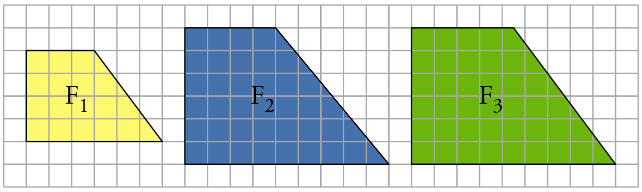
PÁGINA 180

PRACTICA

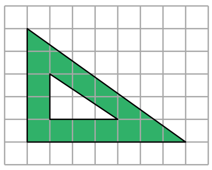
Figuras semejantes

1 **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?**



F_1 es semejante a F_3. La razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.

2 **a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?**



b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?

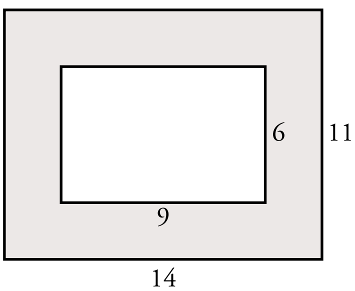
a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $2 \cdot 2{,}5 = 5$

$3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$

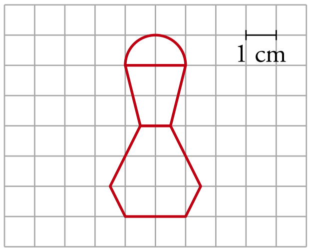
Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

3 **Una fotografía de 9 cm de ancho y 6 cm de alto tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**



$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow$ No son semejantes.

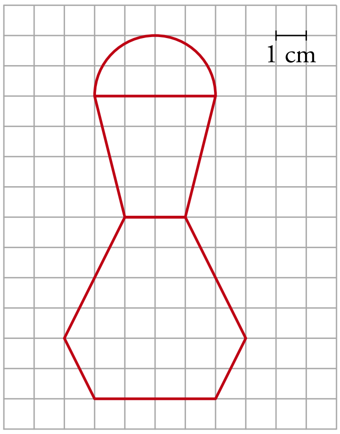
4 □□□ **Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura duplicando su tamaño.**



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula su superficie.

a)



b) • El área de las dos partes inferiores se puede hallar sin más que contar cuadraditos:

$$26 + 12 = 38 \text{ cm}^2$$

• La parte de arriba es medio círculo de radio 2. Por tanto, su superficie es:

$$\frac{1}{2}(\pi \cdot r^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi \text{ cm}^2$$

• La superficie total de la figura es:

$$S = (38 + 2\pi) \text{ cm}^2$$

5 □□□ **Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?**

$$\text{Área} = \frac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$$

En el plano ocupará $\frac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2$.

6 □□□ **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

a) $\left.\begin{array}{lcc} 1 \text{ cm} & \rightarrow & 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} & \rightarrow & \text{h} \\ 4 \text{ cm} & \rightarrow & d \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{h} = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}$

La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

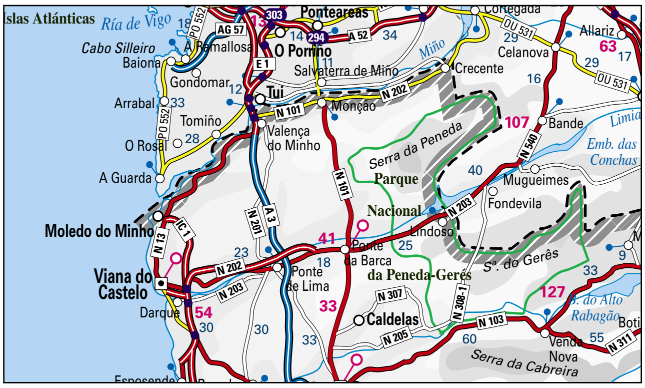
c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

7 **En este mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre Monçao y Ponte da Barca es 2 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real?

b) Calcula la distancia entre Viana do Castelo y Valença do Minho.

c) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?



a) Distancia real $= 2 \cdot 1\,500\,000 = 3\,000\,000$ cm $= 30$ km

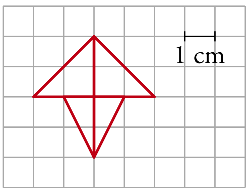
b) En el mapa, midiendo, vemos que la distancia entre las dos localidades mencionadas es 2,5 cm. Por tanto:

