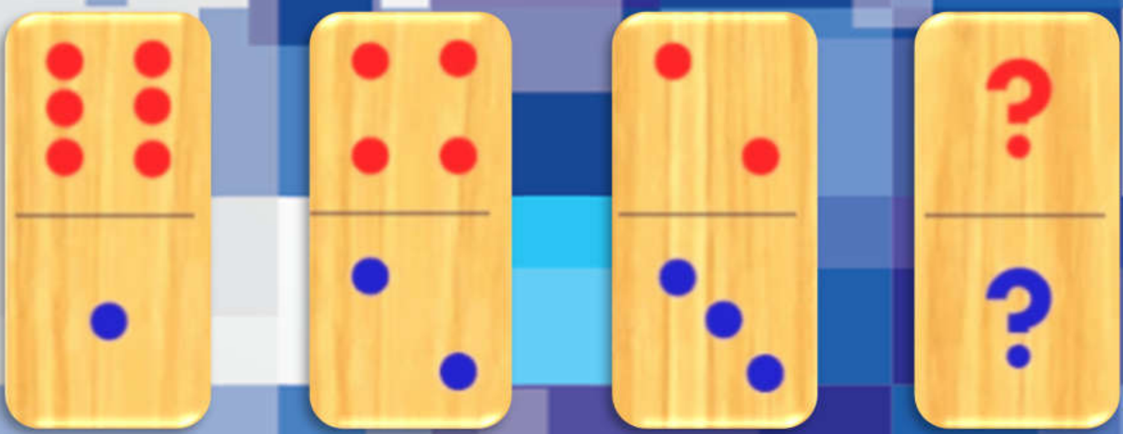
Unidad Didáctica 3

PROGRESIONES

3º ESO



$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \qquad a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

En esta unidad vas a:

1. **Reconocer las sucesiones y deducir su regla de formación.**
2. **Distinguir si una sucesión es una progresión aritmética o geométrica.**
3. **Calcular el término general y la suma de los "n" primeros términos de una progresión.**
4. **Resolver problemas donde aparezcan progresiones.**

SUMARIO

Progresiones aritméticas

Cada término (excepto el primero) se obtiene sumando al anterior un número o cantidad fija que llamamos **diferencia** (d).

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \xrightarrow{+d} a_7 \xrightarrow{+d} a_8, \dots, a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$$

Diferencia

$$\boxed{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1}}$$

Términos

Dos términos cualesquiera de la progresión están relacionados mediante la diferencia de la siguiente manera...

$\boxed{a_q = a_p + (q-p)\cdot d}$ con $p < q$ Ejemplo: $a_5 = a_2 + (5-2)\cdot d$

Esto nos permite calcular un término a partir de otro conociendo la diferencia, o calcular la diferencia a partir de dos términos de la progresión.

Término general

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Suma de n términos

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

Ejemplo: Suma de los 5 primeros términos...

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5$$

Progresiones geométricas

Cada término (excepto el primero) se obtiene multiplicando el anterior por un número o cantidad fija que llamamos **razón** (r).

$$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2 \xrightarrow{\cdot r} a_3 \xrightarrow{\cdot r} a_4 \xrightarrow{\cdot r} a_5 \xrightarrow{\cdot r} a_6 \xrightarrow{\cdot r} a_7 \xrightarrow{\cdot r} a_8, \dots, a_{n-1} \xrightarrow{\cdot r} a_n$$

Razón

$$\boxed{r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Términos

Dos términos cualesquiera de la progresión están relacionados mediante la razón de la siguiente manera...

$\boxed{a_q = a_p \cdot r^{q-p}}$ con $p < q$ Ejemplo: $a_5 = a_2 \cdot r^{5-2}$

Esto nos permite calcular un término a partir de otro conociendo la razón, o calcular la razón a partir de dos términos de la progresión.

Término general

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Suma de n términos

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}} \quad ó \quad \boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

Ejemplo: Suma de los 5 primeros términos...

$$S_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r}$$

Suma de todos los términos

Cuando $-1 < r < 1$ se puede calcular la suma de "todos" los términos de la progresión como...

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-r}}$$

3.0.- Lectura comprensiva

La mascota de la Princesa

El Rey de Sicilia, *Federico II*, también como *Federico III de Aragón*, había encargado al filósofo de la Corte, *Juan de Palermo,* que examinara a Leonardo de Pisa con problemas matemáticos de difícil solución porque se comentaba que era un matemático con una mente privilegiada.

