Unidad Didáctica 4

# PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

**3º ESO**

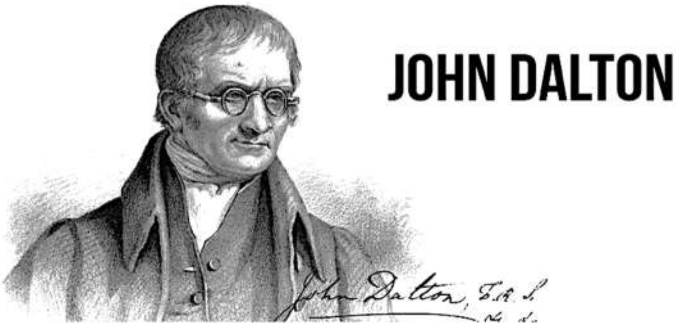
## En esta unidad vas a:

1. **Reconocer Razones y Proporciones**
2. **Identificar relaciones de proporcionalidad directa e inversa.**
3. **Resolver problemas de proporcionalidad**
4. **Efectuar repartos proporcionales**
5. **Realizar cálculos con porcentajes**
6. **Aplicar aumentos y disminuciones porcentuales**
7. **Resolver problemas con porcentajes encadenados**

# SUMARIO

## 4.0.- Lectura comprensiva

### Cuando el verde es rojo




El joven de 26 años, John Dalton, era consolado por su hermano mayor, Jonathan, mientras paseaban por la ciudad inglesa de Kendal.

–John, no te lo tomes tan a pecho. Seguro que mamá no quiso ofenderte.

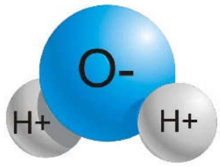
John no parecía muy convencido y miraba incrédulo la prenda que había regalado a su madre, y que esta le había devuelto visiblemente enfadada.

– No entiendo por qué no le gusta, el dependiente me aseguro que el paño era de primera calidad.

–Ya sabes que mama es muy religiosa y el color rojo… –le contestó su hermano Jonathan.

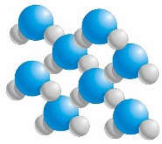
–Tú tampoco te habías dado cuenta –protesto John y, mientras arrojaba la prenda escarlata al río, comenzó a pensar: ¿Por qué su hermano y el mismo no podían distinguir los colores?

Dos años después, en 1793, John Dalton publicaba un trabajo donde se describía el tipo de enfermedad que él y su hermano sufrían, conocida a partir de entonces como daltonismo.




Dalton adquirió fama y pasó a la historia de la ciencia por su teoría atómica, donde juega un papel fundamental la proporcionalidad numérica. (Postulado 8)

Por ejemplo, una molécula de agua está formada por tres átomos, dos de hidrógeno y uno de oxígeno.



Su teoría afirma que, independientemente de la cantidad de agua, la cantidad de átomos de hidrógeno y oxígeno estará siempre en la misma proporción. 2:1

**Lee nuevamente el texto anterior y luego selecciona la respuesta correcta:**

**1.-** ¿Por qué ciudad se daban un paseo los hermanos Dalton?

**2.-** ¿Por qué estaba enfadado John?

**3.-** ¿Qué es ser daltónico?

**4.-** ¿En qué año publicó un trabajo sobre el daltonismo?

**5.-** Busca información sobre la vida de este químico ingles nacido en el siglo XVIII.

**6.-** Seguro que en Física y Química has estudiado el modelo atómico de Dalton. ¿Te acuerdas de qué decía?

## 4.1.- Introducción

Una de las complejidades matemáticas a las que se enfrentaban los mercaderes en la Edad Media y comienzos del Renacimiento era el cambio de moneda… Con el tiempo, muchas ciudades comerciales italianas desarrollaron sus propias cecas y sistemas de monedas. No obstante, la multitud de monedas existentes con diferentes leyes y valores generaba preocupación entre los mercaderes y dio lugar a unas técnicas específicas para el cambio.

Fueron los mercaderes italianos quienes dominaron inicialmente el nuevo y creciente comercio europeo, utilizando nuevas técnicas de calcular y la numeración indo-arábiga como ayuda para resolver problemas comerciales. Técnicas específicas que recibieron nombres italianos. Además, gran parte de vocabulario mercantil nació de frases y palabras italianas.

En italiano, una mesa sobre la que se realizaban cálculos y se cambiaba dinero es un banco, de ahí procede la palabra española. Cuando se descubría que un cambista era corrupto su mesa era rota, físicamente, de ahí «*bancorruptus*», es decir, «bancarrota».

Del mismo modo, la expresión «endosar» procede del italiano «endorso: firmar en el dorso», puesto que las letras de cambio, que también aparecieron en esta época, tenían que verificarse con una firma.

En la actualidad, la proporcionalidad resulta imprescindible en el desarrollo de cualquier ciencia aplicada (física, química, biología, estadística, etc.). Y, si te fijas, verás que tú la utilizas, junto al cálculo mental, en multitud de situaciones cotidianas: comprar, distribuir, predecir, especular, hacer recuentos e incluso cocinar.

En internet encontramos la receta de un bizcocho para seis personas. Se necesitan los siguientes ingredientes: 500 gramos de harina, un sobre de levadura, 2 vasos de 250 ml de leche, 1 vaso de aceite de oliva, 2 vasos de azúcar, 1 cucharada de canela en polvo y la ralladura de un limón. Si necesitamos hacer un bizcocho para tres personas, es lógico suponer que la cantidad necesaria de cada uno de los ingredientes es la mitad de la indicada para un bizcocho de seis personas. Pero si se quiere que el bizcocho sea para que coman cinco, siete u ocho personas, ¿cuál sería la cantidad necesaria de cada ingrediente?

