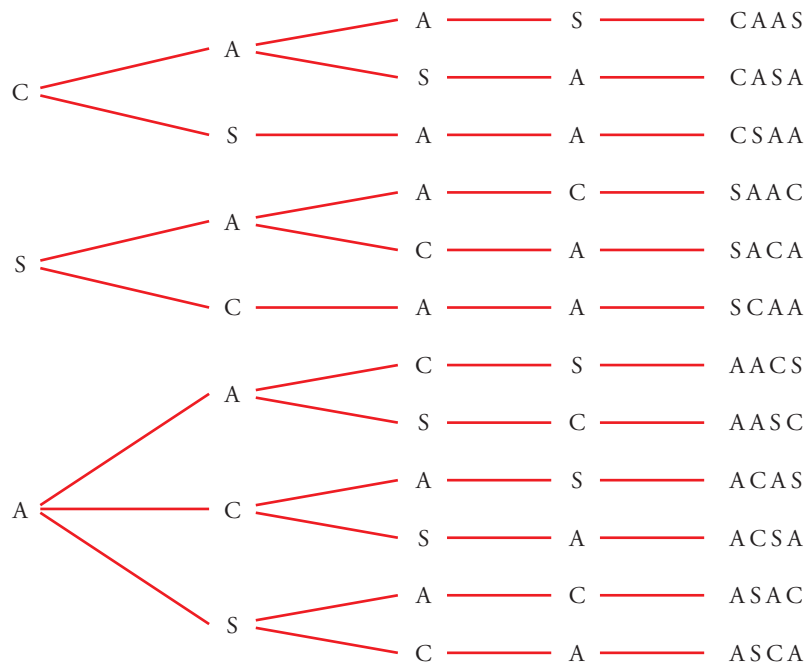
Anotamos, en un diagrama de árbol, las posibilidades de cada cifra del número:



En total hay 10 números formados por dos cincos y tres setes.

35 ■■■ Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

PROFUNDIZA

36 ■■■ Tenemos 5 pesas de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres?

Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

No influye el orden y no se pueden repetir:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ pesadas.}$$

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ pesadas también.}$$

Tomando 1 pesa = 5 pesadas.

Tomando 2 pesas: $C_{5,2} = 10$ pesadas.

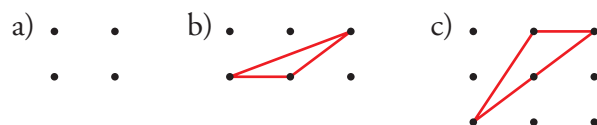
Tomando 3 pesas: $C_{5,3} = 10$ pesadas.


Tomando 4 pesas: $C_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$ pesadas.

Tomando 5 pesas: 1 pesada

En total se podrán hacer: $5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ pesadas

37 ■■■ ¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?



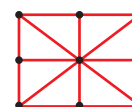
a)  $C_{4,3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ triángulos

b)  $C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Necesitamos tres puntos no alineados para construir un triángulo.

En dos de los 20 casos los puntos están alineados, es decir, se pueden construir $20 - 2 = 18$ triángulos.

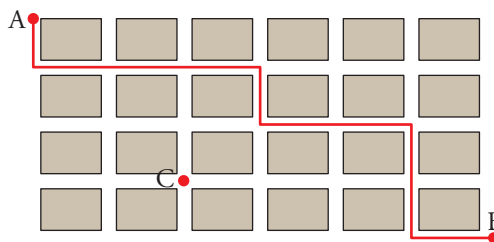
c)  $C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$



En este caso nos encontramos con 8 casos que no son posibles.

En total podemos construir $84 - 8 = 76$ triángulos.

38 ■■■ Esta cuadrícula representa el plano de un barrio de una ciudad.



- a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a C?
 b) ¿Cuántos caminos hay para ir de C a B?
 c) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B, pasando por C?
 d) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B?

a) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares. Es decir:

$$C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ caminos}$$

b) Análogamente, hay:

$$C_{5,1} = \frac{5}{1} = 5 \text{ caminos}$$

c) Para ir de A a C, pasando por B, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

d) Para ir de A a B hay:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

39 ■■■ En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza se pueden preparar?

(Ten en cuenta que las pueden hacer de 4, 5 ó 6 ingredientes).

$$\text{Con 4 ingredientes: } C_{6,4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \text{ tipos}$$

$$\text{Con 5 ingredientes: } C_{6,5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \text{ tipos}$$

$$\text{Con 6 ingredientes: } C_{6,6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \text{ tipo}$$

En total se pueden hacer $15 + 6 + 1 = 22$ tipos de pizzas.

40 ■■■ Un secretario ha escrito cinco cartas distintas dirigidas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes y mete al azar cada carta en un sobre.

