PÁGINA 162

PRACTICA

Funciones cuadráticas

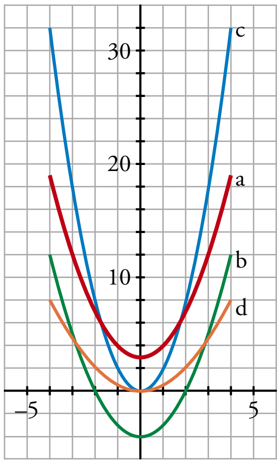
1 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$

c) $y = 2x^2$ **d)** $y = 0{,}5x^2$

	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
a)	y	19	12	7	4	3	4	7	12	19
b)	y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12
c)	y	32	18	8	2	0	2	8	18	32
d)	y	8	9/2	2	1/2	0	1/2	2	9/2	8



a) Vértice: (0, 3)

b) Vértice: (0, –4)

c) Vértice: (0, 0)

d) Vértice: (0, 0)

2 **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Vértice: (–4, 0)

Cortes con los ejes: (–4, 0)

Otros puntos(–5, 1), (–6, 4), (–3, 1), (–2, 4)

b) Vértice: (–3, –3)

Cortes con los ejes: (–6, 0), (0, 0)

Otros puntos: $\left(-5, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

c) Vértice: (1, 0)

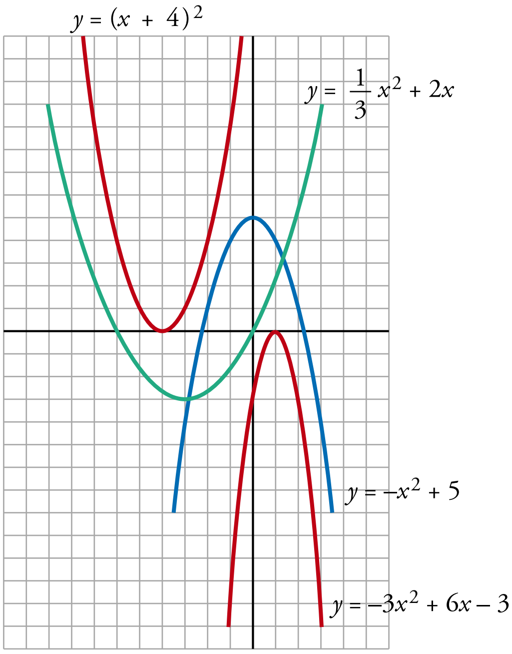
Cortes con los ejes: (1, 0)

Otros puntos: (0, –3), (2, –3), (–1, –12), (3, –12)

d) Vértice: $(0, 5)$

Cortes con los ejes: $(0, 5)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

Otros puntos: $(-1, 4)$, $(-2, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$



3 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$

c) $y = -2x^2 - 4x + 6$ **d)** $y = 3x^2 - 6x$

e) $y = x^2 + 4x + 4$ **f)** $y = -5x^2 + 10x - 3$

a) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto $(0, -5)$. Es un mínimo.

b) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto $(0, 3)$. Es un máximo.

c) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \\ x = -1 \rightarrow y = 8 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto $(-1, 8)$. Es un máximo.

d) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = -3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto $(1, -3)$. Es un mínimo.

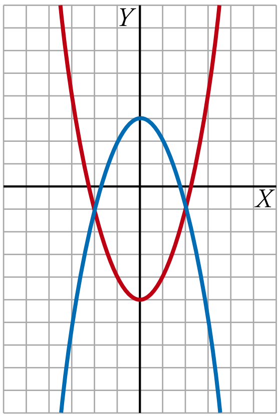
e) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x = -2 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto $(-2, 0)$. Es un mínimo.

f) $\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{-10} = 1 \\ y = -5 + 10 - 3 = 2 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, 2). Es un máximo.

