Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen X	
	Fecha:	8 de mayo de 2023	Semejanza y Trigonometría	

IES ABYLA (Ceuta)

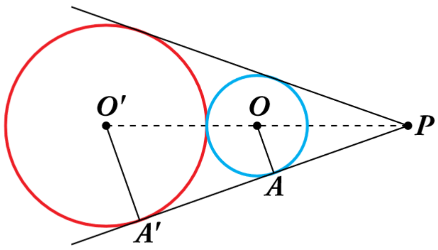
La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura. (2 puntos)

2.- Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular del que se conoce su altura h=3,5 cm, el lado de la base mayor L_M=5 cm y el lado de la base menor L_m=3 cm.

3.- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y la proyección del cateto b sobre ella mide 3,6 cm. Dibuja dicho triángulo y calcula las medidas de b, c, n y h. (2 puntos)

4.- Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si el segmento OP mide 12 cm y el O'A' mide 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor? (1,5 puntos)



5.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo β es $\tan\beta=\sqrt{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas principales. Expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales. (1,5 puntos)

6.- Demuestra (explicando los pasos seguidos) la siguiente identidad trigonométrica: (1,5 puntos)

$$\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

Bonus.- Del ejercicio 5 calcula el valor de las razones trigonométricas inversas.

Departamento de Matemáticas	Nombre:	S O L U C I O N E S	3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen X	
	Fecha:	8 de mayo de 2023	Semejanza y Trigonometría	

IES ABYLA (Ceuta)

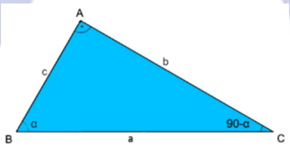
La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura. (2 puntos)

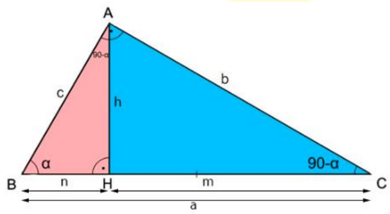
El Teorema de la altura dice: En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$\mathbf{h^2 = m \cdot n}$$

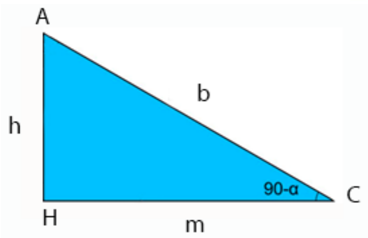
Para demostrarlo, nos ayudaremos de un triángulo rectángulo ABC apoyado sobre su hipotenusa,

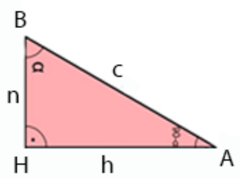


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:



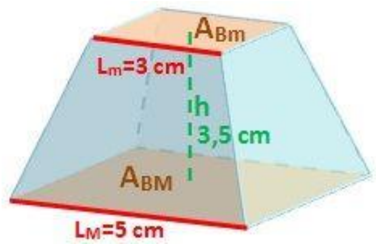


Y por tanto, aplicando la semejanza de triángulos, llegamos a:

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

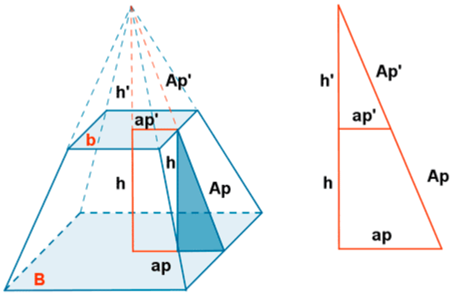
Por tanto, queda demostrado el Teorema de la Altura.

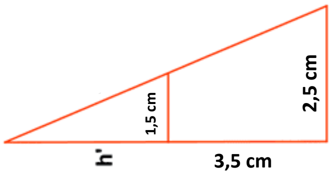
2.- Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular del que se conoce su altura h=3,5 cm, el lado de la base mayor L_M=5 cm y el lado de la base menor L_m=3 cm.



Dado el tronco de pirámide, lo primero es dibujarlo anotando sus medidas:

Para calcular tanto el área como el volumen tanto de dicho tronco de pirámide, lo primero será ampliarlo continuando las líneas hasta obtener las pirámide completa:





Si aplicamos semejanza en los triángulos de la derecha, llegamos a:

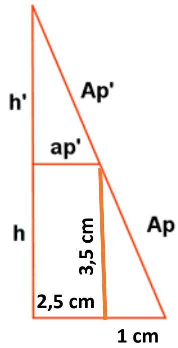
$$\frac{1,5}{h'}=\frac{2,5}{h'+3,5} \quad \rightarrow \quad 1,5(h'+3,5)=2,5h \quad \rightarrow \quad 1,5h'+5,25=2,5h' \quad \rightarrow \quad h'=5,25$$

Por tanto, la altura de la pirámide grande será de 5,25 + 3,5 = 8,75 cm y para calcular el volumen del tronco de pirámide, calcularemos primero el volumen de la pirámide grande y el de la pequeña:

$$V_{\text{Pirámide G}}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}5^2\cdot 8,75=\frac{875}{12}cm^3 \qquad V_{\text{Pirámide peq}}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h'=\frac{1}{3}3^2\cdot 5,25=\frac{63}{4}cm^3$$