## 4.2.- Razón y Proporción

En este capítulo vamos a trabajar mucho con los conceptos magnitud, razón y sobre todo proporción, veamos que significa cada uno de ellos.

### 4.2.1.- Magnitudes

Una ***magnitud*** es una propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como la masa, la temperatura o las dimensiones. Las magnitudes se miden usando un patrón que tenga bien definida esa magnitud, y tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón. Por ejemplo, se considera que el patrón principal de longitud es el metro, que se define como la distancia que recorre la luz en el vacío en un intervalo de 1/299 792 458 s.

### 4.2.2.- Razón

Definimos la ***razón*** entre dos cantidades comparables como el cociente de éstas, expresado como fracción (o como decimal o entero si es más conveniente). Así, la razón entre una magnitud $a$ y una magnitud $b$ la expresamos como:

$$\frac{a}{b}$$

y se lee como $a$ es a $b$.

Al numerador de la fracción se le conoce como *antecedente* y al denominador como *consecuente.*

**Ejemplo**

***1.- Luis dedica 6 horas diarias al estudio y 2 horas diarias a jugar. ¿Cuál sería la razón entre las horas de estudio y las horas de juego que dedica diariamente Luis?***

En este caso el antecedente sería 6, mientras que el consecuente sería 2. Entonces, la razón estaría dada por:

$$\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, la razón es 3 y nos dice que, *por cada hora que Luis dedica a jugar, dedica tres horas a estudiar.*

Son ejemplo de razones:

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{1,47}{2,25} \qquad \frac{2,4}{5,7}$$

*Obsérvese que, al contrario de las fracciones, en las razones pueden aparecer números decimales.*

## 4.2.3.- Proporción

Una ***proporción*** es una igualdad entre dos razones. Así, dadas dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, tendríamos una proporción si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Una proporción se lee: ***a es a b, como c es a d.***

Además, a las magnitudes a y d se les conoce como ***extremos,*** mientras que a las magnitudes b y c se les conoce como ***medios.***

En cualquier proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Esto ocurre porque las dos fracciones son equivalentes y utilizamos la propiedad de las fracciones equivalentes.

**Ejemplo**

Consideremos las razones $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{14}$. Notemos que el producto de extremos $3 \cdot 14 = 42$ es igual que el producto de medios $7 \cdot 6 = 42$, por tanto estas dos razones forman una proporción:


Cuando en una proporción conocemos el valor de tres de las magnitudes *a, b y c, pero desconocemos* el valor de una cuarta magnitud, podemos calcularlo utilizando la propiedad anterior de que el producto de medios es igual al producto de extremos y después despejaremos la magnitud desconocida:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \rightarrow \quad a \cdot x = b \cdot c \quad \rightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{a} \qquad \textbf{(Regla de tres)}$$

**Ejemplo**

***2.- Calcula el término desconocido en cada proporción.***

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x} \xrightarrow{\text{Producto de extremos igual a producto de medios}} 1 \cdot x = 5 \cdot 3 \rightarrow x = 15 \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

b) $\frac{14}{y} = \frac{21}{33} \xrightarrow{\text{Producto de extremos igual a producto de medios}} 14 \cdot 33 = y \cdot 21 \xrightarrow{\text{Despejamos la magnitud desconocida}} y = \frac{14 \cdot 33}{21} = 22 \rightarrow \frac{14}{22} = \frac{21}{33}$

**Piensa y practica**

***1.- Calcula el término desconocido de cada de las proporciones siguientes:***

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{y}{3} = \frac{35}{7}$ | b) $\frac{27}{x} = \frac{81}{9}$ | c) $\frac{16}{6} = \frac{z}{14}$ | d) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ |

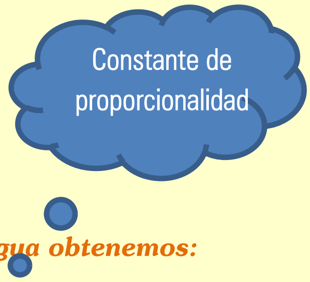
Si en una proporción se efectúa la división de $a$ entre $b$ y de $c$ entre $d$, se obtiene un mismo número $r$, denominado ***constante o razón de proporcionalidad.***

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r=\text{razón de proporcionalidad}$$

**Ejemplo**

***La siguiente tabla expresa la relación entre el número de botellas de agua que compramos en el supermercado y el peso de la bolsa de la compra en kg.***

| Botellas de agua | Peso de la compra |
|---|---|
| **3** | **4,5** |
| **8** | **12** |
| **12** | **18** |
| **20** | **30** |
| **35** | **52,5** |




***Si dividimos el peso de la compra entre el número de botellas de agua obtenemos:***

$$\frac{4,5}{3}=\frac{12}{8}=\frac{18}{12}=\frac{30}{20}=\frac{52,5}{35}=r=1,5$$

## 4.3.- Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son ***directamente proporcionales*** si al multiplicar o dividir cualquier valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda también multiplicado o dividido por ese mismo número.

En general, dos magnitudes $a$ y $b$ son directamente proporcionales cuando al aumentar una, la otra lo hace de la misma forma, o cuando al disminuir una la otra también lo hace, ***pero de la misma forma***.

$$\text{Si } a\uparrow \quad \rightarrow \quad b\uparrow \qquad \text{ó} \qquad \text{Si } a\downarrow \quad \rightarrow \quad b\downarrow$$

En general las magnitudes se suelen representar en una tabla:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Magnitud A** | a | 2·a | 3·a | 5·a | 10·a | 100·a | 1000·a | …… | K·a |
| **Magnitud B** | b | 2·b | 3·b | 5·b | 10·b | 100·b | 1000·b | ……. | K·b |

A partir de una tabla de valores de magnitudes directamente proporcionales, se escriben fácilmente proporciones: basta con igualar dos de las columnas de la tabla.