4 **Representa cada una de las parábolas del ejercicio anterior.**

a) y b)

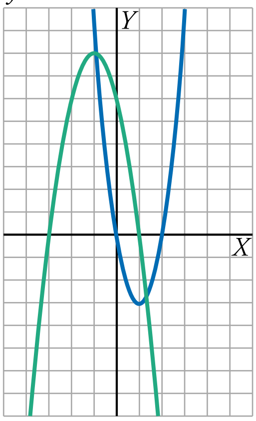
$y = x^2 - 5$



$y = 3 - x^2$

c) y d)

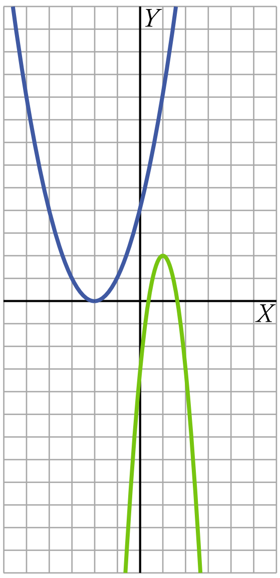
$y = 3x^2 - 6x$



$y = -2x^2 - 4x + 6$

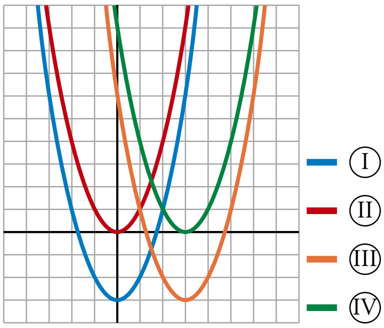
e) y f)

$y = x^2 + 4x + 4$



$y = -5x^2 + 10x - 3$

5 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

a) $y = x^2 \leftrightarrow$ II

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow$ IV

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow$ I

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow$ III

Otras funciones

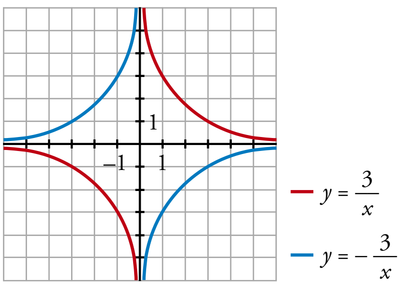
6 **Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:**

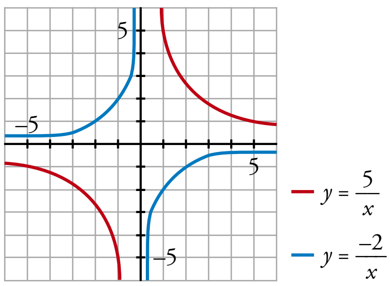
a) $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

c) $y = \dfrac{5}{x}$ $\quad x = -5; -1; -1/2; 1/2; 1; 5$

d) $y = -\dfrac{2}{x}$ $\quad x = -2; -1; -1/2; 1/2; 1; 2$





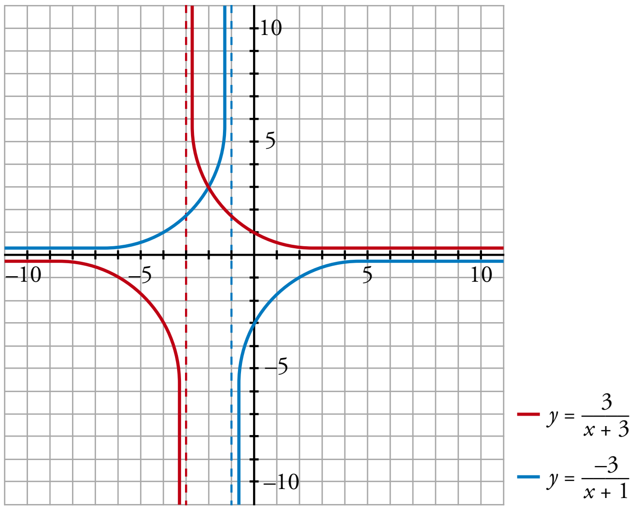
7 **Halla las asíntotas de cada una de estas funciones hiperbólicas y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:**

a) $y = \dfrac{3}{x+3}$ **b)** $y = \dfrac{-3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{5}{1-x}$ **d)** $y = \dfrac{-7}{x-1}$