Distancia real $= 2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000$ cm $= 37{,}5$ km

c) 180 km = 18 000 000 cm

Distancia en el mapa $= \dfrac{18\,000\,000}{1\,500\,000} = 12$ cm

8 **Esta figura es el logotipo de una empresa automovilística. Quieren reproducirlo de forma que ocupe 54 cm² de superficie. ¿Cuáles serán sus dimensiones? Dibújalo.**

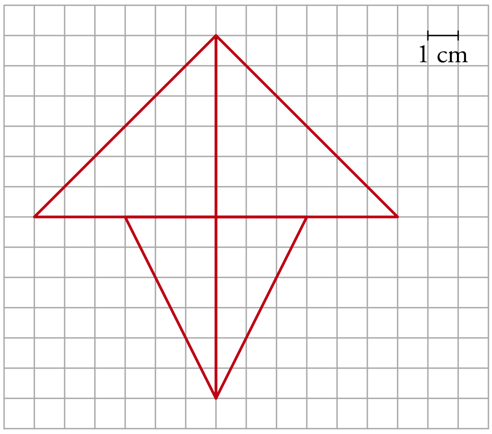


La superficie del logotipo es, siempre, de 6 cuadraditos (consideramos que al hacer la ampliación, también se amplían en la misma proporción los cuadraditos).

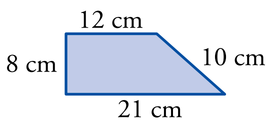
Necesitamos que la superficie de 6 cuadraditos de lado l sea 54 cm^2. Por tanto:

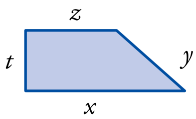
$$6\,l^2 = 54 \rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

Esto es, tenemos que hacer una ampliación en la que 1 cm se convierte en 3 cm. Luego las dimensiones de la figura serán:



9 **¿Cuánto medirán los lados de un trapecio semejante al de la figura, cuyo perímetro sea 163,2 cm?**





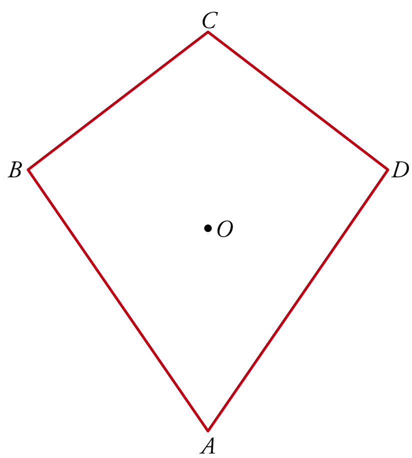
El perímetro de la figura inicial mide 21 + 10 + 12 + 8 = 51 cm.

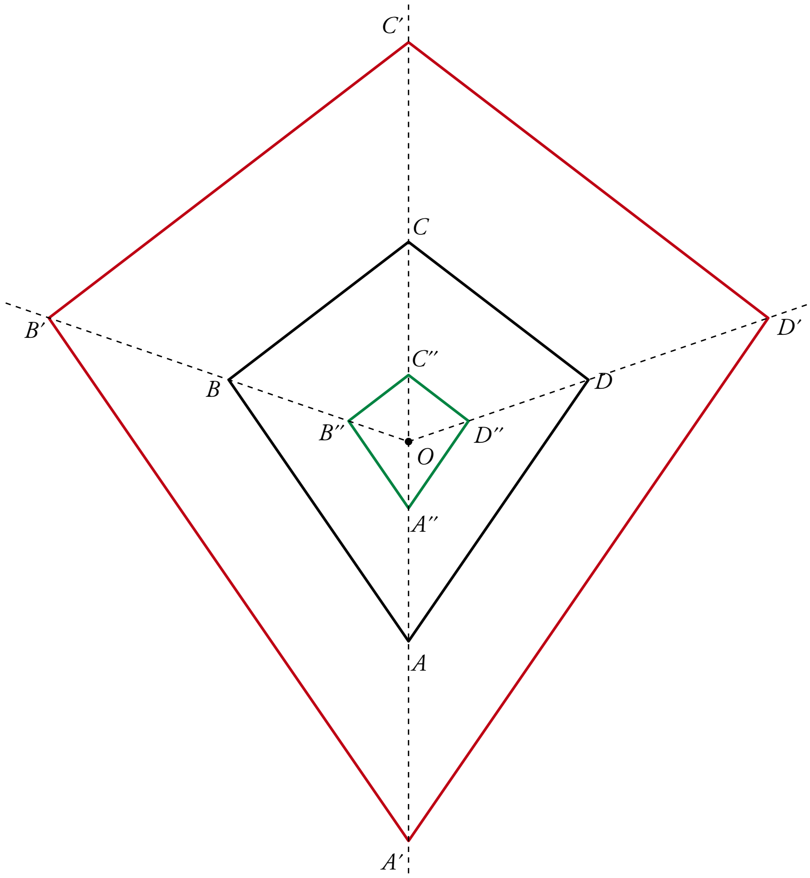
Por tanto: $\dfrac{163{,}2}{51} = \dfrac{x}{21} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{z}{12} = \dfrac{t}{8}$

