Unidad Didáctica 5

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3º ESO

En esta unidad vas a:

1. **Aprender a expresar de forma algebraica ciertas situaciones.**
2. **Distinguir y operar con monomios.**
3. **Identificar, operar y simplificar polinomios.**
4. **Conocer y aplicar las identidades notables.**
5. **Saber sacar factor común.**
6. **Factorizar polinomios y saber simplificar fracciones algebraicas.**
7. **Resolver problemas usando expresiones algebraicas.**

SUMARIO

5.0.- Lectura comprensiva

Todos los pueblos que se han preocupado por el avance de las ciencias han creado centros en los cuales los sabios pueden trabajar e intercambiar ideas, como ocurre en nuestras actuales universidades y academias.

En *Bagdag*, capital del mundo árabe en el siglo IX, se reunieron artistas, escritores y científicos (filósofos, matemáticos, físicos, astrónomos, médicos…..). Allí se escribieron, bajo el reinado del Califa *Al Raschid*, los cuentos de *Las Mil y una Noches*, *Aladino y la lámpara maravillosa*, *Simbad el Marino*,….. Años más tarde, el cargo de Califa lo ocupa su hijo *Al Mamoun*. Cuentan que una noche *Al Mamoun* tuvo un sueño en el que se le apareció el gran filósofo *Aristóteles*. Al despertar, *Al Mamoun*, impresionado, mandó traducir al árabe todas las obras griegas que se habían encontrado hasta entonces. También mandó construir una *casa de la sabiduría* en la que se pudieran reunir los sabios para estudiar y hacer avanzar la ciencia. Entre esos sabios estuvo el matemático y astrónomo *Al Khwarizmi*, uno de los más famosos del mundo árabe, cuyo nombre mal pronunciado dio lugar a la palaba *algoritmo.*

Lee nuevamente el texto anterior y completa el siguiente cuestionario:

1.- El término matemático algoritmo proviene de una mala pronunciación del nombre del sabio árabe: ________________________________

2.- La capital del mundo árabe antiguo era:___________________________

3.- El famoso filósofo griego que se le apareció en sueños al Califa Al Mamoun era: ____________________________

4.- Los cuentos árabes más famosos escritos en el siglo IX fueron:__________________________

5.- Nuestras actuales universidades y academias equivalen a los:___________________ de la antigüedad y del medioevo.

6.- Todas las obras griegas que se conocían en la época de Al Mamoun fueron traducidas al árabe por: __________________________________

7.- En la ________________ se reunían los sabios del mundo árabe en tiempos del Califa Al Mamoun.

8.- En los centros de la ciencia re reunían: _____________, ____________ y ______________.

9.- ¿Al Raschid y al Mamoun fueron realmente, sabios o mecenas?: ___________________

10.- ¿Por qué?: ____

5.01.- Introducción

Al Khwarizmi (siglo IX d.C.), considerado uno de los «padres del álgebra»

Álgebra, del árabe: الجبر *al-ŷabr*, es el nombre que identifica a una rama de la Matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas.

La palabra álgebra proviene del título de un libro *Al-jabr w'al-muqabalah,* escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo *Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi*, que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las "operaciones" que se pueden hacer con cualquier cifra, más que por los mismos números. Desde 1.700 a.C. a 1.700 d.C. ésta se caracterizó por la invención de símbolos y la resolución de ecuaciones. En esta etapa encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

Hubo que esperar a la Edad Moderna para que los franceses *Vieta* (siglo XVI) y *Descartes* (siglo XVII) dotaran al álgebra de un lenguaje definitivamente simbólico, prácticamente igual al que usamos en la actualidad

Gracias a ellos, hoy entendemos como ***álgebra*** al área matemática que se centra en las relaciones, estructuras y cantidades. La disciplina que se conoce como álgebra elemental, en este marco, sirve para llevar a cabo operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) pero que, a diferencia de la aritmética, se vale de símbolos (a, x, y) en lugar de utilizar números. Esto permite formular leyes generales y hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución.

El álgebra elemental postula distintas leyes que permiten conocer las diferentes propiedades que poseen las operaciones aritméticas. Por ejemplo, la suma de números (a + b) es conmutativa (a + b = b + a), asociativa a + (b+c) = (a+b)+c, tiene una operación inversa (la resta), a-a=0 y posee un elemento neutro (0), a+0=a.

5.02.- Expresiones Algebraicas. El Lenguaje algebraico

El lenguaje que utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritméticas se denomina lenguaje algebraico.

Una ***expresión algebraica*** es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

Son ejemplo de expresiones algebraicas:

Área de un círculo	**Densidad de una sustancia**	**El cuadrado de un número**
$A = \pi \cdot R^2$	$d = \dfrac{m}{v}$	x^2

El ***lenguaje algebraico*** es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente tomamos como expresiones particulares. De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que permite simplificar teoremas, formular ecuaciones e inecuaciones y el estudio de cómo resolverlas. Este lenguaje nos ayuda a resolver problemas matemáticos mostrando generalidades.

En general las letras *X*, *Y* y *Z* se utilizan como las incógnitas o variables de la expresión algebraica. Los siguientes son ejemplos de las expresiones algebraicas más usadas, en forma verbal y escrita:

Enunciado	Expresión algebraica
La suma de dos números	a + b
La resta o diferencia de dos números	x-y
El cociente de dos números	x/y

Enunciado	Expresión algebraica
El doble de un número	2x
El doble de la suma de dos números	2(a+b)
La mitad de un número	x/2

Piensa y practica

1.- Si representamos la edad de María con x, escribe en lenguaje algebraico:

La edad que tendrá María dentro de tres años	
La edad que tendrá dentro de quince años	
La edad que tenía María hace siete años	
El doble de la edad de María	
La mitad de su edad aumentada en treinta años	
La suma de la edad de María y la de su madre, que es el triple de la suya	
La suma de las edades de María y de su primo, que es la mitad de la de María	

2.-Traduce del lenguaje algebraico:

x	
$5x$	
$x+(x+1)$	
$x^2-(x+1)$	
$\frac{x}{3}$	
$2x+c^2$	
$3\cdot m^2$	
$(2x)\cdot(x-1)$	
$(x-1)\cdot(x+1)$	

5.03.- Monomios

De todas las expresiones algebraicas con las que vamos a trabajar, los monomios son las expresiones algebraicas más sencillas.