Y el volumen del tronco será la diferencia de ambas:

$$V_{\text{Tronco}}=V_{\text{Pirámide G}}-V_{\text{Pirámide p}}=\frac{875}{12}-\frac{63}{4}=\frac{343}{6}=51,17cm^3$$



Para poder calcular el área del tronco, necesitamos calcular el área de los trapecios laterales, y para ello hemos de hacer Pitágoras para encontrar la altura de dichos trapecios:

En el triángulo de la derecha, $Ap=\sqrt{1^2+3,5^2}=\frac{\sqrt{53}}{2}cm$

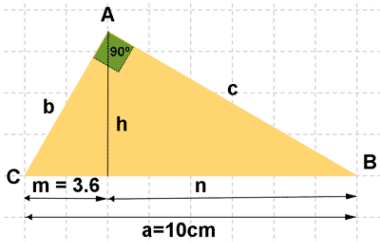
Y el área de cada uno de los trapecios es: $A=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{5+3}{2}\cdot\frac{\sqrt{53}}{2}=2\sqrt{53}\ cm^2$

Y el área total del tronco será 4 veces el área del trapecio más el área de las bases:

$$A=A_{BM}+A_{Bm}+4\cdot A_{Trapecio}=25+9+4\cdot 2\sqrt{53}=34+8\sqrt{53}=92,24\ cm^2$$

Por tanto, el área del tronco de pirámide es de 92,24 cm^2 y el volumen de 51,17 cm^3

3.- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y la proyección del cateto b sobre ella mide 3,6 cm. Dibuja dicho triángulo y calcula las medidas de b, c, n y h. (2 puntos)



Para calcular la medida de b, utilizaremos el teorema del Cateto, en el que:

$$b^2=a\cdot m \quad \rightarrow \quad b=\sqrt{a\cdot m}=\sqrt{10\cdot 3,6}=\sqrt{36}=6\ cm$$

Conocido el segmento m, podemos calcular el n, restándoselo a la hipotenusa:

$$a=n+m \quad \rightarrow \quad n=a-m=10-3,6=6,4\ cm$$

Con el segmento n, y volviendo a utilizar el teorema del cateto, calculamos la medida del cateto c:

$$c^2=a\cdot n \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{a\cdot n}=\sqrt{10\cdot 6,4}=\sqrt{64}=8\ cm$$

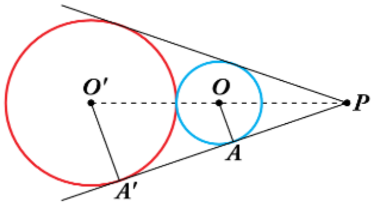
Y, por último, para calcular la altura h referida a la hipotenusa a, utilizaremos el teorema de la altura:

$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{6,4\cdot 3,6}=4,8\ cm$$

Aunque también la podríamos haber calculado mediante el Teorema de Pitágoras.

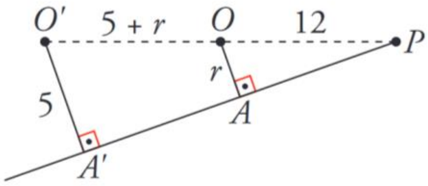
Por tanto, b=6 cm; n=6,4 cm; c=8 cm y h=4,8 cm.

4.- Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si el segmento OP mide 12 cm y el O'A' mide 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor? (1,5 puntos)



Si nos fijamos en la figura, los triángulos OAP y O'A'P' son semejantes por estar en posición Tales, ya que los segmentos OA y O'A' son paralelos, además los triángulos tienen un lado común y por último comparten un ángulo.

Si extraemos de la figura dichos triángulos semejantes, podemos observar que el segmento OO' mide exactamente la suma de los dos radios de ambas circunferencias, es decir; OO'=OA+O'A', si llamamos **r** a la medida OA, podemos escribir el segmento OO' como **5+r.**



Así que con todos estos datos y utilizando la semejanza de triángulos, tenemos que: $\frac{12}{r}=\frac{12+5+r}{5}$

Operando un poco, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$\frac{12}{r}=\frac{12+5+r}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{12}{r}=\frac{17+r}{5} \quad \rightarrow \quad 12\cdot 5=(17+r)\cdot r \quad \rightarrow \quad r^2+17r-60=0$$

Que por factorización mediante la Regla de Ruffini nos da: $(r-3)\cdot(r+20)=0$ y cuyas soluciones son:

$$\left.\begin{array}{r|rrr} & 1 & 17 & -60 \\ 3 & & 3 & 60 \\ \hline & 1 & 20 & \lfloor 0 \\ -20 & & -20 & \\ \hline & 1 & \lfloor 0 & \end{array}\right\} \rightarrow (r-3)\cdot(r+20)=0 \rightarrow \begin{cases} r-3=0 & \rightarrow \quad r=3 \\ r+20=0 & \rightarrow \quad r=-20 \end{cases}$$

Desechamos la solución r=-20 puesto que r es una distancia y no puede ser negativa.