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

a) No puede repetirlos y sí influye el orden:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ formas posibles}$$

b) Si fijamos la carta del señor Pérez en el sobre del señor Pérez, nos quedan libres cuatro cartas y cuatro sobres:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ casos habrá en que la carta del señor Pérez estará dentro del sobre del señor Pérez.}$$

41 ■■■ Calcula cuántos productos de tres factores distintos podemos formar con estas cifras:

1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

No influye el orden ($3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$) y no podemos repetirlos:

$$C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ productos.}$$

PÁGINA 243

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

42 ■■■ En una bolsa tenemos 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.

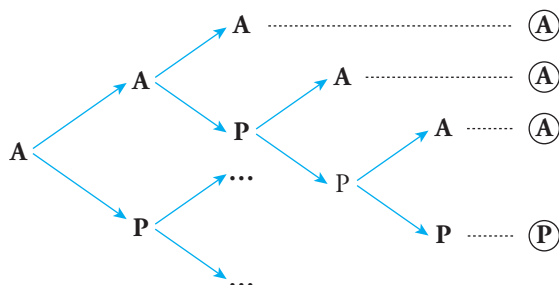
$$a) P[3 \text{ ROJAS}] = P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] \cdot P[\text{ROJA}] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$b) P[3 \text{ VERDES}] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

$$c) P[\text{ROJAS o VERDES}] = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{10}$$

$$d) P[\text{una AZUL}] = P[1.ª \text{ AZUL}] + P[2.ª \text{ AZUL}] + P[3.ª \text{ AZUL}] = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

- 43** ■■■ Andrés y Pablo están jugando al tenis. Ambos son igual de buenos. El partido es a cinco sets y el primero lo ha ganado Andrés. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe ganando Pablo?



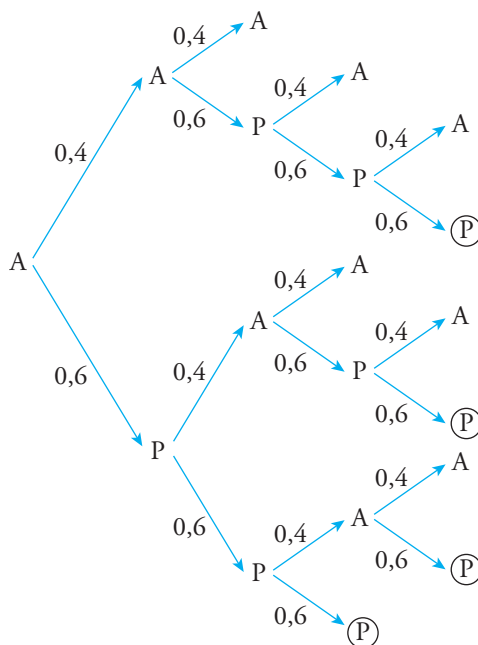
Completa el diagrama y utilízalo para resolver el problema.

Si Andrés gana el primer set, se pueden dar estos resultados:

AAA AAPA AAPPA AAPPP
 APAA APAPA APAPP
 APPAA APPAP APPP

$$\text{Por tanto, } P[\text{gane Pablo}] = \frac{4}{10}$$

- 44** ■■■ Repite el problema anterior suponiendo que en cada set, la probabilidad de que lo gane Pablo es 0,6.



$$\begin{aligned} P[\text{gane Pablo}] &= 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + \\ &+ 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + \\ &+ 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + \\ &+ 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,4752 \end{aligned}$$

45 ■■■ Cinco amigos y amigas van juntos al cine y se reparten los asientos (consecutivos) al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que Alberto quede junto a Julia?

Hay $P_5 = 5! = 120$ formas en que pueden sentarse los cinco amigos en el cine. De ellas, hay 8 en las que Julia se sentará al lado de Alberto.

Por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

46 ■■■ Tiramos tres dados. Calcula estas probabilidades:

- El valor mediano es 6.
- La suma es 10.
- El menor es 2.
- La diferencia entre el mayor y el menor es 2.

a) Eso significa que los tres son 6.

$$P[\text{valor mediano } 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

b) Para que los tres dados sumen 10, debe darse alguna de estas combinaciones:

$$\left. \begin{array}{l} (1 \ 3 \ 6) \\ (1 \ 4 \ 5) \\ (2 \ 2 \ 6) \\ (2 \ 3 \ 5) \\ (2 \ 4 \ 4) \\ (3 \ 3 \ 4) \end{array} \right\} 6 \text{ posibilidades}$$