Un ***monomio*** es el producto de un número por una o varias letras, donde el número (incluido su signo) es a lo que llamamos *coeficiente* y a las letras *parte literal*.

$$coeficiente \rightarrow 4x^2tz^3 \leftarrow parte\ literal$$

Llamamos ***grado de un monomio*** al número de factores que forman la parte literal, o lo que es lo mimo, al número de letras de la parte literal.

$$parte\ literal \rightarrow x^2tz^3 = \underbrace{x\cdot x\cdot t\cdot z\cdot z\cdot z}_{\text{dos x, una t y tres z son 6 letras}} \rightarrow grado = 6$$

Ejemplo

$-5ax^2 \longrightarrow$ MONOMIO

- COEFICIENTE $\longrightarrow -5$
- PARTE LITERAL $\longrightarrow ax^2$
- GRADO $\longrightarrow 3$

$\underbrace{a \cdot x \cdot x}_{3}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a \cdot a}}{4a^2} \rightarrow \begin{cases} \text{Monomio de} \\ \text{segundo grado} \end{cases} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ x \cdot x \cdot y \cdot y}}{4x^2y^2} \rightarrow \begin{cases} \text{Monomio de} \\ \text{cuarto grado} \end{cases}$$

Dos ***monomios*** son ***opuestos*** si son semejantes y sus coeficientes son números opuestos.

Decimos que dos ***monomios*** son ***semejantes*** si tienen la misma parte literal, es decir si tienen las mismas letras, aunque estas estén desordenadas.

$$4x^2z^3 \qquad -3x^2z^3 \qquad x^2z^3 \qquad 5xz^3x \qquad 7z^3x^2 \qquad 8zxzxz$$

Todos estos monomios son semejantes porque tienen 5 letras en la parte literal, 2 equis (x) y 3 zetas (z).

Ejemplo

1.- Indica si los siguientes monomios nos semejantes o no:

$3x^2 \xrightarrow{\text{semejante}} 7x^2 \qquad 3y^2 \xrightarrow{\text{no semejante}} 7z^2 \qquad 3y^2 \xrightarrow{\text{no semejante}} 2y$

$3z^5 \xrightarrow{\text{semejante}} \frac{4}{5}z^5 \qquad 3y^2x \xrightarrow{\text{no semejante}} 7x^2y \qquad 3yzx \xrightarrow{\text{semejante}} 2xyz$

Piensa y practica

3.– Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio Semejante
$8a$				
$-3x$				
a^2b				
$\frac{2}{3}xy^2$				
				$5abc$
	5			$8z^4$
$-m$				
	-7		5	

El ***valor numérico de un monomio*** es el valor que se obtiene al cambiar la letra o letras por números y realizar la operación.

Ejemplo

2.- Dado el monomio $3x^2$, calcula:

- ✓ el valor numérico para $x=-1$ será: $3x^2 = 3(-1)^2 = 3\cdot 1 = 3$
- ✓ el valor numérico para $x=-3$ será: $3x^2 = 3(-3)^2 = 3\cdot 9 = 27$
- ✓ el valor numérico para $x=\frac{3}{5}$ será: $3x^2 = 3\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 3\cdot\frac{9}{25} = \frac{27}{25}$

3.- Dado el monomio $2a^2b$, calcula:

- ✓ el valor numérico para $a=-1$ y $b=2$ será: $2a^2b = 2\cdot(-1)^2\cdot(2) = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$

5.04.- Operaciones con monomios

A la hora de operar con monomios hemos de recordar el orden de preferencia de las operaciones, las tablas de multiplicar y las propiedades de las potencias, puesto que las letras representan números

5.4.1.- Suma y resta de Monomios

Para poder sumar *(o restar)* dos o más monomios estos han de ser ***monomios semejantes***, es decir, monomios que tienen la misma parte literal, si no son semejantes no se pueden sumar *(o restar)*.


1 tomate
+

2 tomates
=

3 tomates


3 patatas
+

2 patatas
=

5 patatas

Como podéis ver, podemos sumar tomates con tomates y patatas con patatas, es decir podemos sumar cosas iguales, pero no podemos sumar cosas diferentes:


3 patatas
+

8 tomates
+

3 pepinos
= ? =

3 patatas
8 tomates
3 pepinos

Pues sumar *(o restar)* monomios es algo similar, la suma de monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma *(o resta)* de los coeficientes.

X	+	XX	=	XXX
1 x		2 x		(1+2) x = 3x

YYY	+	YY	=	YYYYY
3 Y		2 Y		(3+2) Y = 5Y

Si los monomios no son semejantes, dejamos la suma indicada.

YYY	+	XX	=	YYY+XX
3 Y		2 X		3Y + 2X

Ejemplo

4.- Calcula:

$3x^2+2x^2=(3+2)x^2=5x^2$ $\qquad$ $4x^2y+7x^2y=11x^2y$ $\qquad$ $3x^2+2x=3x^2+2x$

$5y^3-3y^3=(5-3)y^3=2y^3$ $\qquad$ $9xzt-6xzt=3xzt$ $\qquad$ $5y^3-8y^2=5y^3-8y^2$

Piensa y practica

4.- Calcula el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

a)	$x+x+x=$	**f)**	$z^3+2z^3+4z^3=$	**l)**	$11m^2-6m^2=$	**p)**	$5b^3-7b^3+4b^3=$
b)	$x^2+x^2=$	**g)**	$n+n+n+2n=$	**m)**	$8x-3x=$	**q)**	$y^4+2y^4-4y^4=$
c)	$4a+2a=$	**h)**	$4m+4m=$	**n)**	$m^3-5m^3=$	**r)**	$m-4m+2m=$
d)	$3x^2+x^2=$	**j)**	$3t^7+4t^7+t^7=$	**ñ)**	$\frac{5}{6}m^2-\frac{4}{5}m^2=$	**s)**	$\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}x=$
e)	$7z+5z=$	**k)**	$5a^3+2a^3+a^3=$	**o)**	$x^2-\frac{3}{7}x^2=$	**t)**	$\frac{7}{10}z-\frac{4}{5}z-\frac{3}{2}z=$

5.4.2.- Multiplicación de Monomios

Recordando que un monomio es el producto de un número y letras, deducimos que el producto de dos monomios es otro monomio en el que el coeficiente es el producto de los coeficientes (*tablas de multiplicar*) y la parte literal es el producto de las partes literales (*propiedades de las potencias*).

Ejemplo

5.- Calcula:

$$3x^2\cdot 7x^3=\left\{\begin{matrix}3\cdot 7=21\\ x^2\cdot x^3=x^{2+3}=x^5\end{matrix}\right\}=21\cdot x^5 \quad\leftrightarrow\quad 6yz^2\cdot 4y^3z=\left\{\begin{matrix}6\cdot 4=24\\ yz^2\cdot y^3z=y^{1+3}\cdot z^{2+1}=y^4\cdot z^3\end{matrix}\right\}=24\cdot y^4\cdot z^3$$

Piensa y practica

5.– Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones de monomios:

a)	$(3x)\cdot(4x)=$	**d)**	$z^3\cdot 2z\cdot 4z^4=$	**g)**	$11m^2\cdot 6m^7=$	**j)**	$5b^3\cdot 7t^3\cdot 4b^2t^3=$
b)	$2x^2\cdot x^2=$	**e)**	$n\cdot n\cdot n\cdot 3n=$	**h)**	$8y\cdot 3x=$	**k)**	$y^4\cdot 2yt^4\cdot 3y^3t^2=$
c)	$4a\cdot 2a^3=$	**f)**	$4m^2\cdot 3m=$	**i)**	$-9p^3\cdot 5m^3=$	**l)**	$3m\cdot 4m\cdot 2xz=$

5.4.3.- División de Monomios

De forma similar al producto, el cociente de monomios es otro monomio en el que el coeficiente es el cociente de los coeficientes y la parte literal es el cociente de las partes literales.