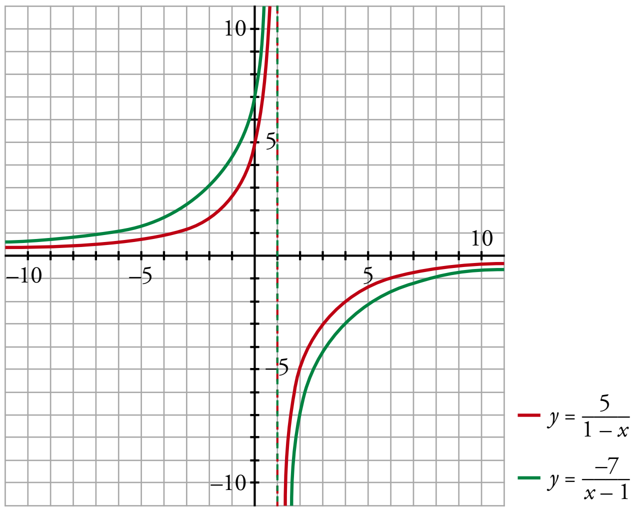
a) Asíntota → $x = -3$

b) Asíntota → $x = -1$

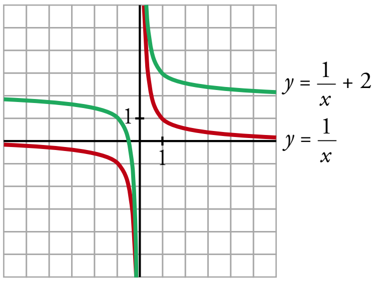


c) Asíntota → $x = 1$

d) Asíntota → $x = 1$



8 **Observa estas hipérbolas y contesta:**



a) ¿A qué valor se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más grandes?

b) ¿A qué valores se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más próximos a cero?

c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de cada función?

d) Dibuja la gráfica de $y = \frac{1}{x+2}$. ¿Cuáles son sus asíntotas?

a) Roja → 0

Verde → $x = 2$

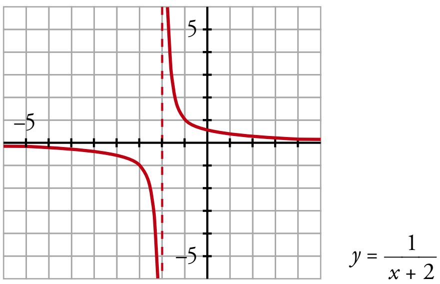
b) Roja → infinito o menos infinito

Verde → infinito o menos infinito

c) Roja → $y = 0$

Verde → $y = 2$

d)



Asíntotas: $x = -2$, $y = 0$

9 **Halla las asíntotas de cada una de estas hipérbolas y represéntalas gráficamente:**

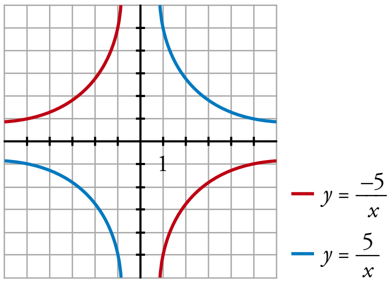
a) $y = \frac{-5}{x}$ **b)** $y = \frac{5}{x}$

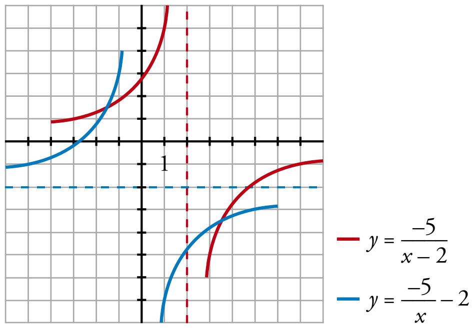
c) $y = \frac{-5}{x-2}$ **d)** $y = \frac{-5}{x} - 2$

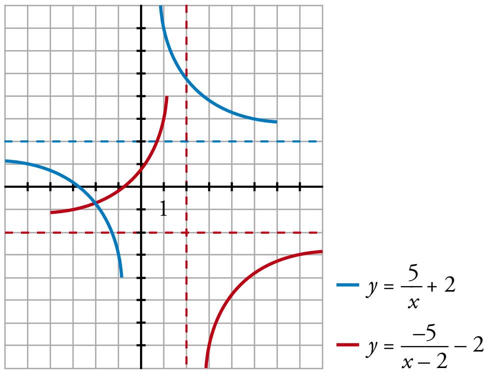
e) $y = \frac{5}{x} + 2$ **f)** $y = \frac{-5}{x-2} - 2$