$x = 67{,}2$ cm; $y = 32$ cm; $z = 38{,}4$ cm; $t = 25{,}6$ cm

10 **a) Copia esta figura en tu cuaderno y amplíala al doble tomando *O* como centro de homotecia.**

b) Redúcela a 1/3 tomando *A* como centro de homotecia.





PÁGINA 181

Semejanza de triángulos

11 **Comprueba si son semejantes dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones siguientes:**

a) $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

a) Comprobamos si los lados son proporcionales. Esto es, si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \rightarrow \frac{10}{25} = \frac{18}{45} = \frac{12}{30} = 2,5$$

Sí son semejantes.

b) Procediendo como en el apartado anterior, es claro que no son semejantes:

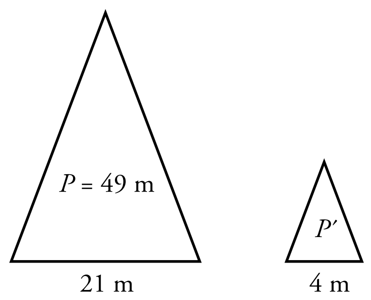
$$\frac{20}{40} \neq \frac{30}{50} \neq \frac{40}{60}$$

c) Comprobamos si los dos triángulos tienen sus ángulos iguales:

$\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97° \rightarrow \hat{C} = 180° - 58° - 97° = 25°$

Como $\hat{C} \neq \hat{C}'$, los triángulos no son semejantes.

12 **El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?**



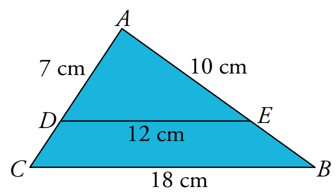
$$\frac{21}{4} = 5{,}25$$

Perímetro del triángulo semejante:

$$P' = \frac{49}{5{,}25} = 9{,}33 \text{ m}$$

La razón de semejanza es 5,25.

13 **En el triángulo ABC hemos trazado $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CB}$.**



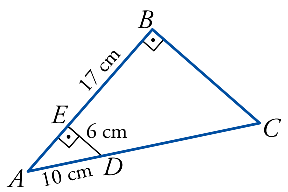
¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y ADE? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

Los triángulos son semejantes porque están en posición de Tales.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{7 \cdot 18}{12} = 10{,}5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{10 \cdot 18}{12} = 15 \text{ cm}$$

14 **¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y AED?**



Halla el perímetro del trapecio $EBCD$.

Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; $\overline{AB} = 8 + 17 = 25$ cm

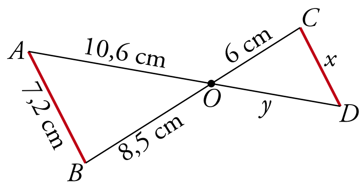
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

  $x = 21,25 \rightarrow \overline{DC} = 21,25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18,75$ cm

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18,75 + 21,25 + 6 = 63$ cm

15 **Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos *OAB* y *ODC*.

b) Calcula *x* e *y*.