Ejemplo

6.- Realiza las siguientes divisiones de monomios:

$$9x^4:3x^3=\left\{\begin{matrix}9:3=3\\ x^4:x^3=x^{4-3}=x^1=x\end{matrix}\right\}=3x \quad\leftrightarrow\quad 6z^2:3z^2=\left\{\begin{matrix}6:3=2\\ z^2:z^2=z^{2-2}=z^0=1\end{matrix}\right\}=2\cdot 1=2$$

Cuando dividamos dos monomios semejantes, el resultado será un número (*monomio de grado 0*), porque la parte literal desaparecerá.

Resumiendo, ***el cociente de monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción*** dependiendo del grado de cada uno de ellos:

Ejemplo

7.- Calcula:

$$\underbrace{(6a^2b):(3a^2b)=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b}}{\cancel{3}\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b}}=2}_{\text{Número}} \qquad \underbrace{(15x^4):(3x^3)=\frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{x^3}\cdot x}{\cancel{3}\cdot\cancel{x^3}}=5x}_{\text{Monomio}} \qquad \underbrace{(2ab):(6b^2)=\frac{\cancel{2}\cdot a\cdot\cancel{b}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{b}\cdot b}=\frac{a}{3b}}_{\text{Fracción}}$$

Piensa y practica

6.– Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones de monomios:

a)	$(10x):(2x)=$	**d)**	$(27z^5):(-9z^2)=$	**g)**	$\frac{4x}{2}=$	**j)**	$\frac{12a^2}{4a}=$
b)	$(14a^2):(-7a)=$	**e)**	$(-16a^4):(-8a)=$	**h)**	$\frac{3}{3a}=$	**k)**	$\frac{15x}{3x^2}=$
c)	$(27z^5):(-9z^2)=$	**f)**	$(5z^7):(15z^7)=$	**i)**	$\frac{5x}{10x}=$	**l)**	$\frac{8z^2}{16z^3}=$

5.05.- Polinomios

Un ***polinomio*** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de varios monomios no semejantes:

$$3x^2+2x^2=5x^2 \quad \rightarrow \quad \textit{Monomio} \qquad\qquad 3x^2+2x=3x^2+2x \quad \rightarrow \quad \textit{Polinomio}$$

Para denominar polinomios utilizaremos las letras mayúsculas P, Q, R, S… e indicaremos entre paréntesis las variables algebraicas de las que depende.

$$P(x)=3x^2+2x+5 \qquad\qquad Q(x,y)=3x^3+2y^2-3x^2y$$

A cada uno de los monomios que forman un polinomio se les llama ***término***, y si no tiene parte literal, se le llama ***término independiente.***

$$P(x)=\underbrace{4x^3}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 3}}}+\underbrace{3x^2}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 2}}}-\underbrace{2x}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 1}}}+\underbrace{5}_{\substack{\text{Término}\\ \text{independiente}}}$$

- Un polinomio formado por dos términos recibe el nombre de ***binomio***. $B(x)=3x^2+5$
- Un polinomio formado por tres términos recibe el nombre de ***trinomio***. $B(x)=2x^2+3x-7$

El ***grado de un polinomio*** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En el polinomio siguiente, el grado será 3, porque está formado por 4 monomios y el de mayor grado es de grado 3.

$$P(x)=\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 3}}}{4x^3}+\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 2}}}{3x^2}-\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{de}\\ \text{grado 1}}}{2x}+\underset{\substack{\text{Término}\\ \text{independiente}}}{5} \quad \rightarrow \quad \textit{grado}(P)=3$$

Un ***polinomio es completo*** cuando contiene todos los grados consecutivos, desde el mayor hasta el menor.

$$P(x)=\underbrace{8x^4+3x^2+2x+5}_{\text{Incompleto, falta término de grado 3}} \qquad\qquad Q(x)=\underbrace{3x^3+2x^2-4x+5}_{\textit{Completo}}$$

El ***valor numérico de un polinomio*** P(x) para *x=a*, ***P(a)***, es el número que se obtiene al cambiar *x* por el número *a*, y realizar las operaciones indicadas.

$$P(x)=3x^2+2x+5\ \begin{cases} P(-1)=3(-1)^2+2(-1)+5=3\cdot1-2+5=3-2+5=6\\ P(2)=3(2)^2+2(2)+5=3\cdot4+4+5=12+4+5=21\end{cases}$$

Cuando para un determinado *x=a*, obtenemos como valor numérico de un polonomio P(x) el valor 0, decimos que *a* es una raíz del polinomio P(x).

$$P(x)=x^2-4\ \begin{cases} P(-2)=(-2)^2-4=4-4=0 \quad \rightarrow \quad \text{-2 es raíz de } P(x)\\ P(2)=(2)^2-4=4-4=0 \quad \rightarrow \quad \text{2 es raíz de } P(x)\end{cases}$$

Un número cualquiera *x=**a es raíz de un polinomio P(x)***, cero de un polinomio, cuando el valor numérico de dicho polinomio si x=a es nulo.

x=a es raíz de P(x) si P(a)=0

5.06.- Operaciones con Polinomios

Como un polinomio es un conjunto de monomios, a la hora de operarlos utilizaremos lo ya aprendido en las operaciones con monomios.

5.6.1.- Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, sumaremos o restaremos los monomios semejantes que los componen y damos el resultado en orden decreciente en grado.