Supongamos un ejercicio en el que nos pidan completar la tabla de las tarifas de un pintor:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Área pintada (m²)** | **5** | **10** | y | **40** | t |
| **Coste (€)** | **7,5** | x | **30** | z | **90** |

Para completar la tabla, podemos realizar distintas proporciones:

$$\frac{5}{7,5}=\frac{10}{x} \quad \rightarrow \quad x=\frac{7,5\cdot 10}{5}=\frac{75}{5}=15 \qquad\qquad \frac{5}{7,5}=\frac{y}{30} \quad \rightarrow \quad y=\frac{5\cdot 30}{7,5}=\frac{150}{7,5}=20$$

$$\frac{5}{7,5}=\frac{40}{z} \quad \rightarrow \quad z=\frac{7,5\cdot 40}{5}=\frac{300}{5}=60 \qquad\qquad \frac{5}{7,5}=\frac{t}{90} \quad \rightarrow \quad t=\frac{5\cdot 90}{7,5}=\frac{450}{7,5}=60$$

Una vez calculadas las proporciones la tabla quedaría:

| Área pintada ($m^2$) | 5 | 10 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| Coste (€) | 7,5 | 15 | 30 | 60 | 90 |

## Piensa y practica

***2.- Completa las siguientes tablas de proporcionalidad directa:***

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 8 | 12 | | | | 44 |

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 10 | | | | |

**Ejemplo**

***3.- Una vendimiadora ha recolectado 14 kilos de uva en las 4 primeras cepas de la viña. ¿Cuántos kilos podría esperar de las próximas 10 cepas?***

| CEPAS | | KILOS |
|---|---|---|
| 4 | $\longrightarrow$ | 14 |
| 10 | $\longrightarrow$ | $x$ |

PROPORCIÓN

$$\frac{4}{14} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{14 \cdot 10}{4} = 35$$

*Solución: De 10 cepas puede esperar 35 kilos.*

## 4.3.1.- Método de reducción a la unidad

El método de ***reducción a la unidad*** es otro método para resolver problemas de proporcionalidad que consiste en calcular qué cantidad de la segunda magnitud le corresponde a 1 unidad de la primera. A continuación, se deduce el valor que corresponde a las n unidades que nos interesan multiplicando por n.

**Ejemplo**

***4.- Un grifo mana 78 litros de agua en 13 minutos, ¿qué cantidad de agua manará en 19 minutos?***

Calculamos el volumen de agua que manará en un minuto ***(reducción a la unidad)***

Si el grifo mana 78 litros en 13 minutos, en un minuto manará: $\frac{78}{13} = 6$ litros

Así que en 19 minutos, manará: $19 \cdot 6 = 114$ litros

*Solución: En 19 minutos manará 114 litros.*

## 4.3.2.- Regla de tres directa

A la hora de resolver problemas y basándonos en lo visto anteriormente y en el cálculo del término desconocido en una proporción, obtenemos un método cómodo para resolver problemas de proporcionalidad directa: La regla de tres.

- ✓ Se ordenan los datos y las incógnitas en una tabla. (cada magnitud en una columna)

| Magnitud 1 | Magnitud 2 |
|---|---|
| a | b |
| c | x |
| y | d |
| f | z |

- ✓ Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen. $\frac{a}{c}=\frac{b}{x}$
- ✓ Se calcula el término desconocido en la proporción. $\frac{a}{c}=\frac{b}{x} \rightarrow x=\frac{b\cdot c}{a}$

**Ejemplo**

***5.- Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuántas botellas llena en hora y media?***

| *Botellas* | | *Tiempo*(min) |
|---|---|---|
| 750 | $\rightarrow$ | 15 |
| $x$ | $\rightarrow$ | 90 |

$$\rightarrow \frac{750}{x}=\frac{15}{90} \rightarrow x=\frac{750\cdot 90}{15}=4.500$$

*Solución: En hora y media llenará 4.500 botellas.*

## 4.4.- Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son ***inversamente proporcionales*** si al multiplicar (o dividir) cualquier valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido (o multiplicado) por ese mismo número.

En general, dos magnitudes *a* y *b* son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, la otra lo hace de la misma forma, o cuando al disminuir una la otra también lo hace de la misma forma.

$$Si\ \ a\uparrow \quad \rightarrow \quad b\downarrow \qquad ó \qquad Si\ \ a\downarrow \quad \rightarrow \quad b\uparrow$$

Como ya hemos dicho con anterioridad, las magnitudes se suelen representar en una tabla:

| **Magnitud A** | a | 2·a | 3·a | a/5 | a/10 | 100·a | 1000·a | …… | K·a |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Magnitud B** | b | b/2 | b/3 | 5·b | 10·b | b/100 | 1000·b | ……. | b/k |

***En la proporcionalidad inversa, ocurre siempre que, al multiplicar el valor de las dos magnitudes, se obtiene un valor constante.***

$$a\cdot b=cte=ab \quad \rightarrow \quad 2a\cdot\frac{b}{2}=ab \quad \rightarrow \quad 3a\cdot\frac{b}{3}=ab \quad \rightarrow \quad .....$$

Por tanto, para calcular el valor desconocido, en una proporción inversa multiplicamos los valores conocidos de las dos magnitudes y lo dividimos por la tercera para calcular la cuarta.