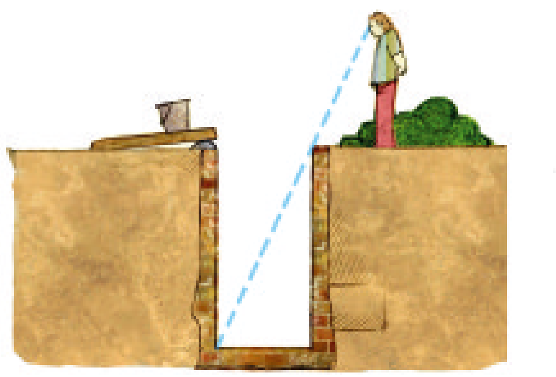
a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

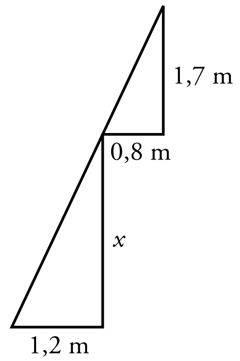
b) $\dfrac{x}{7,2} = \dfrac{6}{8,5} \rightarrow x = \dfrac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08$ cm

$\dfrac{6}{8,5} = \dfrac{y}{10,6} \rightarrow y = \dfrac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48$ cm

PIENSA Y RESUELVE

16 **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

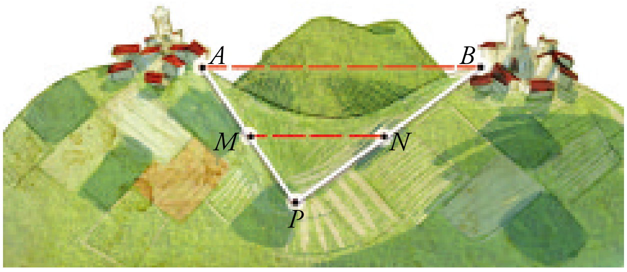


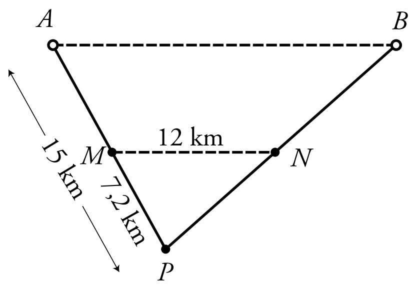


$$\frac{x}{1,7} = \frac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

17 **Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia AB, fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas:**
$\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (MN es paralela a AB). Calcula la distancia $\overline{AB}$.

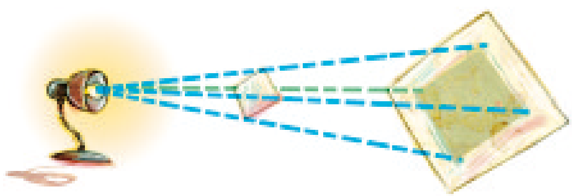




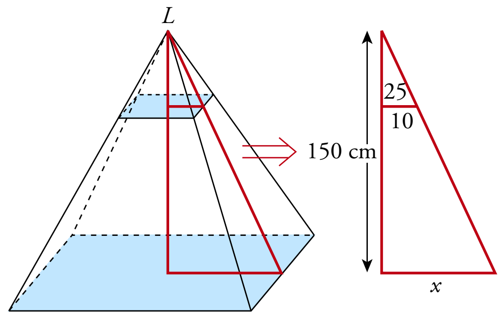
Los triángulos APB y MPN son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

18 **Una lámpara situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.**



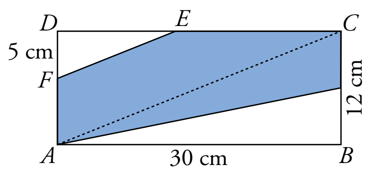
¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

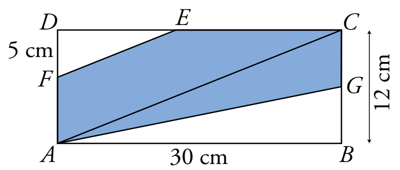


$\rightarrow \dfrac{x}{150} = \dfrac{10}{25} \rightarrow x = \dfrac{10 \cdot 150}{25} = 60$

Por tanto, el lado del cuadrado proyectado mide $2 \cdot 60 = 120$ cm.