Podemos poner uno encima de otro como vemos a la derecha, pero también podemos hacerlo en línea:

$$\begin{array}{cccccc} & x^4 & +0 & -3x^2 & +x & +1 \\ + & & x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\ \hline & x^4 & x^3 & -4x^2 & +6x & -1 \end{array}$$

$$\left(x^4-3x^2+x+1\right)+\left(x^3-x^2+5x-2\right)=x^4-3x^2+x+1+x^3-x^2+5x-2=x^4+x^3-4x^2+6x-1$$

Para restar dos polinomios, se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman. $P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$

$$\left(x^4-3x^2+x+1\right)-\underbrace{\left(x^3-x^2+5x-2\right)}_{\text{para restar dos polinomios}}=x^4-3x^2+x+1\underbrace{-x^3+x^2-5x+2}_{\text{cambiamos el signo de todos los miembros del segundo}}=x^4-x^3-2x^2-4x+3$$

5.6.2.- Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados. Por ejemplo:

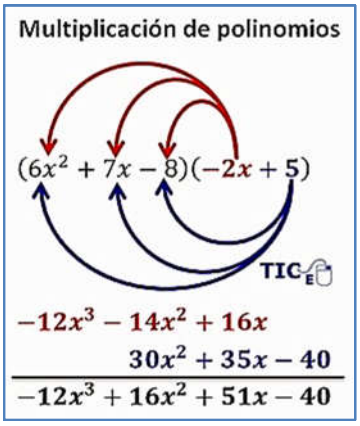
$$\underbrace{3x^2}_{Monomio}\cdot\underbrace{\left(x^3-2x^2-1\right)}_{Polinomio}=3x^2\cdot x^3-3x^2\cdot 2x^2-3x^2\cdot 1=\underbrace{3x^5-6x^4-3x^2}_{Polinomio}$$

Como hemos visto, al multiplicar un monomio por un polinomio, se obtiene otro polinomio.

5.6.3.- Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, multiplicaremos todos los monomios del primero por todos los monomios del segundo y después agruparemos los monomios semejantes dando el resultado en orden decreciente en grado.

$$\begin{array}{rrrr} & & 3x & +\ 5 \\ \times & & 4x & -\ 2 \\ \hline & & -6x & -10 \\ & 12x^2 & +20x & \\ \hline & 12x^2 & +14x & -10 \end{array}$$



Podemos hacerlo poniendo uno encima de otro colocando los monomios semejantes unos debajo de los otros para poderlos sumar con facilidad.

Pero es preferible hacerlo en línea:

$$\left(3x+5\right)\cdot\left(4x-2\right)=\left(3x\cdot 4x\right)+\left(3x\cdot(-2)\right)+\left(5\cdot 4x\right)+\left(5\cdot(-2)\right)=$$
$$=12x^2-6x+20x-10=12x^2-14x-10$$

Recuerda que para agrupar, sumaremos los monomios que sean semejantes.

Piensa y practica

7.- Dados los polinomios: $P(x)=3x^4-6x^3+4x-2$ $\quad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1$ $\quad R(x)=x^2+1$, *Calcula:*

a) $P(x)+Q(x)$ **b)** $2\cdot P(x)-3Q(x)+4\cdot R(x)$ **c)** $2\cdot P(x)\cdot R(x)$ **d)** $P(x)\cdot R(x)-2Q(x)$

5.6.4.- División de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), al dividirlos obtenemos otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplirán que el grado de P(x) sea mayor que el de Q(x) y que además deberán verificar la regla de la división "*cociente por divisor más resto igual a Dividendo*"

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & C(x) \\ R(x) & \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

La manera más sencilla de explicar la división de polinomios es mediante un ejemplo, así que nos plantearemos realizar la división del polinomio $P(x)=4x^3-2x^2+8x-11$ entre el polinomio $Q(x)=2x-3$.

- ***1º PASO:*** Disponemos los polinomios de igual forma que si se tratase de una división de números. En el caso de que el polinomio dividendo no sea completo dejamos huecos para los términos que faltan.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

- ***2º PASO:*** Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el del divisor, es decir, $4x^3 : 2x$, dando como resultado $2x^2$.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

- ***3º PASO:*** Multiplicamos cada uno de los términos del divisor $2x - 3$ por $2x^2$ y colocamos los opuestos de estos términos debajo de los términos semejantes del dividendo. A continuación, sumamos obteniendo otro nuevo polinomio dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l|l} 4x^3-2x^2+8x-11 & 2x-3 \\ \cline{2-2} -4x^3+6x^2 \quad \downarrow & 2x^2 \\ \cline{1-1} 0x^3+4x^2+8x & \end{array}$$

- ***4º PASO:*** Repetimos el 3º PASO hasta que el grado del nuevo polinomio sea inferior al del polinomio divisor. Este polinomio será el resto de la división. En nuestro ejemplo el 3º PASO se ha repetido tres veces.

$$\begin{array}{cccc|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} \underline{-4x^3} & \underline{+6x^2} & \downarrow & & 2x^2+2x \\ 0 & 4x^2 & +8x & \downarrow & \\ & \underline{-4x^2} & \underline{+6x} & \_ & \\ & 0 & 14x & -11 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|l} 4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\ \cline{5-5} \underline{-4x^3} & \underline{+6x^2} & \downarrow & & 2x^2+2x+7 \\ 0 & 4x^2 & +8x & \downarrow & \text{Cociente} \\ & \underline{-4x^2} & \underline{+6x} & \_ & \\ & 0 & 14x & -11 & \\ & & \underline{-14x} & \underline{+21} & \\ & & 0 & \underbrace{+10}_{\text{Resto}} & \end{array}$$

$$C(x)=2x^2+2x+7 \quad y \quad R(x)=10$$

En resumen:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -2x^2 & +8x & -11 & 2x-3 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+2x+7 \\
\hline
 & 4x^2 & +8x & -11 & \\
 & -4x^2 & +6x & & \\
\hline
 & & 14x & -11 & \\
 & & -14x & +21 & \\
\hline
 & & & 10 &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 + 2x + 7$
Resto $= 10$

Cálculo de los términos del cociente.

$4x^3 : 2x = 2x^2$

$4x^2 : 2x = 2x$

$14x : 2x = 7$

Ejemplo

8.- Calcula paso a paso la división P(x))x^5+2x3-x-8 entre el polinomio Q(x)=x^2-2x+1:

$$
\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & x^5+ & 0x^4+ & 2x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & x^2-2x+1 \\
\cline{8-8}
2.º\rightarrow & -x^5+ & 2x^4- & x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\
\cline{2-7}
3.º\rightarrow & & 2x^4+ & x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & 1.º\uparrow\ 4.º\uparrow\ 7.º\uparrow\ 10.º\uparrow \\
5.º\rightarrow & & -2x^4+ & 4x^3- & 2x^2 & & & \\
\cline{3-5}
6.º\rightarrow & & & 5x^3- & 2x^2- & x- & 8 & \\
8.º\rightarrow & & & -5x^3+ & 10x^2- & 5x & & \\
\cline{4-6}
9.º\rightarrow & & & & 8x^2- & 6x- & 8 & \\
11.º\rightarrow & & & & 8x^2+ & 16x+ & 8 & \\
\cline{5-7}
12.º\rightarrow & & & & & 10x- & 16 &
\end{array}
$$