**Ejemplo**

***6.- Diez obreros terminan una obra en 6 días, ¿Cuánto tardarán, trabajando al mismo ritmo, 12 obreros?***

| *Obreros* | | *Tiempo(días)* |
|---|---|---|
| 10 | $\rightarrow$ | 6 |
| 12 | $\rightarrow$ | $x$ |

$$\rightarrow x=\frac{10\cdot 12}{6}=5\ días$$

*Solución: 12 Obreros tardarán 5 días.*

Supongamos un ejercicio en el que nos pidan completar la tabla en la que se relacionan los obreros de una obra y los días en terminarla:

| **Obreros** | **10** | **20** | **15** | **30** | **t** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Días de trabajo** | **6** | **x** | **y** | **z** | **12** |

Para completar la tabla, podemos utilizar la propiedad vista anteriormente:

$$x=\frac{10\cdot 6}{20}=3 \qquad y=\frac{10\cdot 6}{15}=4 \qquad z=\frac{10\cdot 6}{30}=2 \qquad t=\frac{10\cdot 6}{12}=5$$

Una vez calculadas, la tabla quedaría:

| Obreros | 10 | 20 | 15 | 30 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Días de trabajo | 6 | 3 | 4 | 2 | 12 |

*Vemos que si multiplicamos los obreros por los días de trabajo siempre obtenemos el mismo valor (60).*

## Piensa y practica

**3.- Completa las siguientes tablas de proporcionalidad inversa:**

a)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 20 | 4 | | |
| 60 | 30 | | | 25 | 5 |

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | 4 | | |
| 36 | | 12 | | 6 | 4 |

c)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | 3 | 1 | 6 |
| 3 | 12 | 4 | | | |

d)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 21 | 7 | | 1 |
| 7 | | | | 1 | |

**4.- Distingue entre magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.**

1.- La cantidad de limones que compro y el direro que me gasto.
2.- Tiempo que se mantiene abierto un grifo y la cantidad de agua que sale.
3.- Número de personas que participan en un regalo y el dino que pone cada uno.
4.- Coste de un taxi y la distancia recorrida.
5.- Superficie de una baldosa y número de baldosas necesarias para cubrir una pared.
6.- Dinero depositado en un banco y beneficio que genera anualmente.

## 4.4.1.- Regla de tres inversa

La regla de tres inversa es una técnica que nos permite calcular, en magnitudes inversamente proporcionales, el valor de una cantidad, conociendo otras tres cantidades relacionadas.

✓ Se ordenan los datos y las incógnitas en una tabla. (cada magnitud en una columna)

| Magnitud 1 | a | c | y | f |
|---|---|---|---|---|
| Magnitud 2 | b | x | d | z |

✓ Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen, pero invertimos la que tiene la incógnita. P. Directa $\cancel{\frac{a}{c} = \frac{b}{x}}$ $\rightarrow$ P. Inversa $\frac{a}{c} = \frac{x}{b}$

✓ Se calcula el término desconocido en la proporción. $\frac{a}{c} = \frac{x}{b} \rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$

**Ejemplo**

**7.- Diez obreros terminan una obra en 6 días, ¿Cuánto tardarán, trabajando al mismo ritmo, 12 obreros?**

*Si hay más obreros, entonces tardarán menos días, así que se trata de una **proporcionalidad inversa**, y por tanto daremos la vuelta a la razón que lleva la incógnita.*

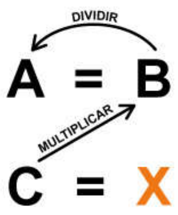
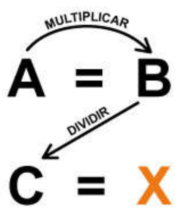
| Obreros | | Tiempo(días) |
|---|---|---|
| 10 | → | 6 |
| 12 | → | $x$ |

$$\rightarrow \cancel{\frac{10}{12} = \frac{6}{x}} \rightarrow \frac{10}{12} = \frac{x}{6} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 6}{12} = 5$$

*Solución: 12 Obreros tardarán 5 días.*

En este tipo de proporcionalidad también podríamos utilizar la ***reducción a la unidad*** para calcular la magnitud desconocida.

*Es muy importante a la hora de resolver un ejercicio de proporcionalidad, saber si se trata de una proporcionalidad directa o una inversa, porque como hemos visto se calculan de distinta manera. Veamos la diferencia entra ambas:*

| Proporcionalidad Directa | | Proporcionalidad Inversa | |
|---|---|---|---|
|   | $x = \frac{c \cdot b}{a}$ |   | $x = \frac{a \cdot b}{c}$ |

| Piensa y practica |
|---|
| ***5.- Un granjero ha gastado 260 € en 325 dosis de vacuna para su ganado. ¿Cuánto debe gastar aún si necesita adquirir 180 dosis más?*** |
| ***6.- Cuatro operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 14 operarios?*** |
| ***7.- Un ganadero tiene 20 vacas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. Si tuviera 120 vacas ¿para cuántos días tendría pienso?*** |

## 4.5.- Proporcionalidad compuesta

Hasta ahora hemos trabajado solo con dos magnitudes que pueden ser o directa o inversamente proporcionales, pero en la proporcionalidad compuesta intervienen más de dos magnitudes que a su vez pueden ser o directa o inversamente proporcionales.

Para resolver un problema de proporcionalidad compuesta seguiremos los siguientes pasos:

1. Se ponen los datos en una tabla, con tantas columnas como magnitudes intervengan en el problema. Y siempre, poniendo la incógnita en la segunda fila.

2. Se estudia la relación de todas y cada una de las columnas con la que tiene la incógnita para saber si son directa o inversamente proporcionales.

3. Se escribe una igualdad en la que la columna donde está la incógnita estará en el primer miembro y en el segundo colocaremos el producto de todas las demás.

4. Las magnitudes que sean directamente proporcionales se colocarán en el mismo orden que aparecen en la tabla, mientas que las que sean inversamente proporcionales se colocarán al revés, es decir, de manera inversa a como aparecen en la tabla.