Asíntotas → a) $x = 0$, $y = 0$ b) $x = 0$, $y = 0$ c) $x = 2$, $y = 0$

d) $x = 0$, $y = -2$ e) $x = 0$, $y = 2$ f) $x = 2$, $y = -2$

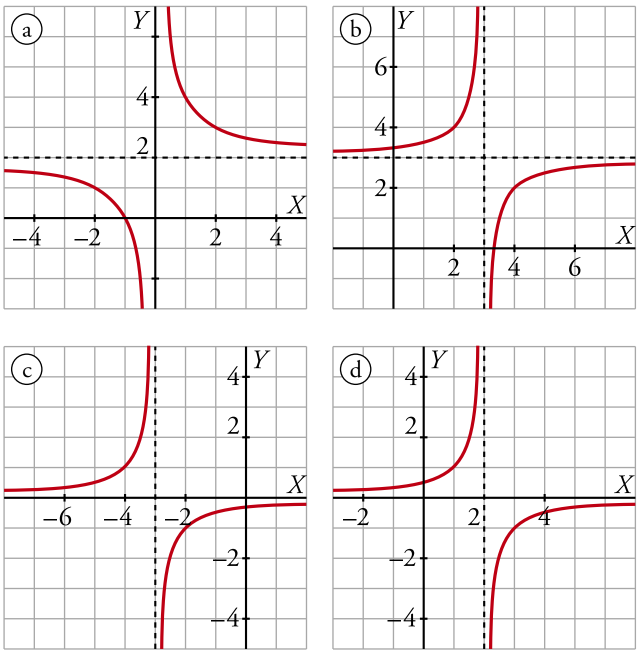






PÁGINA 163

10 **Asocia a cada gráfica una de las fórmulas que aparecen abajo:**



I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ **II)** $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$ **III)** $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ **IV)** $y = \dfrac{-1}{x + 3}$

I $\rightarrow$ d) II $\rightarrow$ b) III $\rightarrow$ a) IV $\rightarrow$ c)

11 **Ayudándote de una tabla de valores, representa gráficamente las siguientes funciones. Para los apartados a) y b), da valores positivos a la x, y para los apartados c) y d), negativos. Di cuál es el dominio de definición de cada una de ellas:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

a) $y = \sqrt{x} + 2$

x	0	1	4	9	16
y	2	3	4	5	6

Dominio = $[0, +\infty)$

b) $y = 2 - \sqrt{x}$

x	0	1	4	9	16
y	2	1	0	–1	–2

Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x}$

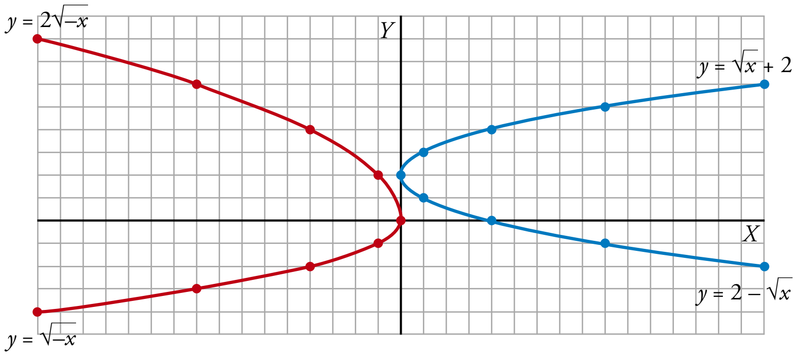
x	0	–1	–4	–9	–16
y	0	2	4	6	8

Dominio = $(-\infty, 0]$

d) $y = -\sqrt{-x}$

x	0	–1	–4	–9	–16
y	0	–1	–2	–3	–4

Dominio = $(-\infty, 0]$



12 **Representa gráficamente cada una de estas funciones, dando los valores que se indican en cada caso. Di cuál es el dominio de definición de cada una de ellas:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ $\quad x = 2; -2; -7$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$ $\quad x = -2; 0; 6$

c) $y = \sqrt{-x}$ $\quad x = 0; -4; -9$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$ $\quad x = -3; 1; 6$