Leonardo, más conocido como *Fibonacci*, les presentó las soluciones de su trabajo y esperó a que las evaluaran. A medida que lo estudiaban, sus caras reflejaban la sorpresa que les producía.

Mientras tanto, Fibonacci se había alejado un poco y charlaba con una niña que, sentada en la escalera, acariciaba a un conejito que mantenía en su regazo.

–*Yo tuve una pareja de conejos* –decía Fibonacci.
–*¿De qué color eran?* –se interesó la niña.
–*Eran blancos y los tuve en casa, a ellos y sus crías, durante 12 meses, luego me trasladé con mi padre y no me los pude llevar.*
¡En un año tenía 144 parejas!
–*Eso es imposible* –dijo la niña mientras imaginaba todo lleno de conejos.
–*La primera pareja comenzó a criar al segundo mes, y de cada camada me quedaba con otra pareja, que comenzaba a procrear a su vez a los dos meses de vida* –repasaba mentalmente el sabio.

La niña empezó a apuntar y recogió los datos en una tabla, mientras Fibonacci la observaba con una sonrisa.

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Parejas Conejos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Una vez terminada la tabla, y, de repente, Margarita lo vio claro y exclamó:

–*El número de parejas es, cada mes, la suma de los dos meses anteriores.*

<u>Lee nuevamente el texto anterior y completa el siguiente cuestionario:</u>

1.- La hija del Rey Federico con la que se entretenía Leonardo de Pisa mientras evaluaban su trabajo se llamaba: ____

2.- El famoso matemático también era conocido bajo el sobrenombre de:_______________________

3.- El encargado de evaluar el trabajo de Fibonacci fue: __________________________________

4.- ¿De qué color eran los conejos? _______________________

5.- ¿Cuántos conejos tenía Fibonacci al cabo de un año?__________________

6.- ¿De qué se dio cuenta Margarita al terminar de hacer la tabla?_________________________

3.01.- Introducción

Se pueden tomar las progresiones como ejemplo más sencillo del concepto de sucesión. Desde los albores de la historia de las matemáticas se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética comercial.

El origen de las progresiones, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto. Veamos su desarrollo en algunas civilizaciones:

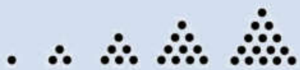
- **En Babilonia** era conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los babilonios (2000 a.C. – 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las progresiones geométricas.

- **En el antiguo Egipto** ya se estudiaban las relaciones aritméticas en relación con sus problemas cotidianos. En cuanto al trato de las sucesiones sus conocimientos se recogen en ***"El papiro Amhes".*** Donde aparece tablas de descomposición de 2/n en suma de fracciones unitarias (con n impar pues para n par equivale a una unitaria al simplificarse), y otra en las que se escriben las descomposiciones de las fracciones de la forma n/10.

Otros de los textos importantes que recogen los conocimientos importantes de esta civilización es **"El papiro Rhind".** En él se recogen conocimientos generales sobre series geométricas y aritméticas.

- **En la antigua india** (900 a.C – 200 d.C), el matemático ***Pingala*** (Siglo I a. C.) expone en su obra ideas básicas sobre los números de Fibonacci, llamados *mātrāmeru.* Por otro lado, entre el 400 a. C. y el 200 a. C., los matemáticos yainas comenzaron el estudio de las matemáticas para el exclusivo propósito de las matemáticas, desarrollando matemáticamente las sucesiones y progresiones. El Manuscrito *"Bakhshali",* escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C., incluía soluciones de progresiones aritméticas y geométricas.

- **En la antigua Grecia** (hasta el 300 d.C) ya se comienzan a usar los números figurales, debido a lo pobre que resultaba ser el sistema de numeración de la época. Así, mediante un enfoque geométrico, representaban mejor las cantidades, aludiendo a regularidades tales como:

Nombre	Números triangulares	Números cuadrangulares
Expresión gráfica		
Regla de recurrencia	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(n+1)^2$

Además de otras aportaciones de la cultura Griega a las matemáticas, cabe destacar en nuestro tema que se comienza a hablar en este tiempo de sucesiones de números pares e impares. Aunque se asociaba lo "par" con lo ilimitado y lo "impar" con limitado.

Cabe destacar a ***Arquímedes*** (287 a.C– 212 a.C) que trabajó durante su vida con algunas sucesiones y series de gran importancia entre la que podemos destacar: El valor de π mediante la aproximación de una sucesión de polígonos circunscritos en la circunferencia y la cuadratura de la parábola.