5. Se calcula la magnitud pedida, resolviendo la proporcionalidad, es decir, multiplicando en cruz y despejándola.

**Ejemplo**

***8.- 120 obreros tardan 30 días en construir 4 jardines. ¿Cuántos obreros se necesitarán para construir 6 jardines empleando 60 días?***

Si recogemos los datos en una tabla y asignamos la x a la magnitud que nos preguntan:

| Obreros | Días | Jardines |
|---|---|---|
| **120** | **30** | **4** |
| **x** | **60** | **6** |

*Comparamos la columna de los obreros (la que lleva la x) con las otras dos:*

- *Si 120 obreros tardan 30 días, para más días…….menos obreros: **P. Inversa***
- *Si 120 obreros hacen 4 jardines, para más jardines….más obreros: **P. Directa***

Escribimos la proporcionalidad compuesta dejando sola la razón que tiene la incógnita y como los días es inversa, le damos la vuelta mientras que dejamos a los jardines igual:

$$\frac{120}{x}=\frac{60}{30}\cdot\frac{4}{6} \quad\rightarrow\quad \frac{120}{x}=\frac{240}{180} \quad\rightarrow\quad x=\frac{180\cdot 120}{240}=90$$

***Por tanto, necesitaremos 90 obreros.***

## Piensa y practica

**8.- En 8 días, 6 máquinas cavan una zanja de 2.100 metros de largo. ¿Cuántas máquinas serán necesarias para cavar 525 m trabajando durante 3 días?**

**9.- Cinco trabajadores tardan 16 días en construir una pequeña caseta de aperos trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos trabajadores serán necesarios para construir dicha casita en 10 días si trabajan 8 horas diarias?**

**10.- Cinco camiones, haciendo 6 viajes diarios, consiguen evacuar 600 m$^3$ de tierra en 4 días. ¿Cuántos días tardarán 7 camiones en mover 3.500 m$^3$ de tierra si cada camión realizara 10 viajes al día?**

## 4.6.- Repartos Proporcionales

Para repartir una cantidad entre varias personas a partes iguales, hay que dividir la cantidad entre el número de personas.

Si el reparto hay que hacerlo según unas cantidades iniciales distintas para cada persona, entonces no sería justo hacer un reparto equitativo. En este caso tenemos dos formas de repartir:

- ***Reparto directamente proporcional.*** Cada uno recibe una cantidad directamente proporcional a su valor inicial.
- ***Reparto inversamente proporcional***. Cada uno recibe una cantidad inversamente proporcional a su valor inicial.

### 4.6.1.- Repartos directamente proporcionales

Para repartir una cantidad, N, en ***partes directamente proporcionales*** a tres números, a, b y c, las partes se obtienen multiplicando cada número, a, b y c, por la constante de proporcionalidad, k, obtenida dividiendo la cantidad total entre la suma de los números a, b y c.

$$k=\frac{N}{a+b+c}$$

***En un reparto de este tipo, le corresponderá más a quien tiene más partes.***

Ejemplo

***9.- Un padre reparte 700 € en partes directamente proporcionales a sus edades: Miguel de 8 años, Fátima de 12 años y Lucía de 15 años. ¿Cuánto recibirá cada hijo?***

*Calculamos la constante de proporcionalidad* $k=\frac{N}{a+b+c}=\frac{700}{8+12+15}=\frac{700}{35}=20$

*Y ahora multiplicamos la edad de cada uno por dicha constante:*

$Miguel: 8\cdot 20=160$ € $\qquad$ $Fátima: 12\cdot 20=240$ € $\qquad$ $Lucía: 15\cdot 20=300$ €

*Por tanto, a Miguel le corresponde 160 €, a Fátima 240 y a Lucía 300 €.*

## Piensa y practica

***11.- Tres amigos aficionados al bricolaje alquilan un taladro para hacer arreglos en casa. El primero lo utiliza durante dos días y se lo pasa al segundo, que lo tiene cinco días. Después lo recibe el tercero, que lo usa durante tres días y lo devuelve a la tienda. ¿Cuánto debe poner cada uno para pagar los 60 € que cuesta en total el alquiler?***

## 4.6.2.- Repartos inversamente proporcionales

Para repartir una cantidad, N, en ***partes inversamente proporcionales*** a tres números, a, b y c, las partes se obtienen dividiendo cada número, a, b y c, por la constante de proporcionalidad, k, obtenida dividiendo la cantidad total entre la suma de las inversas de los números a, b y c.

$$k=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

***En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.***

**Ejemplo**

***10.- Se quiere repartir un premio de 1.860 € a los tres mejores corredores de una carrera, de manera inversamente proporcional a los tiempos que han invertido en completar el recorrido. El primer corredor tardó 24 segundos, el segundo 28 y el tercero 30.***

*Calculamos la constante de proporcionalidad* $k=\frac{N}{a+b+c}=\frac{1.860}{\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}}=\frac{1.860}{\frac{31}{280}}=16.800$

*Y ahora dividimos el tiempo de cada uno por dicha constante:*

Primero: $\frac{16.800}{24}=700$ € Segundo: $\frac{16.800}{28}=600$ € Tercero: $\frac{16.800}{30}=560$ €

*Por tanto, al primer corredor le corresponden 700 €, al segundo 600 y al tercero 560 €.*

**Piensa y practica**

***12.- En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 6, 5, 2, y 1 error, deben repartirse los 1 400 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?***

## 4.7.- Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana. El tanto por ciento es una razón con denominador 100, aunque también se puede considerar una fracción de denominador 100 o como un número decimal si realizamos la división.

***Un porcentaje se representa con el símbolo %***

- ***Un porcentaje indica una razón:*** Con la frase El 30 % de los jóvenes supera el metro ochenta de altura, estamos diciendo que, de cada 100 jóvenes, 30 miden más de 1,80 m.

$$30\%=\frac{30\ \textit{jóvenes}}{\textit{de cada}\ 100}=\frac{30}{100}$$

Con este dato podríamos escribir una tabla:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Jóvenes que miden más de 1,80 m (Parte) | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | …. |
| Total de Jóvenes | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | ….. |

Vemos que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, lo que nos permitiría también tratar una situación de porcentaje como una proporción.