19 **Si $\overline{DF} = 5$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono *FECGA*?**





$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32{,}31$ cm

Los triángulos *FDE* y *ADC* son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32{,}31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13{,}46 \text{ cm}$$

En el triángulo *FDE*, $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13{,}46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12{,}5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30{,}59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12{,}5 \cdot 5}{2} = 31{,}25 \text{ cm}^2$

Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $\approx 30 \cdot 12 - 31{,}25 - 90 = 238{,}75 \text{ cm}^2$

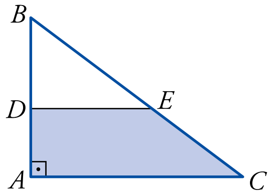
Perímetro del pentágono:

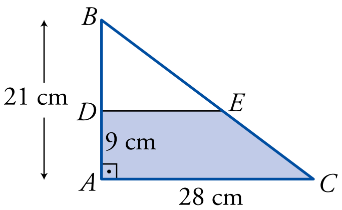
$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} \approx 13{,}46 + 17{,}5 + 6 + 30{,}59 + 7 = 74{,}55 \text{ cm}$$

PÁGINA 182

20 **Los catetos del triángulo rectángulo *ABC* miden $\overline{AC}$ = 28 cm y $\overline{AB}$ = = 21 cm.**

Desde el punto *D* tal que $\overline{AD}$ = 9 cm, se traza una paralela a *AC*. Halla el área y el perímetro del trapecio *ADEC*.





Los triángulos *ABC* y *DBE* son semejantes.

Por ello:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \to \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \to \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

Calculamos la hipotenusa de cada uno de los triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ cm} \\ \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \quad \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

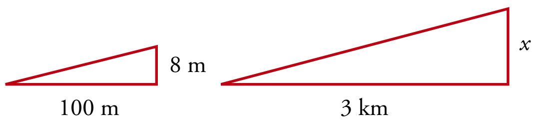
Perímetro del trapecio *ADEC* = 9 + 16 + 15 + 28 = 68 cm

21 **En una carretera de montaña, nos encontramos una señal que nos advierte que la pendiente es del 8%; es decir, por cada 100 m que recorremos, el desnivel es de 8 m.**

a) ¿Cuál es el desnivel que se produce cuando recorremos 3 km?

b) Para que el desnivel sea de 500 m, ¿cuántos kilómetros tendremos que recorrer?

a)

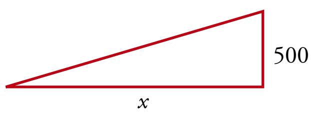


$$\to \frac{x}{3\,000} = \frac{8}{100} \to$$

$$\to x = \frac{8 \cdot 3\,000}{100} = 240 \text{ m}$$

Se produce un desnivel de 240 m.

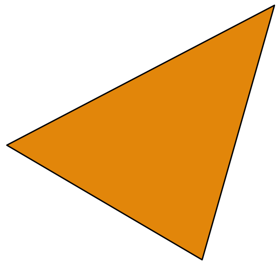
b)

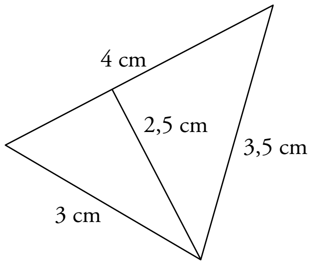


$$\to \frac{x}{500} = \frac{100}{8} \to x = \frac{100 \cdot 500}{8} = 6\,250 \text{ m}$$

Tendremos que recorrer 6,25 km.

22 ■■□ **Esta figura representa, a escala 1:2 000, una parcela de terreno. Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.**





PLANO		REALIDAD
3 cm	→	$3 \cdot 2\,000 = 6\,000$ cm = 60 m
3,5 cm	→	$3{,}5 \cdot 2\,000 = 7\,000$ cm = 70 m
4 cm	→	$4 \cdot 2\,000 = 8\,000$ cm = 80 m
2,5 cm	→	$2{,}5 \cdot 2\,000 = 5\,000$ cm = 50 m

$P = 60 + 70 + 80 = 210$ m

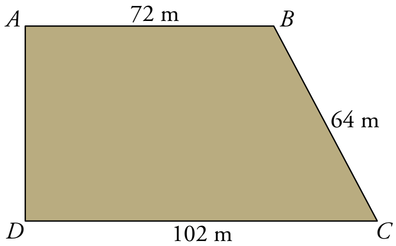
$S = \frac{1}{2}(80 \cdot 50) = 2\,000 \text{ m}^2$

23 ■■□ **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del menor es 26 cm^2, ¿cuál es el área del mayor?**

Razón de semejanza $= \frac{13{,}6}{8} = 1{,}7$

Área del segundo $= 26 \cdot 1{,}7^2 = 75{,}14 \text{ cm}^2$

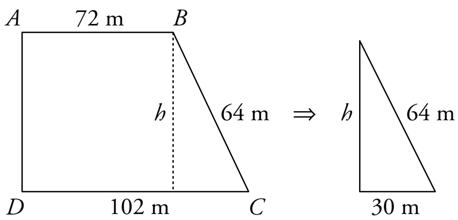
24 ■■□ **Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura.**



a) Calcula su área.