- **En la edad media,** destacamos en cuanto al desarrollo de las sucesiones a Bhaskara II (1.114 – 1.185), importante matemático de la India en el siglo XII. En el libro IX de Los Elementos de ***Euclides*** aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. ***Bhaskara*** plantea en su más conocida obra, *"En Lilavati",* diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

Además en la época destaca el matemático ***Leonardo de Pisa*** (1170-1250). Más conocido como Fibonacci, su principal aportación a las matemáticas fue el estudio y cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, que actualmente tiene múltiples aplicaciones en los fenómenos (especialmente naturales). Esta sucesión es conocida como *sucesión de Fibonacci*.

En 1.220 Leonardo escribe su obra *"Geometría Práctica"* y además publica una obra menos conocida sobre teoría de números donde se estudian propiedades de los números y algunas series. De hecho hoy en día las sucesiones recurrentes llevan su nombre.

En el renacimiento se abordan y resuelven problemas relacionados con el algebra, y por relación con las sucesiones, de gran envergadura. Los escritos de ***Nicolás de Cusa*** (1401-1464) se basan en la crítica sobre la noción del infinito. Merece la pena también subrayar la importancia de ***Michael Stifel*** (1487-1567) al que debemos importantes avances en el estudio de las progresiones Aritméticas y Geométricas.

En la Edad contemporánea el desarrollo del tema es más que notable y, entre otros autores, destacan:

- ✓ **Isaac Newton** (1642-1727), cuyo binomio Newton es capaz de desarrollar cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos.
- ✓ **Gottfried Leibniz** (1646-1716), aporta al desarrollo del tema una fórmula, en forma de serie, para el cálculo de π.
- ✓ **Leonhard Euler** (1707,1783) contribuyó activamente a todas las ramas de las matemáticas, trabajando también con sucesiones y series.
- ✓ **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Además caracterizo el concepto de límite mediante las sucesiones.
- ✓ **Joseph Fourier** (1768-1830) introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier.
- ✓ **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), desde temprana edad, destaca por sus habilidades matemáticas, incluso a los 7 años consiguió resolver el problema de la suma de los 100 primeros números en una clase en el colegió estableciendo una relación simétrica en esta progresión aritmética.
- ✓ **Otto Stolz** (1822-1232) es uno de los grandes matemáticos austriacos de la época y es conocido por sus trabajos en materia de análisis matemático e infinitesimal. Sobre el tema de sucesiones consiguió estudiar la convergencia de una sucesión a partir de otra sucesión monótona creciente y divergente. *(Criterio de Stolz)*

3.02.- Sucesiones

Se llama ***sucesión***, $\{a_n\}$, a un conjunto infinito de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero..., se representa por:

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$$

Los elementos de la sucesión se llaman ***términos*** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término... de una sucesión $\{a_n\}$, pero es más cómodo llamarlos a_1, a_2, a_3 , a_4, a_5, a_6, ..., donde el subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión.

Ejemplo

	Sucesión	Primer Término	Segundo Término	Tercer Término	Cuarto Término	Quinto Término	Sexto Término	...
a)	$a_n=\{1, 5, 9, 13, 17, 21 \ldots\}$	$a_1=1$	$a_2=5$	$a_3=9$	$a_4=13$	$a_5=17$	$a_6=21$	...
b)	$b_n=\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$	$b_1=1$	$b_2=4$	$b_3=9$	$b_4=16$	$b_5=25$	$b_6=36$	...
c)	$c_n=\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$	$c_1=2$	$c_2=4$	$c_3=8$	$c_4=16$	$c_5=32$	$c_6=64$	...
d)	$d_n=\{1, -3, 9, -27, 81, -243, \ldots\}$	$d_1=1$	$d_2=-3$	$d_3=9$	$d_4=-27$	$d_5=81$	$d_6=-243$	...
e)	$s_n=\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$	$s_1=1$	$s_2=1$	$s_3=2$	$s_4=3$	$s_5=5$	$s_6=5$	...
f)	$x_n=\{1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots\}$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=4$	$x_4=7$	$x_5=11$	$x_6=11$	...

En general, las sucesiones se construyen siguiendo un cierto criterio, como:

- ✓ Se pasa de un término a otro sumando (o multiplicando por) siempre la misma cantidad.
- ✓ Cada término es el cuadrado del lugar en que se encuentra.

- ✓ Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.
- ✓ Alternativamente, sumamos o multiplicamos por un mismo número.

Piensa y practica

1.- Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones del ejemplo anterior y añade tres términos más a cada una.

2.- Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. Para ello, invéntate tú el criterio.