- ***Un porcentaje indica una razón:*** Tomar el 30 % de una cantidad es dividir la cantidad en 100 partes y tomar 30; es decir, tomar la fracción:

$$30\%=\frac{30}{100}$$

- ***Un porcentaje se asocia a un número decimal:*** Un porcentaje se puede expresar en forma de fracción y, a su vez, la fracción en forma de número decimal, lo que nos proporciona una forma rápida para el cálculo de porcentajes.

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3$$

## 4.7.1.- Cálculos con porcentajes

- ✓ ***Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad***, se multiplica la cantidad por el tanto por ciento y se divide entre 100.

$$a\% \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100} \qquad \rightarrow \qquad 30\% \text{ de } 250 = \frac{30 \cdot 250}{100} = \frac{7500}{100} = 75$$

- ✓ ***Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad.***

$$a\% \text{ de } C = \frac{a}{100} \cdot C = \frac{C \cdot a}{100} \qquad \rightarrow \qquad 25\% \text{ de } 200 = \frac{25}{100} \cdot 200 = \frac{25 \cdot 200}{100} = \frac{5000}{100} = 50$$

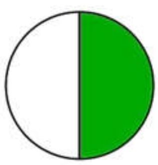
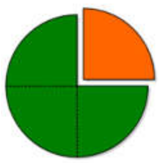
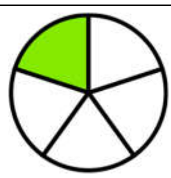
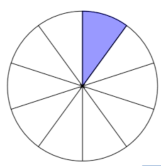
- ✓ ***Para calcular el porcentaje de una cantidad***, se multiplica esa cantidad por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

$$20\% \text{ de } 120 = 0,2 \cdot 120 = 24$$

## 4.7.2.- Cálculos rápidos con algunos porcentajes

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de cálculos sencillos:

- El 50 % equivale a la mitad de la cantidad. $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
- El 25 % es la cuarta parte de la cantidad. $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- El 10 % es la décima parte de la cantidad. $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
- El 20 % es la quinta parte de la cantidad. $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
- El 200 % es el doble de la cantidad. $200\% = \frac{200}{100} = 2$
- El 300 % es el triple de la cantidad. $300\% = \frac{300}{100} = 3$

| % | 50% | 25% | 20% | 10% |
|---|---|---|---|---|
| **Fracción** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |
| **Representación** |  |  |  |  |

| Piensa y practica | | | |
|---|---|---|---|
| **13.- Calcula:** | | | |
| **12% de 750** | **35% de 240** | **14% de 650** | **95 % de 20** |
| **14.- En mi clase somos 30 alumnos y el 90 % hemos aprobado el examen de Matemáticas. ¿Cuántos hemos aprobado?** | | | |

## 4.7.3.- Problemas con porcentajes

Cualquier situación de porcentaje maneja básicamente tres elementos: un total, un tanto por ciento y una parte del total. Veámoslo con algunos ejemplos:

$$\% = \frac{parte}{total} \cdot 100$$

### 4.7.3.1.- Cálculo de la parte, conocidos el total y el porcentaje:

Conocidos el total y el porcentaje, la parte la calcularemos multiplicando el porcentaje por el total:

Ejemplo

***11.- Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales el 35% trabaja en el turno de noche. ¿Cuántos empleados hay en el turno de noche?***

$$Parte = \%\cdot Total \quad \rightarrow \quad 35\%\cdot 180 = \frac{35}{100}\cdot 180 = \frac{180\cdot 35}{100} = 180\cdot 0,35 = 63$$

***Por tanto, en el turno de noche hay 63 empleados.***

### 4.7.3.2.- Cálculo del total, conocidos la parte y el porcentaje:

Conocidos la parte y el porcentaje, el total lo calcularemos haciendo una proporción:

Ejemplo

***12.- Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35 % de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?***

$$\begin{array}{cc} \underline{Empleados} & \underline{Porcentaje} \\ 63 & 35\% \\ x & 100\% \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{63}{x} = \frac{35}{100} \quad \rightarrow \quad x = \frac{63\cdot 100}{35} = 180$$

***Por tanto, la plantilla la componen 180 empleados***

### 4.7.3.3.- Cálculo del porcentaje, conocidos la parte y el total:

Para calcular el porcentaje conocidos la parte y el total, dividiremos la parte entre el total y lo multiplicaremos por 100:

Ejemplo

***13.- Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales 63 trabaja en el turno de noche. ¿Qué porcentaje de los empleados trabaja en el turno de noche?***

$$\begin{array}{cc} \underline{Empleados} & \underline{Porcentaje} \\ 180 & 100\% \\ 63 & x \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{180}{63} = \frac{100}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{63\cdot 100}{180} = \frac{63}{180}\cdot 100 = 35\%$$

***Por tanto, el 35% de los empleados está en el turno de noche***

**Piensa y practica**

***15.- En una aldea de 875 habitantes solo queda un 12 % de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes viven en la aldea?***

***16.- Víctor tenía ahorrados 500 € y ha gastado 350 € en una cámara GoPro. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?***

## 4.8.- Aumentos y disminuciones porcentuales

A lo largo de nuestra vida, como veremos a continuación, se nos presentarán ocasiones en las que nos puede interesar conocer a cuánto asciende una cantidad después de aumentarla o de disminuirla en un porcentaje determinado. (Rebajas, descuentos, pago de impuestos….)