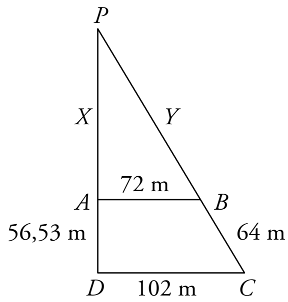
b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados *AD* y *BC*. ¿A qué distancia de *A* y de *B* estará el pozo?

a)



$\Rightarrow h = \sqrt{64^2 - 30^2} = 56{,}53$ m

$A = \frac{(72 + 102) \cdot 56{,}33}{2} = 4\,918{,}11 \text{ m}^2$

b) 

$$\frac{x}{72} = \frac{x + 56{,}53}{102} \rightarrow 102x = 72x + 4\,070{,}16 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4\,070{,}16}{30} = 135{,}67 \text{ m}$$

$$\frac{y}{72} = \frac{y + 64}{102} \rightarrow 102y = 72y + 4\,608 \rightarrow$$

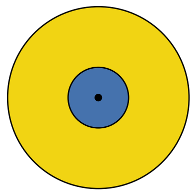
$$\rightarrow y = \frac{4\,608}{30} = 153{,}6 \text{ m}$$

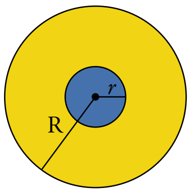
El pozo estará a 135,67 m de A y a 153,6 m de B.

25 ■□□ **En estos dos círculos concéntricos, el radio del mayor es el triple del menor.**

a) Si el área del mayor es 951 cm², ¿cuál es el área del menor?

b) Calcula el radio de cada círculo.



a) 

$R = 3r$

Si los radios están en proporción de 3 a 1, las áreas lo están en proporción $3^2 = 9$ a 1.

Por tanto, el área del menor es 951 : 9 = 105,67 cm².

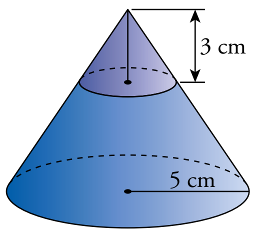
b) $\pi R^2 = 951 \rightarrow R = \sqrt{\dfrac{951}{\pi}} = 17{,}4$ cm

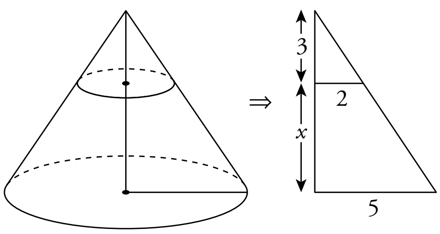
$r = \dfrac{R}{3} = \dfrac{17{,}4}{3} = 5{,}8$ m

26 ■■□ **Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice.**

La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Halla el volumen del embudo.





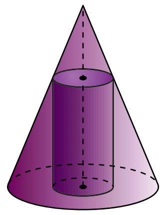
$$\frac{3 + x}{5} = \frac{3}{2} \rightarrow 3 + x = \frac{15}{2} \rightarrow$$

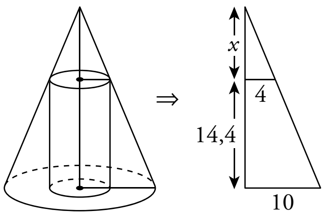
$$\rightarrow x = \frac{15}{2} - 3 = 4{,}5 \text{ cm}$$

El volumen del embudo será la diferencia entre el volumen de un cono de 5 cm de radio y 7,5 cm de altura, y el volumen de otro cono de 2 cm de radio y 3 cm de altura.