1.º $x^5 : x^2 = x^3$

2.º $x^3 \cdot (x^2-2x+1) = x^5-2x^4+x^3$

3.º $(x^5+2x^3-x-8)+(-x^5+2x^4-x^3) = 2x^4+x^3-x-8$

4.º $2x^4 : x^2 = 2x^2$ / **5.º** $2x^2 \cdot (x^2-2x+1) = 2x^4-4x^3+2x^2$

6.º $(2x^4+x^3-x-8)+(-2x^4+4x^3-2x^2) = 5x^3-2x^2-x-8$

7.º $5x^3 : x^2 = 5x$ / **8.º** $5x \cdot (x^2-2x+1) = 5x^3-10x^2+5x$

9.º $(5x^3-2x^2-x-8)+(-5x^3+10x^2-5x) = 8x^2-6x-8$

10.º $8x^2 : x^2 = 8$ / **11.º** $8 \cdot (x^2-2x+1) = 8x^2-16x-8$

12.º $(8x^2-6x-8)+(-8x^2+16x+8) = 10x-16$

Solución: C(x)=x^3-2x^2+5x+8 y R(x)=10x-16

Piensa y practica

8.- Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $x^3-4x^2-6x+12 \quad \lvert\underline{x-5}$	**b)** $9x^4+15x^3-6x^2-5x+1 \quad \lvert\underline{3x^2-1}$
c) $4x^4 \quad \lvert\underline{2x^2-1}$	**d)** $2x^5+3x^2-6 \quad \lvert\underline{x+3}$

Ejemplo

9.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x) = 4x^5+3x^3-2x^2+5 \\ q(x) = -5x^3-2x^2+3x \\ r(x) = 2x^2-x+3 \end{cases}$ **calcula:** $\begin{cases} a)\ 2p(x)-3q(x)+r(x) = \\ b)\ [q(x)]^2 = \\ c)\ p(x):r(x) = \end{cases}$

a) $2p(x)-3q(x)+r(x) = 2(4x^5+3x^3-2x^2+5)-3(-5x^3-2x^2+3x)+2x^2-x+3 =$
$= 8x^5+6x^3-4x^2+10+15x^3+6x^2-9x+2x^2-x+3 = 8x^5+21x^3+4x^2-10x+13$

b) $[q(x)]^2 = (q(x))\cdot(q(x)) = (-5x^3-2x^2+3x)\cdot(-5x^3-2x^2+3x) = 25x^6+10x^5-15x^4+$
$+10x^5+4x^4-6x^3-15x^4-6x^3+9x^2 = 25x^6+20x^5-26x^4-12x^3+9x^2$

$c)\ p(x):r(x)=$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & +0x & +3x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & 2x^2-x+3 \\ \cline{7-7}
\underline{-4x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-6x^3} & \downarrow & & & 2x^3+x^2-x-3 \\
0 & +2x^4 & -3x^3 & -2x^2 & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+x^3} & \underline{-3x^2} & \downarrow & & \text{Cociente} \\
 & 0 & -2x^3 & -5x^2 & +0x & \downarrow & C(x)=2x^3+x^2-x-3 \\
 & & \underline{+2x^3} & \underline{-x^2} & \underline{+3x} & 5 & \\
 & & 0 & -6x^2 & +3x & +5 & \text{Resto} \\
 & & & \underline{6x^2} & \underline{-3x} & \underline{+9} & R(x)=14 \\
 & & & & & +14 &
\end{array}
$$

5.6.5.- Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un polinomio es de la forma $x - a$, la división puede realizarse de un modo más sencillo, empleando un algoritmo conocido como ***Regla de Ruffini.***

Veamos cómo se realiza este proceso mediante un ejemplo.

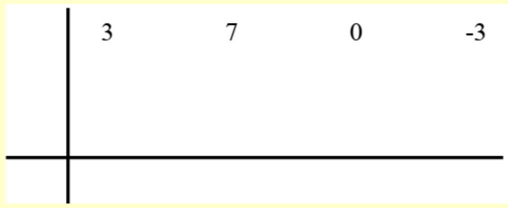
Ejemplo

10.- Dados los polinomios $P(x)=3x^3+7x^2-3$ y $Q(x)=x+3$, calcula $P(x):Q(x)$

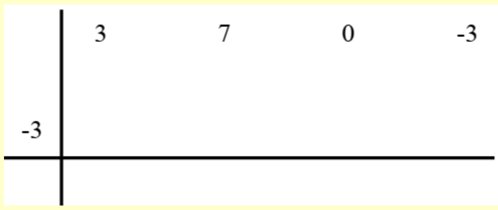
Para realizar esta regla, utilizaremos una especie de cuadro de la siguiente forma:

En la parte de la derecha superior colocaremos los coeficientes de todos los términos del polinomio en cuestión, que debe estar completo, así que pondremos 0 si faltara alguno de sus términos, como ocurre en nuestro caso que falta el término en x.

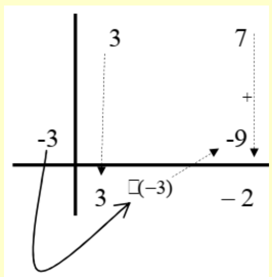
$$P(x)=3x^3+7x^2+0x-3$$

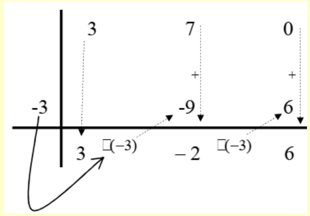
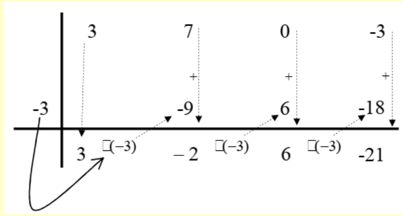


En la parte izquierda, justo encima de la línea horizontal de separación colocaremos el término independiente del divisor (binomio ***x – a***), en nuestro caso es $x+3 = x-(-3)$, por tanto colocamos el -3



El proceso empieza bajando el coeficiente del término de mayor grado (3) y poniéndolo debajo de la línea horizontal. Después multiplicaremos el -3 por dicho número y colocaremos el resultado por encima de la línea horizontal debajo del siguiente término para después sumarlos:



Repetimos el proceso volviendo a multiplicar el -3 por el nuevo resultado (-2) y colocándolo debajo del siguiente término para volver a sumar:	
Reiteramos el proceso multiplicando otra vez (-3) por el nuevo resultado y colocándolo debajo del término independiente:	

El último número que figura debajo de la línea horizontal es el resto ***R = -21.***

Los números anteriores son los coeficientes del polinomio cociente ***C(x) = 3x²-2x+6,*** de grado una unidad menor que el grado del polinomio dividendo P(x).

