| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Departamento Matemáticas<br>IES ABYLA | Nombre 1: | | | 3ª Evaluación | Nota |
| | Nombre 2: | | | | |
| | Curso: | **4º ESO A** | Control por parejas | | |
| | Fecha: | 15 de mayo de 2023 | Trigonometría | | |

Realizad paso a paso las operaciones pedidas. Sed claros, concisos, limpios y ordenados

La no explicación de alguno de los apartados implicará una penalización de hasta 1 punto por ejercicio.

**1.-** Si $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$ calcula las restantes razones trigonométricas (las 5) e indica la amplitud del ángulo α, tanto en radianes como en grados sexagesimales (2,5 puntos)

**2.-** De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25°. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 puntos)

**3.-** Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad? (3 puntos)

**4.-** Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: (2,5 puntos)

$$(\text{sen}\ x - \cos x)^2 + (\text{sen}\ x + \cos x)^2 = 2$$

| Departamento Matemáticas | Nombre: | SOLUCIONES | | 3ª Evaluación | Nota |
|---|---|---|---|---|---|
| | Curso: | 4º ESO A | Control por parejas | | |
| | Fecha: | 15 de mayo de 2023 | Trigonometría | | |

Realizad paso a paso las operaciones pedidas. Sed claros, concisos, limpios y ordenados

La no explicación de alguno de los apartados implicará una penalización de hasta 1 punto por ejercicio.

**1.-** Si $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$ calcula las restantes razones trigonométricas (las 5) e indica la amplitud del ángulo α, tanto en radianes como en grados sexagesimales

De la identidad fundamental de la trigonometría, despejamos el coseno:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

Operando:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Como la tangente de un ángulo es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos ambos, podemos calcularla:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad \text{tg}\alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$$ (1 punto)

Las funciones trigonométricas inversas son:

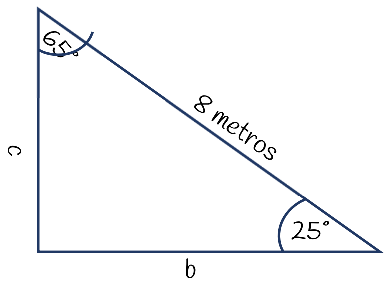
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \text{cosec}\ \alpha = \frac{5}{3}$$

Y por último la cotangente: $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{\cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} \quad \rightarrow \quad \text{cotg}\alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \text{cotg}\ \alpha = \frac{4}{3}$ (1 punto)

Si sen α= 3/5, entonces **α** = Arcsen (3/5) = 36° 52' 11,63" =0,6435 rad. (0,5 puntos)

Así, Sen **α**=3/5; Cos **α**=4/5; Tg **α**=3/4; Cosec **α**=5/3; Sec **α**=5/4 y Cotg **α**=4/3 y **α**=36° 52' 11,63"=0,6435 rad.

**2.-** De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25°. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área.




Si uno de los ángulos mide 25°, como se trata de un triángulo rectángulo, el otro ángulo mide 90°-25°=65°.

Y ahora, conocidos los tres ángulos, solo falta a conocer los lados. (0,5 puntos)

Para ello, utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo de 25°:

$$\text{sen}25° = \frac{c}{8} \quad \rightarrow \quad c = 8\cdot\text{sen}25° \quad \rightarrow \quad c = 3{,}38\ \text{m}$$

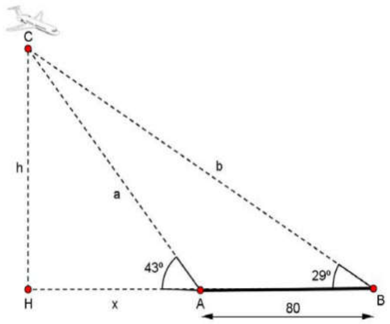
$$\cos 25° = \frac{b}{8} \quad \rightarrow \quad b = 8\cdot\cos 25° \quad \rightarrow \quad b = 7{,}25\ \text{m}$$

(1 punto)

Para calcular el área, utilizaremos: $A = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{7{,}25\cdot 3{,}38}{2} = 12{,}253\ \text{m}^2$ (0,5 puntos)

Por tanto, C=25 °, B=65 °, c=3,38 m, b=7,25 m y el área es de 12,253 $m^2$.