Por tanto:

$$P[\text{sumen } 10] = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

c) $P[\text{menor es } 2] = P[\text{no sale ningún } 1 \text{ y por lo menos un } 2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

d) • Si el menor es 1 $\rightarrow (1 \ 1 \ 3)$

$(1 \ 2 \ 3)$

$(1 \ 3 \ 3)$

• Si el menor es 2 $\rightarrow (2 \ 2 \ 4)$

$(2 \ 3 \ 4)$

$(2 \ 4 \ 4)$

• Si el menor es 3 $\rightarrow (3 \ 3 \ 5)$

$(3 \ 4 \ 5)$

$(3 \ 5 \ 5)$

• Si el menor es 4 $\rightarrow (4 \ 4 \ 6)$

$(4 \ 5 \ 6)$

$(4 \ 6 \ 6)$

$$\text{Por tanto, } P[\text{diferencia de } 2] = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

- 47** ■■■ Si juegas un boleto de la Lotería Primitiva, ¿qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? (En un boleto se marcan 6 números entre el 1 y el 49).

En la Primitiva se pueden rellenar $C_{49,6} = 13\,983\,816$ boletos distintos, de los que solo gana el premio máximo uno. Así:

$$P[\text{ganar}] = \frac{1}{13\,983\,816}$$

- 48** ■■■ ¿Cuántas quinielas hay que hacer para asegurarse ocho resultados? Una persona que siga esa estrategia y rellena los restantes al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar los 14?

a) Para asegurar 8, hay que hacer $VR_3^8 = 3^8 = 6\,561$ quinielas distintas.

b) Como quedan 6 casillas por rellenar, la probabilidad de acertar las 6 restantes será:

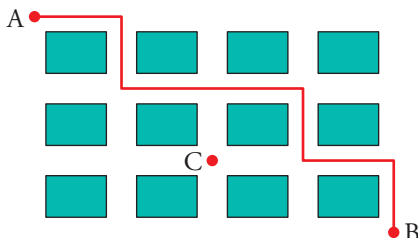
$$P[\text{acertar 14}] = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

- 49** ■■■ Una oposición consta de 50 temas. Salen 3 de ellos al azar y se debe elegir uno de ellos. Un opositor sabe 30. ¿Cuál es la probabilidad de que salga uno de los que sabe?

☞ *Acaso te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno que se sepa.*

$$P[\text{sabe}] = 1 - P[\text{no sabe}] = 1 - \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = 1 - \frac{6\,840}{117\,600} = \frac{923}{980} = 0,94$$

- 50** ■■■



Para ir de A a B, hay que dar 7 pasos en cada uno de los cuales se puede escoger \rightarrow o \downarrow . Por ejemplo, el recorrido marcado en rojo se puede describir así:

$$\rightarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \downarrow$$

Cada recorrido es una combinación de cuatro pasos así \rightarrow y tres pasos así \downarrow . El número total de caminos es C_7^3 .

- a) ¿Cuántos posibles caminos hay para ir de A a C? ¿Cuántos para ir de C a B?
 b) ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B pasando por el punto C?
 c) Una persona va de A a B decidiendo aleatoriamente el camino. ¿Cuál es la probabilidad de que pase por el punto C?

a) Para ir de A a C, hay:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ caminos}$$

11 Soluciones a los ejercicios y problemas

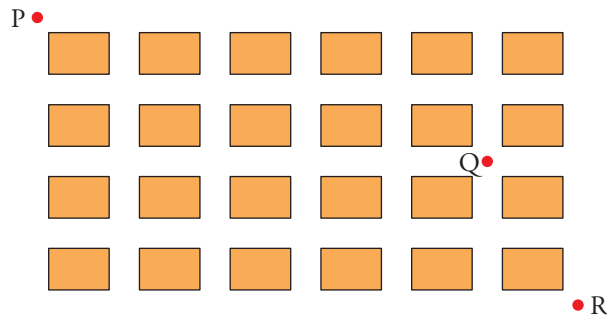
Para ir de C a B, hay:

$$C_3^1 = \frac{3}{1} = 3 \text{ caminos}$$

b) Hay $6 \cdot 3 = 18$ caminos.

$$c) P[A \text{ a B, pasando por C}] = \frac{18}{C_7^3} = \frac{18}{35} = 0,51$$

51 ■■■ Sergio sabe que Lupe va a ir de P a R. Decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?



Caminos totales para ir de P a R:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ caminos}$$

Para ir de P a Q:

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ caminos}$$

Para ir de Q a R:

$$C_3^1 = 3 \text{ caminos}$$

Para ir de P a R, pasando por Q:

$$21 \cdot 3 = 63 \text{ caminos}$$

$$P[\text{encontrarse en Q}] = \frac{63}{210} = 0,3$$