En este caso el grado del resto es igual a cero y cómo podemos comprobar la división no es exacta.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+7x^2-3 & x+3 \\ \cline{2-2} 21 & 3x^2-2x+6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C(x)=3x^2-2x+6 \\ R(x)=21 \end{cases}$$

Piensa y practica

9.- Realiza las siguientes divisiones de polinomios mediante la regla de Ruffini:

a) $x^3-4x^2+5x-8 \quad \underline{|x-2}$ **b)** $x^4-7x^3+8x^2-2 \quad \underline{|x-1}$

5.6.6.- Factor Común

Cuando hablamos de ***extraer factor común*** nos referimos a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y restas y que resulta muy útil en el cálculo algebraico.

Observa la siguiente expresión: $a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$ $\begin{cases} \text{Es una suma cuyos sumandos son productos.} \\ \text{Todos los productos tienen un mismo factor, la letra a.} \end{cases}$

Entonces, podemos transformar la suma en un producto sacando el factor que se repite ***(sacar factor común)*** y colocando un paréntesis.

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b+c-d)$$

Piensa y practica

10.- Extrae factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $18x^4+32x^2$	**b)** $6x^2+12x-24$	**c)** $9a+6a^2+3a^3$
d) $2x-6xy-4zx$	**e)** a^2+2a	**f)** $10b-30ab$
g) $18mxy^2-54m^2x^2y^2+36my^2$	**h)** $5x^2+10x-20$	**i)** $60x^4+18x^3-24x^2$

Podemos encontrarnos expresiones algebraicas en las que se puede sacar factor común dos veces, lo que se conoce con el nombre de ***factorización por extracción doble***. Veamos un ejemplo:

10.- Transforma en producto la expresión algebraica definida por: P(x.y)=xy - 2x - 3y + 6

$$P(x,y)=xy-2x-3y+6 \underset{\substack{\text{Separamos}\\ \text{en dos partes}}}{=} (xy-2x)+(-3y+6)=(xy-2x)-(3y-6) \underset{\substack{\text{Observamos lo}\\ \text{que se repite}}}{=} (xy-2x)-(3y-3\cdot 2)=$$

$$\underset{\substack{\text{Y lo sacamos}\\ \text{factor común}}}{=} x(y-2)+3(y-2) \underset{\substack{\text{Vemos que otra vez}\\ \text{se repite un factor}}}{=} x(y-2)+3(y-2) \underset{\substack{\text{Lo volvemos a}\\ \text{sacar factor común}}}{=} (x+3)\cdot(y-2)$$

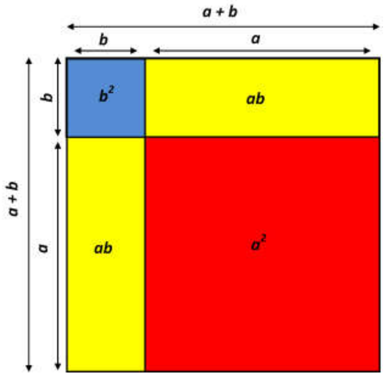
5.07.- Identidades notables

Existen algunas multiplicaciones que se presentan con mucha frecuencia al trabajar con expresiones algebraicas. Son los llamados *productos notables* o **identidades notables.**

Veamos las más importantes:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

5.7.1.- El cuadrado de una suma



El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

Ejemplo

$$(x+2)^2=(x+2)\cdot(x+2)=x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4$$
$$(2x+5)^2=(2x+5)\cdot(2x+5)=4x^2+10x+10x+25=4x^2+20x+25$$

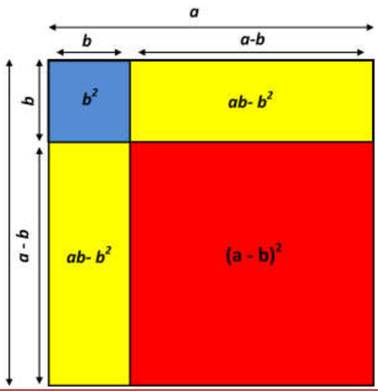
5.7.2.- El cuadrado de una diferencia

El cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

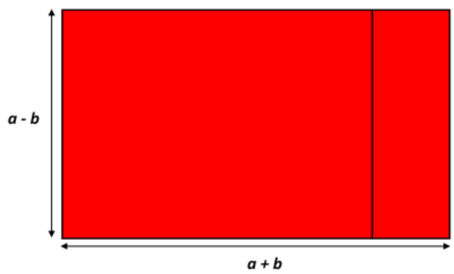
$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$

Ejemplo

$$(x-3)^2=(x-3)\cdot(x-3)=x^2-3x-3x+9=x^2-6x+9$$
$$(3x-2)^2=(3x-2)\cdot(3x-2)=9x^2-6x-6x+4=9x^2-12x+4$$



5.7.3.- Suma por diferencia



La suma de dos términos multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo

$$(x+3)(x-3)=x^2-3x+3x-9=x^2-9$$
$$(3x+2)(3x-2)=9x^2-6x+6x-4=9x^2-4$$

Piensa y practica

11.– Utiliza las identidades notables para desarrollar estas expresiones:

a) $(x+4)^2$	**b)** $(x-7)^2$	**c)** $(y^2-1)\cdot(y^2+1)$	**d)** $(2x-y)^2$
e) $(3x-6)^2$	**f)** $(3x+3)^2$	**g)** $(1+3x^2)\cdot(1-3x^2)$	**h)** $(3a+2b)^2$

A veces será conveniente transformar las identidades notables a la inversa, es decir nos la dan ya desarrollada y tendremos que escribirla de forma compacta.

Ejemplo

11.- Transforma en producto las siguientes expresiones algebraicas con la ayuda de las identidades notables:

$x^2+4x+4=(x+2)^2$ $\qquad$ $x^2-6x+9=(x-3)^2$ $\qquad$ $4x^2-9=(2x+3)\cdot(2x-3)$

Piensa y practica

12.– Utiliza las identidades notables para transformar en productos:

a) $4x^2-12x+9$	**b)** $9x^2+42x+49$	**c)** $4z^2-9$	**d)** $x^2+4xy+4y^2$

5.08.- Factorización de un Polinomio

Si un polinomio, P(x), se puede expresar como el producto de otros dos polinomios Q(x) y R(x),

$$P(x)=Q(x)\cdot R(x)$$

diremos que Q(x) y R(x) son ***divisores*** de P(x) (o factores como hemos visto en el punto 5.6.5)

5.8.1.- Divisores de un polinomio

Un polinomio, Q(x) es divisor de otro polinomio, P(x), cuando la división P(x) : Q(x) es exacta, es decir, tiene resto cero.