Y con esto nos queda que, el radio de la circunferencia pequeña mide 3 cm. OA=3 cm.

5.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo β es $\tan\beta=\sqrt{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas principales. Expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales. (1,5 puntos)

Si llamamos **s** al sen α y **c** al cos α, $\left\{\begin{matrix} s=\operatorname{sen}\beta \\ c=\cos\beta \end{matrix}\right\}$ como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos su valor, $tg(\beta)=\sqrt{3}$, podemos despejar el seno en función del coseno:

$$tg(\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}=\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3}=\frac{s}{c} \quad \rightarrow \quad s=\sqrt{3}c$$

Además, usando la ecuación fundamental de la trigonometría, podemos plantear un sistema de ecuaciones no lineales para calcular el seno, y después el coseno de ángulo β.

$$\begin{cases} s=\sqrt{3}\cdot c \\ s^2+c^2=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{en la 2ª ecuación}]{\text{Sustituyendo S}} \left(\sqrt{3}\cdot c\right)^2+c^2=1 \rightarrow 3c^2+c^2=1 \rightarrow 4c^2=1 \rightarrow c^2=\frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow c=+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \rightarrow \cos\beta=\frac{1}{2}$$

Conocido c (el coseno), ya podemos calcular s (el seno) mediante $s=\sqrt{3}\cdot c$:

$$s=\sqrt{3}\cdot c \rightarrow s=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{sen } \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, $\cos\ \beta=\frac{1}{2}$, $\text{sen}\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{tg}\ \beta=\sqrt{3}$

Para calcular el ángulo β, basta con hacer el arco tangente de $\sqrt{3}$, por tanto:

$$\beta=\text{arctg}\left(\sqrt{3}\right)=60° \rightarrow \beta=60° \rightarrow \frac{\pi}{180}=\frac{\beta}{60} \rightarrow \beta=\frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

6.– Demuestra (explicando los pasos seguidos) la siguiente identidad trigonométrica: (1,5 puntos)

$$\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x}$$

Lo primero que vamos a hacer es multiplicar en cruz:

$$\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x} \rightarrow (1-sen\ x)\cdot(1+sen\ x)=\cos x\cdot\cos x \rightarrow 1-sen^2\ x=\cos^2 x$$

Si transponemos términos llegamos a:

$$1-sen^2\ x=\cos^2 x \rightarrow 1=\cos^2 x+sen^2\ x \rightarrow 1=sen^2\ x+\cos^2 x$$

Y como según la ecuación fundamental de la trigonometría, $sen^2\ x+\cos^2 x=1$

Llegamos a:

$$\underbrace{sen^2\ x+\cos^2 x}_{=1}=1 \rightarrow 1=1$$

Por tanto, queda demostrado que $\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x}$

Bonus.– Del ejercicio 5 calcula el valor de las razones trigonométricas inversas.

Sabemos que las razones trigonométricas inversas son la secante, la cosecante y la cotangente, y que:

$$\sec\beta=\frac{1}{\cos\beta} \rightarrow \sec\beta=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \rightarrow \sec\beta=2$$

$$\text{cosec }\beta=\frac{1}{\text{sen}\beta} \rightarrow \text{cosec }\beta=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{cosec }\beta=\frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{cosec }\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg }\beta=\frac{1}{\text{tg }\beta} \rightarrow \text{cotg }\beta=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{cotg }\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen X	
	Fecha:	8 de mayo de 2023	Simulacro Semejanza & Trigo	

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura. (2 puntos)

2.- Calcula el área total y el volumen de un tronco de cono de 6 cm de altura cuyos radios miden 6 y 4 cm. (1,5 puntos)

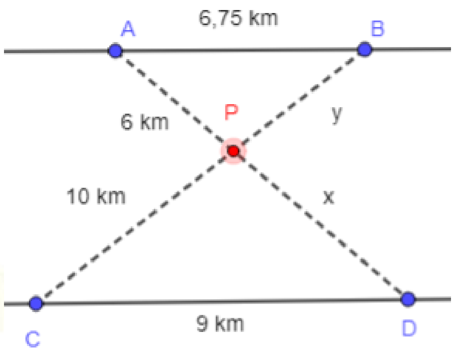
Sol: A=361,91 cm² y V=477,52 cm³

3.- Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo del que se conoce la medida de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa, que son m=8 y n=2 cm. (2 puntos)

P=24,42 cm y A=20 cm²

4.- Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura de la derecha, calcula las distancias del centro comercial a las ciudades B y D. (1,5 puntos)

Sol: x=8 e y=7,5 km.



5.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo es $\tan\beta = \sqrt{2}$, calcula las restantes razones trigonométricas principales. Expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales. (1,5 puntos)

$Sen\ x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ y $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6.- Demuestra (explicando los pasos seguidos) la siguiente identidad trigonométrica: (1,5 puntos)

$$\frac{sen\ x \cdot \cos\ x}{\tan x} = 1 - sen^2 x$$

Bonus.- Del ejercicio 5 calcula el valor de las razones trigonométricas inversas.

$Sec\, x = \sqrt{3}$; $Cosec\ \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ y $cotg\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$