Para ello nos ayudaremos del ***índice de variación porcentual***, $I_v$, que lo calcularemos:

$$I_v = 1 \pm \frac{\%}{100} \begin{cases} \bullet \text{ Aumentos} : I_v = 1 + \dfrac{\%}{100} \\ \bullet \text{ Disminuciones} : I_v = 1 - \dfrac{\%}{100} \end{cases}$$

- El índice de variación porcentual en un aumento porcentual es igual a 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal. $I_v = 1 + \frac{\%}{100}$
- El índice de variación porcentual en una disminución (descuento) porcentual es igual a 1 menos el descuento porcentual expresado en forma decimal. $I_v = 1 - \frac{\%}{100}$

### 4.8.1.- Aumentos porcentuales

Supongamos que queremos comprar por internet la nueva PlayStation 5 y encontramos una página en la que nos dice que su precio es 399 € + I.V.A. ¿Cuánto tendremos que pagar finalmente por la PS5?

Pues como el IVA es del 21%, tendremos que pagar 399 + el 21% de 399:

$$399 + \frac{21}{100} \cdot 399 = 399 + 83,79 = 482,79 \text{ €}$$

Si en la primera expresión, $399 + \frac{21}{100} \cdot 399$ sacamos factor común el 399, llegamos a:

$$399 + \frac{21}{100} \cdot 399 = 399 \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right)$$

Donde el número $1 + \frac{21}{100} = 1 + 0.21 = 1,21$ es el ***índice de variación porcentual*** visto anteriormente.

Por tanto, hubiera sido más fácil desde un principio, calcular el índice de variación porcentual y multiplicarlo por la cantidad inicial, para obtener el precio final.

$$I_v = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{21}{100} = 1 + 0,21 = 1,21 \quad \rightarrow \quad \text{Precio final} = 399 \cdot 1,21 = 482,79\text{€}$$

***La cantidad final $C_f$ que se obtiene al aumentar una cantidad inicial $C_i$ en un porcentaje p % se calcula mediante la expresión:***

$$C_f = C_i \cdot I_v = C_i \cdot \left(1 + \frac{\%}{100}\right)$$

Ejemplo

***14.- Una población costera tiene 35.000 habitantes en invierno, pero en verano, con el turismo, aumenta en un 40 %. ¿Cuántos residentes tiene durante el verano?***

Calculamos el Iv de un aumento del 40%: $I_v = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{40}{100} = 1 + 0,4 = 1,4$

Y multiplicamos por la población en invierno: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = C_i \cdot I_v = 35.000 \cdot 1,4 = 49.000$

***Por tanto, la población de la aldea en verano es de 49.000 habitantes***

## 4.8.2.- Disminuciones porcentuales

Supongamos ahora que vamos de compras por el Paseo de Revellín y vemos que en Zara hay rebajas. Entramos y encontramos una chaqueta de cuero cuyo precio es 150 €, pero tiene un descuento del 70%. ¿Cuánto pagaremos finalmente por la chaqueta?

Pues como el descuento es del 70%, tendremos que pagar 150 – el 70% de 150:

$$150 - \frac{70}{100} \cdot 150 = 150 - 105 = 45 \text{ €}$$

Si en la primera expresión, $150 - \frac{70}{100} \cdot 150$ sacamos factor común el 150, llegamos a:

$$150 - \frac{70}{100} \cdot 150 = 150 \cdot \left(1 - \frac{70}{100}\right)$$

Donde el número $1 - \frac{70}{100} = 1 - 0.7 = 0,3$ es, otra vez, el ***índice de variación porcentual*** de la rebaja.

Por tanto, hubiera sido más fácil desde un principio, como hemos hecho en el ejemplo anterior, calcular el índice de variación porcentual y multiplicarlo por la cantidad inicial, para obtener el precio final.

$$I_v = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{70}{100} = 1 - 0,7 = 0,3 \quad \rightarrow \quad \text{Precio final} = 150 \cdot 0,3 = 45\text{€}$$

***La cantidad final $C_f$ que se obtiene al disminuir una cantidad inicial $C_i$ en un porcentaje p % se calcula mediante la expresión:***

$$C_f = C_i \cdot I_v = C_i \cdot \left(1 - \frac{\%}{100}\right)$$

Ejemplo

***15.- Un teatro ha vendido 4.600 entradas en la semana del estreno de una nueva obra. El gerente estima que en la segunda semana la venta descenderá en un 20%. ¿Cuántas entradas espera vender en la segunda semana?***

Calculamos el Iv de la disminución del 20%: $I_v = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$

Y multiplicamos por las entradas: $C_f = C_i \cdot \left(1 - \frac{\%}{100}\right) = C_i \cdot I_v = 4.600 \cdot 0,8 = 3.680$

***Por tanto, las entradas vendidas esta semana son 3.680***

*Otra forma sería, si la venta descenderá un 20 %, quiere esto decir que se venderán el 80% de las entradas vendidas la semana pasada, por tanto: 4.600·0,8=3.680 entradas.*

| Piensa y practica |
|---|
| ***17.- Un embalse tenía, a principios de verano, 775 decámetros cúbicos de agua. Durante el estío, sus reservas han disminuido en un 68%. ¿Cuáles son las reservas actuales ahora, al final del verano?*** |
| ***18.- Un artículo que vale 120 euros, ante la excesiva demanda, sube un 20%. Luego, cuando se reduce la demanda, se rebaja un 20%. ¿Sigue valiendo lo mismo?*** |

## 4.9.- Porcentajes encadenados

En muchas ocasiones tendremos que calcular varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales. Lo más fácil será encadenarlos, y para ello calcularemos los índices de variación porcentual asociados a cada uno de los aumentos o disminuciones porcentuales y los multiplicaremos obteniendo un índice de variación porcentual total.