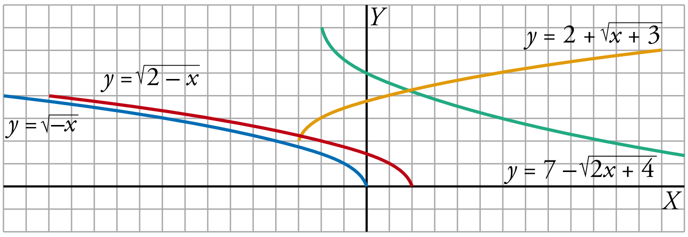
Date cuenta de que para cada una de las funciones hay valores que no se pueden dar y fíjate después en que estos valores no se encuentran en su dominio de definición.

a) $y = \sqrt{2 - x} \longrightarrow (2, 0), (-2, 2), (-7, 3)$. Dominio $= (-\infty, 2]$

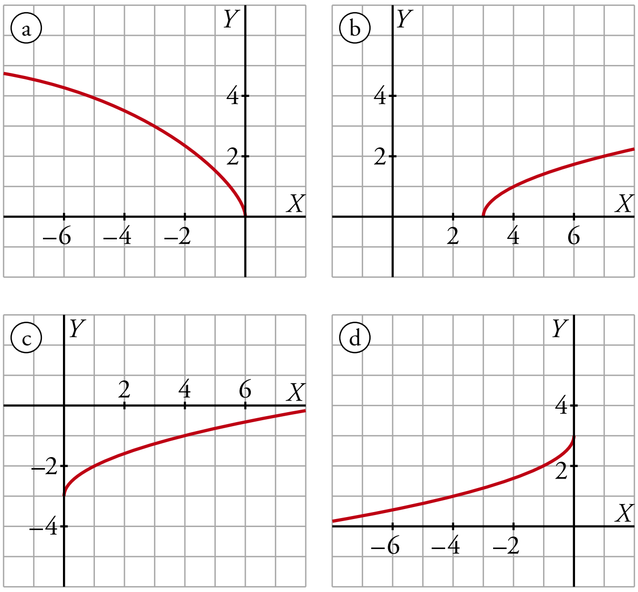
b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4} \longrightarrow (-2, 7), (0, 5), (6, 3)$. Dominio $= [-2, +\infty)$

c) $y = \sqrt{-x} \longrightarrow (0, 0), (-4, 2), (-9, 3)$. Dominio $= (-\infty, 0]$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3} \longrightarrow (-3, 2), (1, 4), (6, 5)$. Dominio $= [-3, +\infty)$

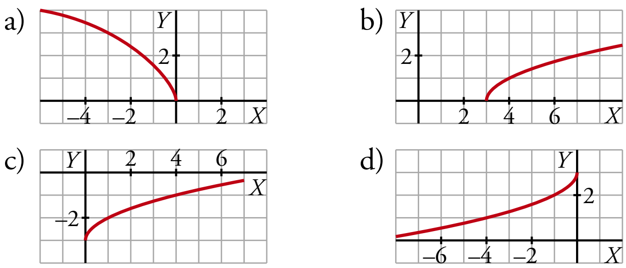


13 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponda:**



I) $y = \sqrt{x - 3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$



I $\leftrightarrow$ b)

II $\leftrightarrow$ c)

III $\leftrightarrow$ d)

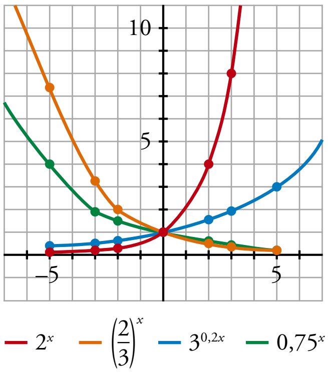
IV $\leftrightarrow$ a)

14 ■□□ **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores.**

(Ayúdate de la calculadora).