**3.–** Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad?




Tenemos dos triángulos rectángulos: el AHC y el BHC.

✓ En el triángulo AHC se verifica que: $tg\ 43 = \frac{h}{x}$

✓ En el triángulo BHC se verifica que: $tg\ 29 = \frac{h}{x+80}$

Con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema de ecuaciones no lineales: $\begin{cases} tg\ 43 = \frac{h}{x} \\ tg\ 29 = \frac{h}{x+80} \end{cases}$ (0,5 puntos)

Si despejamos h de la primera ecuación: $tg\ 43 = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h = x \cdot tg\ 43$

y lo sustituimos en la segunda, llegamos a:

$$tg\ 29 = \frac{h}{x+80} \quad \rightarrow \quad tg\ 29 = \frac{x \cdot tg\ 43}{x+80} \quad \rightarrow \quad (x+80)\, tg\ 29 = x \cdot tg\ 43$$

Que operando:

$$(x+80)\, tg\ 29 = x \cdot tg\ 43 \quad \rightarrow \quad x \cdot tg29 + 80 \cdot tg29 = x \cdot tg\ 43 \quad \rightarrow \quad 80 \cdot tg29 = x \cdot tg\ 43 - x \cdot tg29$$

Y sacando factor común, podemos despejar la x:

$$80 \cdot tg29 = x \cdot tg\ 43 - x \cdot tg29 \quad \rightarrow \quad 80 \cdot tg29 = x \cdot (tg\ 43 - tg29) \quad \rightarrow \quad x = \frac{80 \cdot tg29}{(tg\ 43 - tg29)} = 117{,}25\ km$$

Una vez conocida la x, podemos calcular h: $h = x \cdot tg\ 43 \quad \rightarrow \quad h = 117{,}25 \cdot tg\ 43 = 109{,}34\ km$ (1,5 puntos)

Para calcular la distancia del avión a Granada (B) y a Jaén (A) podemos hacerlo usando el teorema de Pitágoras o utilizando las razones trigonométricas: (1 punto)

$$sen29 = \frac{h}{b} \quad \rightarrow \quad b = \frac{h}{sen29} = \frac{109{,}34}{sen29} = 225{,}53\ km \qquad sen43 = \frac{h}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{h}{sen43} = \frac{109{,}34}{sen43} = 160{,}32\ km$$

Por tanto, el avión vuela a casi 110 km de altura y está a 225 km de Granada y a 160 km de Jaén.

**4.–** Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $(sen\ x - cos\,x)^2 + (sen\ x + cos\,x)^2 = 2$

Si desarrollamos las identidades notables:

$$(sen\ x - cos\,x)^2 + (sen\ x + cos\,x)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad sen^2x + cos^2 x - 2 \cdot senx \cdot cos\,x + sen^2x + cos^2 x + 2 \cdot senx \cdot cos\,x = 2$$

Y agrupamos términos, vemos que los dobles productos se anulan:

$$sen^2x + cos^2 x - \cancel{2 \cdot senx \cdot cos\,x} + sen^2x + cos^2 x + \cancel{2 \cdot senx \cdot cos\,x} = 2 \quad \rightarrow \quad 2sen^2x + 2cos^2 x = 2$$

Sacando factor común en la expresión: $2sen^2x + 2cos^2 x = 2 \quad \rightarrow$ llegamos a: $2(sen^2x + cos^2 x) = 2$

Y usando la identidad fundamental de la trigonometría: $sen^2x + cos^2 x = 1$ llegamos a:

$$2(sen^2x + cos^2 x) = 2 \quad \rightarrow \quad 2(1) = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 2$$ que es una identidad.

De esta manera, queda demostrada la identidad trigonométrica propuesta.