***La cantidad final $C_f$ que se obtiene al realizar varios aumentos o disminuciones porcentuales de una cantidad inicial $C_i$ se calcula mediante la expresión:***

$$C_f = C_i \cdot I_{vt} = C_i \cdot \left( i_{v_1} \cdot i_{v_2} \cdot i_{v_3} \cdot i_{v_4} \cdot i_{v_5} \cdot i_{v_6} \cdot i_{v_7} \cdot i_{v_8} \cdot i_{v_9} \ldots\ldots \right)$$

**Ejemplo**

***16.- En la escuela de idiomas de Ceuta se matriculan 125 estudiantes para estudiar francés, en segunda matrícula aumenta un 15% y a lo largo del curso se quita un 20% ¿Cuántos estudiantes de francés quedan a final de curso?***

Calculamos el Iv del aumento del 15%: $I_{v_1} = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{15}{100} = 1 + 0{,}15 = 1{,}15$

Calculamos también el Iv de los que se quitan: $I_{v_2} = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Calculamos el índice de variación total, multiplicando ambos: $I_v = I_{v_1} \cdot I_{v_2} = 1{,}15 \cdot 0{,}8 = 0{,}92$

Y por último calculamos los alumnos al final de curso multiplicando la cantidad inicial por el Iv total:

$$C_f = C_i \cdot I_{v_{Total}} = 125 \cdot 0{,}92 = 115$$

***Por tanto, quedan 115 estudiantes de francés***

| Piensa y practica |
|---|
| ***19.- Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30%, a continuación, baja un 15%, vuelve a bajar un 25%, y por último tiene una subida del 10%. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?*** |
| ***20.- El precio de la vivienda en España subió un 8% en 2005, un 15% en 2006, un 10 % en 2007 y bajó en 2008 un 15 %.***<br>***a) ¿Cuál ha sido el porcentaje de la variación total? ¿Aumenta o disminuye? ¿Por qué?***<br>***b) ¿Cuál es el precio actual de un apartamento que el 1 de enero de 2005 costaba 140.000 €?*** |
| ***21.- El precio del diésel experimentó diversas variaciones. En enero costaba 0,95 € y en febrero bajó su precio un 8%. En marzo subió un 3% y en abril subió un 2%. a) ¿Qué porcentaje total ha variado? b) ¿Cuál era su precio en abril?*** |
| ***22.- El número de visitantes a cierta exposición se incrementó durante el mes de febrero en un 12% con respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿Cuántos vieron la exposición en enero?*** |

## 4.10.- Autoevaluación

**1.** Resuelve por reducción a la unidad.

- **a)** Un manantial arroja 180 l de agua en 6 min. ¿Cuántos litros arrojará en un cuarto de hora?
- **b)** Abriendo 6 grifos, un depósito se vacía en 50 minutos. ¿Cuánto tardará en vaciarse abriendo solo 4?

**2.** Resuelve utilizando la regla de tres.

- **a)** Un coche, a una media de 100 km/h, hace un viaje en 6 horas. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo viaje un a camión a 80 km/h?
- **b)** Por un besugo de 875 g Eva ha pagado 10,85 €. ¿Cuánto pagará Miguel por otro besugo de 1,2 kg?

**3.** Completa las siguientes tablas de proporcionalidad:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 20 | 4 | | 40 | |
| 5 | 2 | | 10 | | 0,5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 6 | 15 | | 60 |
| 4 | 12 | | | 48 | |

**4.** Una modista que cobra por horas, ha recibido 585 € por la confección de un pantalón en el que ha invertido tres horas, un vestido en que ha invertido 4 horas, y un abrigo en el que ha trabajado 6 horas. ¿Cuánto ha cobrado por cada prenda?

**5.** Calcula:

**a)** 65 % de 80 **b)** 4 % de 3.200 **c)** 16 % de 160

**6.** De un pilón de agua que contenía 36.000 litros, se ha gastado un 15 %. ¿Cuántos litros quedan?

**7.** En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Qué porcentaje ha faltado?

**8.** Un ganadero sabe que para alimentar a sus 20 animales durante 30 días necesita 2 toneladas de pienso. ¿Cuántos días le durará la comida si compra 10 animales más y otros 1.500 kilogramos de pienso?

**9.** Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que supone el 75% de las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

**10.** ¿Qué índice de variación representa cada uno de estos aumentos o disminuciones porcentuales?

- **a)** Aumenta un 12%.
- **b)** Disminuye el 37%.
- **c)** Aumenta un 10% y, después, el 30%.
- **d)** Disminuye un 25% y aumenta un 42%

**11.** El último GPS del mercado cuesta 556 €. Si su precio subió un 15% y después bajó un 25%. ¿Cuál es el porcentaje de descuento final?

**12.** Doce obreros, trabajando ocho horas diarias hacen una pared de cincuenta metros de larga en 25 días. ¿Cuánto tardarán cinco obreros en hacer otra pared similar de cien metros de larga si trabajan diez horas diarias?

**13.** El precio de las naranjas ha sufrido importantes cambios estos meses de pandemia. A principios de mayo, el precio medio de un kilo de naranjas era de 1,30 €, subiendo el precio durante este mes un 14 %. En el mes de junio también se produjo un incremento en el precio, en este caso fue del 9 %. Sin embargo, en el mes de julio, el precio bajo un 12 % sobre el mes de junio. **a)** ¿Cuál era el precio del kilo de naranjas a finales de julio?, **b)** ¿Cuál ha sido el porcentaje que ha variado el precio de las naranjas entre mayo y julio?

**14.** Un reservorio cilíndrico de 8 m de radio y 12 de altura, abastece a 75 personas durante 20 días. ¿Cuál deberá ser el radio de un recipiente de 6 m de altura que abastecería a 50 personas durante 2 meses?

**15.** Un pueblo tiene 3 institutos. El instituto A tiene 520 alumnos matriculados, el B 360 alumnos y el C 140. Para su funcionamiento se deben repartir 124.440 € en partes directamente proporcionales al número de alumnos que tienen matriculados. ¿Cuánto recibirá cada instituto?

**16.** En carrera ciclista se reparte un premio de 16.650 €, entre los tres primeros corredores, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 minutos, el segundo 15 minutos y el tercero 18 minutos. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?