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^{0,2x}$

c) $y = (2/3)^x$ **d)** $y = 0,75^x$

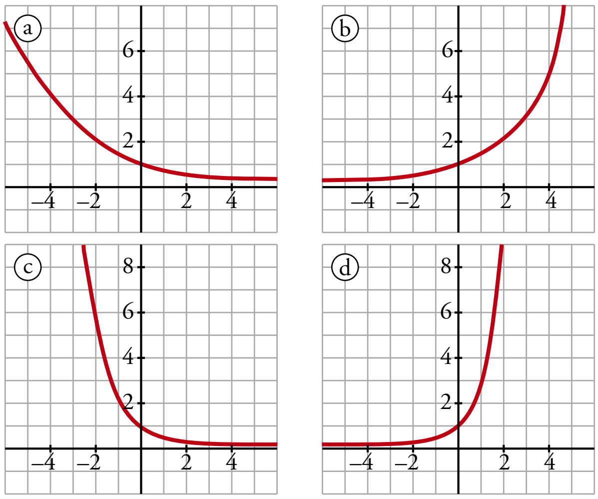


	x						
	–5	–3	–2	0	2	3	5
$y = 2^x$	1/32	1/8	1/4	1	4	8	32
$y = 3^{0,2x}$	1/3	0,52	0,64	1	1,55	1,9	3
$y = (2/3)^x$	7,59	3,37	2,25	1	$0,\widehat{4}$	0,296	0,132
$y = 0,75^x$	4,21	2,37	$1,\widehat{7}$	1	0,56	0,42	0,24

15 ■□□ **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1,5^x$

III) $y = 0,4^x$ **IV)** $y = 0,7^x$



Di para cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\leftrightarrow$ d) Creciente

II $\leftrightarrow$ b) Creciente

III $\leftrightarrow$ c) Decreciente

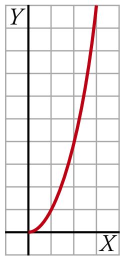
IV $\leftrightarrow$ a) Decreciente

PÁGINA 164

PIENSA Y RESUELVE

16 **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el área de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? Dibújala.**

Si el lado del cuadrado es l, $A = l^2$



17 **Rocío ha comprado un regalo de cumpleaños para Paz, que ha costado 100 €. Como el resto de los amigos del grupo no han comprado nada, deciden pagar el regalo entre todos.**

a) Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno, dependiendo del número de personas que haya, y dibújala.

Todos los amigos se van a cenar a un restaurante en el que la comida vale 10 €.

b) ¿Cuál será, en este caso, la función que da el dinero que tiene que poner cada uno, sin incluir a Paz, dependiendo del número de personas que son?

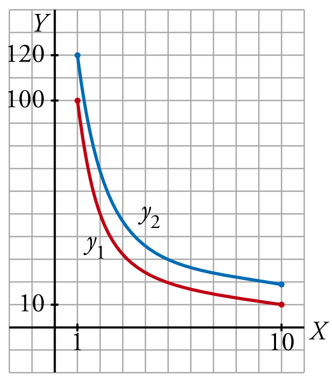
c) Dibuja esta última función en los mismos ejes que la anterior.

d) Teniendo en cuenta que x solo toma valores naturales y suponiendo que el número de amigos no supera el de 10, di el dominio de definición de cada una de las funciones descritas.

Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y_1 = \dfrac{100}{x}$.

Si van a un restaurante, entonces la función es $y_2 = \dfrac{100 + 10(x + 1)}{x}$.

El dominio de definición de ambas funciones es $Dom = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



18 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x \quad \text{en euros}$$

y los ingresos que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2 \quad \text{en euros}$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \;\rightarrow\; B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

19 **El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la función?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para 10 sobres.

c) Calcula, también, el coste por unidad y el coste total para 100 000 sobres.

d) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de sobres se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) Para 10 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{1\,003}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

c) Para 100 000 sobres:

Coste por unidad $= \dfrac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

d) El coste por unidad se acerca a 0,3.

20 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

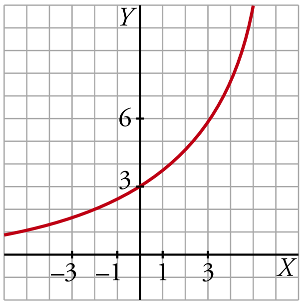
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



21 **La altura, *h*, a la que se encuentra en cada instante, *t*, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s es:**

$$h = 20t - 5t^2$$

a) Haz una representación gráfica.