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5) - \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2 \cdot 3) = \frac{1}{3}\pi\,(25 \cdot 7{,}5 - 4 \cdot 3) = 58{,}5\pi \text{ cm}^3$$

27 □□□ **Hemos recubierto con un tejado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de radio y 14,4 m de altura. Si el radio del cono es 10 m, ¿cuál es el volumen de la zona comprendida entre el cono y el cilindro?**





$\rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{x + 14{,}4}{10} \rightarrow 10x = 4x + 57{,}6 \rightarrow$

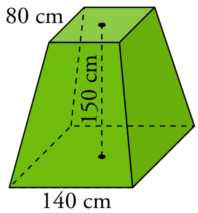
$\rightarrow x = \dfrac{57{,}6}{6} = 9{,}6$ m

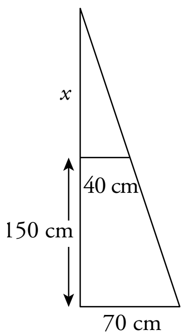
$V_{\text{CONO}} = \dfrac{1}{3}(\pi \cdot 10^2) \cdot (14{,}4 + 9{,}6) = 800\pi \text{ m}^3$

$V_{\text{CILINDRO}} = (\pi \cdot 4^2) \cdot 14{,}4 = 230{,}4\pi \text{ m}^3$

$V = V_{\text{CONO}} - V_{\text{CILINDRO}} = 800\pi - 230{,}4\pi = 569{,}6\pi \text{ m}^3$

28 □□□ **La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su volumen.**





Calculamos la altura de la pirámide:

$\dfrac{x + 150}{x} = \dfrac{70}{40} \rightarrow 40x + 6\,000 = 70x \rightarrow 30x = 6\,000 \rightarrow$

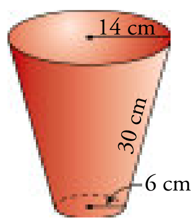
$\rightarrow x = 200$ cm

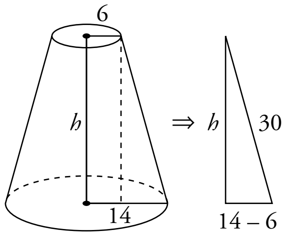
Altura $= 200 + 150 = 350$ cm

Volumen tronco $= V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}}$

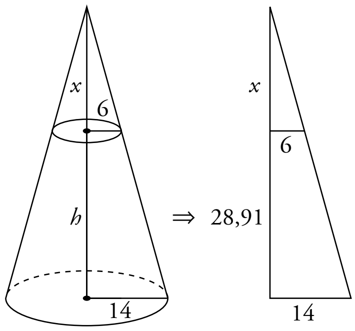
$V = \dfrac{1}{3} 140^2 \cdot 350 - \dfrac{1}{3} 8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$

29 □□□ **Halla el volumen de una maceta como la de la figura, en la que los radios de las bases miden 6 cm y 14 cm, y la generatriz, 30 cm.**





$h = \sqrt{30^2 - 8^2} = 28{,}91$ cm



$\frac{x}{6} = \frac{x + 28{,}91}{14} \rightarrow 14x = 6x + 173{,}46 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{173{,}46}{8} = 21{,}68$ m

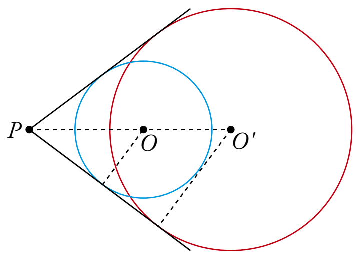
$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 14^2) \cdot (28{,}91 + 21{,}68) = 3\,305{,}21\pi \text{ cm}^3$

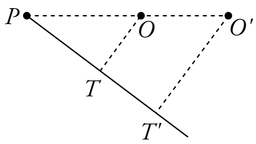
$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 6^2) \cdot (21{,}68) = 260{,}16\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{MACETA}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = (3\,305{,}21 - 260{,}16)\,\pi = 3\,045{,}05\pi \text{ cm}^3$

La maceta tiene un volumen de 9 561,46 cm^3.

30 **Desde un punto *P*, trazamos las tangentes comunes a dos circunferencias. Las distancias de *P* a los centros son $\overline{PO} = 17$ cm y $\overline{PO'} = 30$ cm. Si el radio de la mayor mide 18 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?**





$\frac{\overline{OT}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{O'T'}}{\overline{PO'}} \rightarrow \frac{\overline{OT}}{17} = \frac{18}{30} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{OT} = \frac{18 \cdot 17}{30} = 10{,}2$ cm

El radio de la menor mide 10,2 cm.