Ejemplo

12.- Comprueba si x-1 es divisor de x^3-$2x^2$+1:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3-2x^2+1 & x-1 \\ \hline
- & x^3-x^2 & x^2-x-1 \\ \hline
 & -x^2+1 & \\
- & -x^2+x & \\ \hline
 & -x+1 & \\
- & -x+1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

En la división $x^3-2x^2-1 \quad \underline{|x-1}$

$$\left.\begin{array}{r}(x-1)\\(x^2-x-1)\end{array}\right\}\text{ son divisores de } x^3-2x^2-1$$

5.8.2.- Factorización de polinomios

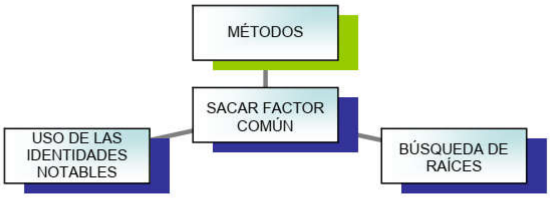
Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez.

Cada uno de los polinomios de la descomposición es un divisor del polinomio inicial. Es decir, el polinomio es divisible por cada uno de los factores de la descomposición.

(Es análogo a la descomposición en factores primos de un número)

Polinomio Irreducible: Es aquel que no tiene ningún divisor de grado inferior al suyo. Por ejemplo, todos los polinomios de grado 1 son irreducibles.

Los 3 recursos siguientes, por separado o combinados, nos ayudarán en la descomposición en factores de un polinomio.



- ✓ Si el polinomio no tiene término independiente se puede sacar factor común como mínimo la x.
- ✓ Si el M.C.D. de los coeficientes de todos los términos es 1, el factor común tiene coeficiente 1,

Ejemplo

13.- Factoriza los siguientes polinomios:

$10x^3+2x^2-8x=2x\cdot\left(5x^2+x-4\right)$ $\quad$ $x^5-5x^3=x^3\left(x^2-5\right)$ $\quad$ $3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$

5.8.3.- Factorización mediante la Regla de Ruffini

Una vez sacado el factor común (si lo hubiera) y descartado el identificar alguna de las identidades notables, es cuando utilizaremos la regla de Ruffini.

- ✓ El proceso de factorización comienza buscando divisores de la forma *x-a,* tales que, *a,* sea divisor del término independiente de nuestro polinomio.

Como cada raíz origina un factor de la forma *x – a*, cuando en la división por Ruffini el resto para un *x = a* sale 0, estamos diciendo que el polinomio de partida es divisible por el binomio *x – a*, y por tanto, este binomio junto con el cociente obtenido nos dará una factorización del polinomio [recuerda que si *R(x) = 0*, entonces, *D(x) =d(x)·C(x)]*. Habrá que ir comprobando si los cocientes que vamos obteniendo se pueden descomponer, puesto que se trata de conseguir factores irreducibles.

Veamos cómo se realiza este proceso mediante un ejemplo; para ello vamos a intentar descomponer el polinomio:

$$P(x)=x^3-4x^2+x+6$$

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	0
2	0	2	-6	
	1	-3	0	

Obtenemos una primera factorización: $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x^2-5x+6)$

Tenemos ahora una segunda factorización, descomponiendo el factor de segundo grado que aparecía: $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Ya tenemos la descomposición del polinomio; no es necesario buscar la otra raíz (x=3) ya que aparece en el último término.

En el caso de que aplicásemos de nuevo Ruffini para la última raíz, en la descomposición final habrá que tener en cuenta el último número que se obtiene, pues se trataría de un polinomio cociente de grado 0 y además, correspondería al coeficiente del término de mayor grado del polinomio inicial:

		1	-4	1	6
-1		0	-1	5	-6
		1	-5	6	0
2		0	2	-6	
		1	-3	0	
3		0	3		
		1	0		

La descomposición final del polinomio *P(x)* quedaría de la forma:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot 1 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

En este otro caso, para el polinomio $Q(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 48$

		2	-10	-4	48
2		0	-4	28	-48
		2	-14	24	0
3		0	6	-24	
		2	-8	0	
4		0	8		
		2	0		

La descomposición de *Q(x)* sería:

$$Q(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 48 = 2\cdot(x-4)\cdot)(x-3)\cdot(x-2)$$

Piensa y practica

13.- Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 6x^2 - 45x - 108$ **b)** $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

5.09.- Fracciones algebraicas

Una ***fracción algebraica*** es una fracción en la que tanto numerador como denominador son polinomios.

Ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} \qquad \frac{x+3}{x-5} \qquad \frac{x+2}{x^2-4} \qquad \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$$

Al igual que en las fracciones de números enteros, en las fracciones algebraicas se suele trabajar con la fracción irreducible, es decir, con aquella fracción equivalente a la original, pero que no se puede simplificar más.

Para simplificar una fracción algebraica se dividen el numerador y el denominador de dicha fracción por un polinomio que sea factor común de ambos, y para ello nos ayudaremos de la factorización de polinomios vista en el apartado anterior.

Ejemplo

14.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$ Las dos son identidades notables que convertimos en producto

b) $\frac{9x^2+30x+25}{6x+10} = \frac{(3x+5)^2}{2\cdot(3x+5)} = \frac{(3x+5)\cdot\cancel{(3x+5)}}{2\cdot\cancel{(3x+5)}} = \frac{3x+5}{2}$ El numerador es una identidad notable
En el denominador sacamos factor común

c) $\frac{b^3-b^2}{b^3-b} = \frac{b^2\cdot(b-1)}{b\cdot(b-1)} = \frac{b\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{(b-1)}}{\cancel{b}\cdot\cancel{(b-1)}} = b$ En ambos sacamos factor común

d) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-2)} = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ Hacemos Ruffini tanto en el numerador como en el denominador.

Piensa y practica

14.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-3x}{3x^3-6x^2+3x}$ **b)** $\frac{3b^2-15b}{b^2-10b+25}$ **c)** $\frac{x^3-16x}{4x^3+32x^2+64x}$ **d)** $\frac{4x^4y-8x^3y}{4x^3y^2-8x^3y}$

5.10.- Resolución de problemas mediante expresiones algebraicas

Gracias al lenguaje algebraico podemos resolver infinidad de problemas de forma general, sin necesidad de calcular cada uno de los casos particulares.

Como ya hemos dicho en capítulos anteriores, la resolución de problemas es la parte más importante del aprendizaje de las matemáticas. Mediante ella, los estudiantes experimentan la importancia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya poseen.

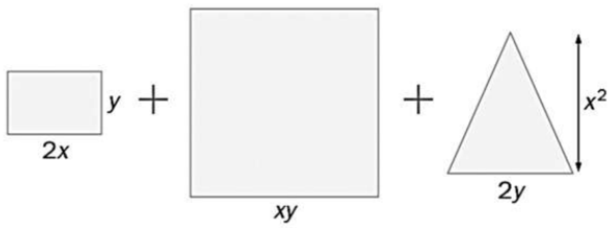
Como siempre, es sabido que para poder resolver problemas de matemáticas, antes hay que poseer un buen conocimiento de los conceptos teóricos.