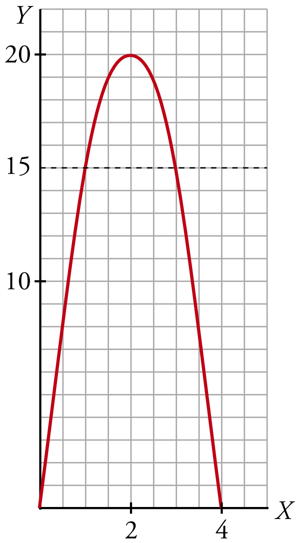
b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a)



b) Dominio de definición = [0, 4]

c) La piedra alcanza la altura máxima a los 2 segundos de haberla lanzado, y es de 20 m.

d) A los 4 segundos.

e) $20t - 5t^2 = 15$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \rightarrow 1 \leq t \leq 3$

22 □□□ **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual.**

a) Si el precio es de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

a) $250 \cdot 1{,}05^5 = 319$ €

b) $250 \cdot 1{,}05^t = 11$

23 □□□ **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual.**

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

a) $20\,000 \cdot 0{,}88^4 = 11\,994$ €

b) $P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

c) $20\,000 \cdot 0{,}88^t = 10\,000 \rightarrow 0{,}88^t = \dfrac{1}{2} \rightarrow t \approx 5{,}3$

24 □□□ **En un bosque, en etapa de crecimiento, se ha medido el volumen total de madera y se ha obtenido la cantidad de 10 250 m³.**

Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.

a) ¿Cuánta madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

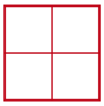
a) $10\,250 \cdot 1{,}02^{10} = 12\,495$

b) $10\,250 \cdot 1{,}02^t = V$

PÁGINA 165

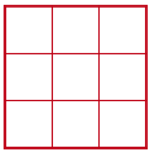
A contar cuadrados

AQUÍ HAY 5 CUADRADOS
1 de tamaño 2×2
4 de tamaño 1×1
5 en total



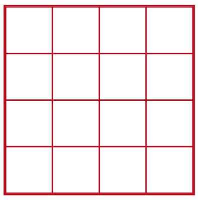
$f(2) = 5$

AQUÍ HAY 14 CUADRADOS
1 de tamaño 3×3
4 de tamaño 2×2
9 de tamaño 1×1
14 en total



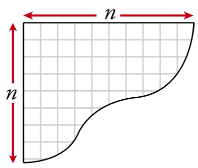
$f(3) = 14$

¿CUÁNTOS CUADRADOS HAY EN UNA CUADRÍCULA DE 4×4 CUADRADOS?



$f(4) = ?$

- **Calcula también $f(5)$.**
- **Y, por último, generaliza: ¿CUÁNTOS CUADRADOS HAY EN UNA CUADRÍCULA DE $n \times n$?**



UNA FÓRMULA QUE PUEDE VENIRTE BIEN

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

¿Cuál es la expresión de $f(n)$?

$f(2) = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$

$f(3) = 1 + 4 + 9 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

$f(4) = 1 + 4 + 9 + 16 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

$f(5) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

…

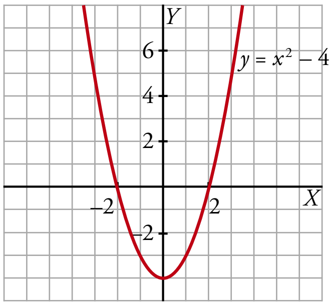
$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

PÁGINA 165

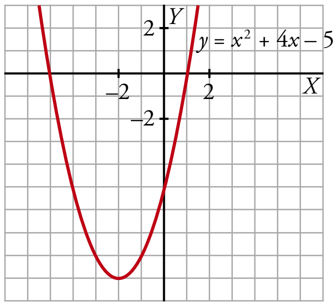
1 **Halla el vértice de estas parábolas y represéntalas:**

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 + 4x - 5$

a) Vértice en el punto (0, –4)



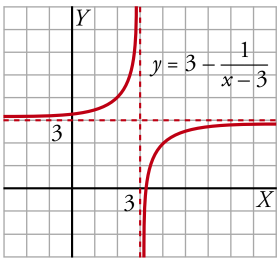
b) Vértice en el punto (–2, –9)



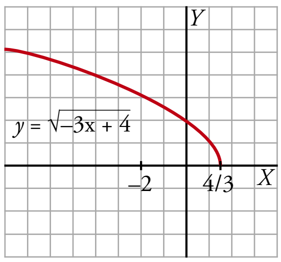
2 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3 - \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \sqrt{-3x+4}$ **c)** $y = 2^x - 3$

a)



b)



c)