En general a la hora de resolver problemas en matemáticas seguiremos el siguiente esquema:

- **a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- **b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- **c)** Traducción del problema al lenguaje algebraico
- **d)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- **e)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- **f)** Evaluar e interpretar los resultados con los datos del problema. ¿Son lógicos? ¿Se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿Puedo comprobar si la solución es correcta?

Veamos algunos ejemplos:

1.- Expresa en forma de producto el área de las siguientes figuras y calcúlalas para x=2 e y =3.



El área total de todas las figuras será la suma de las áreas de cada una de ellas:

$$Area_{Total}=Area_{rectángulo}+Area_{cuadrado}+Area_{triángulo}$$

Si sustituimos con los datos del problema:

$$Area_{Total}=Area_{rectángulo}+Area_{cuadrado}+Area_{triángulo}=2x\cdot y+(xy)^2+\frac{2y\cdot x^2}{2}=2xy+x^2y^2+yx^2$$

Como nos lo piden en forma de producto, hemos de sacar factor común los factores que se repiten:

$$A(x,y)=2xy+x^2y^2+yx^2=xy(2+xy+x)$$

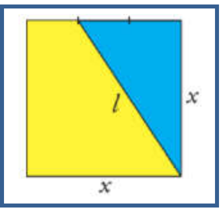
Cuando nos piden calcular el valor para x=2 e y =3, nos están pidiendo el valor numérico del polinomio A para estos valores, así que:

$$A(x,y)=xy(2+xy+x) \quad\rightarrow\quad A(2,3)=2\cdot3(2+2\cdot3+2)=6\cdot(2+6+2)=6\cdot10=60\ u.a.$$

Por tanto el área pedida es de 60 unidades de área.

2.- Fíjate en la figura y expresa algebraicamente:

a) El área del triángulo Azul.
b) El área del trapecio amarillo.
c) La longitud de l.
d) Calcula la longitud de l, si x=5 cm



a) El área de un triángulo viene dada por: $A=\dfrac{Base\cdot Altura}{2}=\dfrac{B\cdot h}{2}$, en el dibujo podemos observar que la base del triángulo es *x*, y la altura es *2/3 x*. Por tanto si sustituimos en la fórmula obtenemos:

$$A=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{x\cdot\frac{2}{3}\cdot x}{2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{2}=\frac{1}{3}x^2\ u.a.$$

b) El área de un trapecio amarillo la podemos calcular restando al área del cuadrado, el área del triángulo azul.

$$A=A_{\square}-A_{\triangle}=x^2-\frac{1}{3}x^2=\frac{2}{3}x^2\ u.a.$$

c) La longitud de l, la podemos calcular utilizando el teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2$ en el triángulo azul.

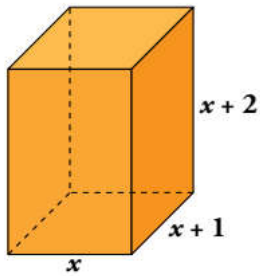
Sustituyendo nuestros valores llegamos a: $l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2$

Si operamos y despejamos l: $l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=x^2+\frac{4}{9}x^2=\frac{13}{9}x^2 \quad\rightarrow\quad l=\sqrt{\frac{13}{9}x^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}x\ u.l.$

d) Si x=5, el valor de l será: $l(x)=\frac{\sqrt{13}}{3}x \quad\rightarrow\quad l(5)=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot 5=\frac{5\sqrt{13}}{3}=6\ cm$

3.- Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales consecutivos.

Si el largo es x, el ancho será x+1 y el alto x+2, por tanto: $\begin{cases} Alto: x \\ Ancho: x+1 \\ Alto: x+2\end{cases}$



El área total de la figura será la suma de todas sus áreas laterales. Si observamos la figura, las caras se repiten dos a dos, por tanto las áreas de las bases y las áreas laterales serán:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=2\cdot x\cdot(x+1)=2x^2+2x \\ A_2&=2\cdot x\cdot(x+2)=2x^2+4x \\ A_3&=2\cdot(x+1)\cdot(x+2)=2x^2+6x+4\end{aligned}\right\} \rightarrow\quad A_{Total}=A_1+A_2+A_3=2x^2+2x+2x^2+4x+2x^2+6x+4 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad A_{Total}(x)=6x^2+12x+4$$

El volumen se calcula multiplicando ancho x largo x alto, por tanto:

$$Vol=x\cdot(x+1)\cdot(x+2)=x\cdot\left(x^2+3x+2\right)=x^3+3x^2+2x \quad\rightarrow\quad Vol(x)=x^3+3x^2+2x$$

5.11.- Autoevaluación

1.- Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.
b) El cuadrado de la diferencia de dos números.
c) La suma de las edades de un padre y su hijo hace 5 años.

2.- Cuales son el coeficiente y el grado del siguiente monomio: $-\frac{2}{3}xy^2$

3.- Calcula el valor numérico del polinomio $2x^3-7x-2$ para $x=0$, $x=-1$ y $x=1/2$

4.- Reduce las siguientes expresiones:

a) $x(x^2-5)-3x^2(x+2)-7(x^2+1)$

b) $5x^2(1-3x)-x(2x-3x^2)-2\cdot 3x$

5.- Opera y reduce.

a) $3\cdot(-5x)$ **b)** $2x\cdot 3x^2$
c) $6x^4:3x$ **d)** $10x^5:5x^3$

6.- Opera y reduce.

$a)\ 5x-x^2+7x^2-9x+2$

$b)\ 2x+\ 7y-\ 3x+y-x^2$

$c)\ x^2y^2-\ 3x^2y-\ 5xy^2+x^2y+xy^2$

7.- Observa los siguientes polinomios y calcula:

$P(x)=4x^4-3x^2+5x-7$ $Q(x)=2x^2-x+3$

a) 2P + Q **b)** P – 3Q **c)** P · Q **d)** P : Q

8.- Saca factor común.

a) $2x(x-2)+x^2(x-2)-3(x-2)$

b) $2xy^2-4x^2y+6x^2y^2$

9.- Desarrolla:

$$(x+1)^2-(x-2)^2+(x+1)\cdot(x-1)$$

10.- Doblando un alambre de 40 cm formamos un rectángulo. Halla la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcula su valor para $x=4$.

11.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} \qquad \frac{x^3-4x}{x^3+4x^2+4x} \qquad \frac{3x^3-6x^2}{3x^4+24x^3-60x^2}$$

12.- ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La expresión $9x^3-15x^2=3x^2\cdot(3x-5)$ es una identidad.
b) Si multiplicamos dos binomios de grados 1 y 2, se obtiene un polinomio de grado 3.
c) Si sumamos dos binomios, se obtiene siempre un binomio.
d) Los números son monomios.
e) Los monomios $3a^2b$ y $-3ab^2$ son semejantes.
f) Al realizar la división $3x^2y^2 : 6xy^2$ se obtiene un monomio.