3.2.1.- Término General de una Sucesión

Se llama ***término general*** de una sucesión a, y se simboliza con a_n, a la expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión a partir del lugar que ocupa.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $a_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Ejemplo

En la sucesión del ejemplo anterior, $a_n=\{1, 5, 9, 13, 17, 21 ...\}$, nos damos cuenta que cada término se calcula, sumando 4 al término anterior, quiere esto decir que el término general, podría ser $a_n=4n$, pero si sustituimos n por los números naturales obtendríamos {4,8,12,16…} que vemos que no coincide con la nuestra, aunque si comparamos término a término, observamos que 4 es 3 unidades mayor que 1, 8 también es 3 unidades mayor que 5, 12 es 3 unidades mayor que 9…. Luego los términos de nuestra sucesión son 3 unidades mayores que los de la sucesión original, por tanto bastaría con restarle 3.

Con esto, el término general de la sucesión sería: $a_n=4n-3$, y ahora vemos que si coincide con la nuestra.

$a_n=\{4\text{-}3=1,\ 8\text{-}3=5,\ 12\text{-}3=9,\ 16\text{-}3=13,\ 20\text{-}3=17,\ 24\text{-}3=21\ ...\}$,, por tanto, el término general de nuestra sucesión es:

$$a_n = \{1,5,9,13,17,21\} = \{4n-3\} \begin{cases} a_1 = 4\cdot1-3 = 4-3 = 1 \\ a_2 = 4\cdot2-3 = 8-3 = 5 \\ a_3 = 4\cdot3-3 = 12-3 = 9 \\ a_4 = 4\cdot4-3 = 16-3 = 13 \\ a_5 = \dots\dots\dots \end{cases}$$

3.2.2.- Sucesiones Recurrentes

Las sucesiones que habitualmente manejaremos en este curso estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Una sucesión se llama ***recurrente*** si su términos, a partir de uno dado, se obtienen a partir de los anteriores mediante una expresión algebraica, que se llama *Ley de Recurrencia.*

Ejemplo

En la sucesión del ejemplo anterior e) $s_n=\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$, cada término se obtiene, de forma recurrente, sumando los dos anteriores. Se define así:

$$s_n = \{1,1,2,3,5,8,13,\dots\} = \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = 1+1 = 2 \\ s_4 = 2+1 = 3 \\ s_5 = 3+2 = 5 \end{cases} \quad \textit{de donde} \quad s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

Piensa y practica
3.- Asocia cada sucesión, {1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}, {1, −3, 9, −27, 81, −243, ...}, {2, 4, 8, 16, 32, 64, ...} con uno de los siguientes términos generales: $b_n = n^2$; $c_n = 2n$; $d_n = (-3)^{n-1}$
4.- Escribe los cinco primeros términos de la sucesiones dadas por los términos generales:
a) $a_n = n^3$ **b)** $b_n = n^2 - 3n + 7$ **c)** $c_n = \frac{n-3}{n+4}$ **d)** $d_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
5.- Forma una sucesión recurrente con estos datos: $j_1 = 2$; $j_2 = 3$ y $j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$
6.- Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:
a) 1, − 4, 5, −9, 14, −23, ... b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, ... c) 1; 2; 1,5; 1,75; ... d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, ...

3.2.3.- Sucesiones Crecientes y Decrecientes

Sucesiones	
Crecientes	Decrecientes
Decimos que una ***sucesión es creciente***, si cada término es mayor que el anterior.	Decimos que una ***sucesión es de creciente***, si cada término es menor que el anterior.
$a_{n-1} < a_n$	$a_{n-1} > a_n$
$a_n = \{1,2,3,4,5,6,7,8......\}$	$b_n = \left\{16,8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}......\right\}$
Si una sucesión es creciente, la diferencia entre dos términos consecutivos es positiva: $a_n - a_{n-1} > 0$	Si una sucesión es decreciente, la diferencia entre dos términos consecutivos es negativa: $a_n - a_{n-1} < 0$

3.03.- Progresiones Aritméticas

Observa la sucesión formada por las señales de tráfico de la figura de la derecha: en ella, el primer término, sería el formado por la primera señal, $a_1=70$, el segundo, por la segunda, $a_2=60$; el tercero $a_3=50$, $a_4=40$, $a_5=30$, $a_6=20$, $a_7=10$.

Queda claro que se trata de una sucesión decreciente, pero en ella ocurre una cosa curiosa, la diferencia entre cada una de ellas con la siguiente es siempre la misma:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 70 - 60 = 10 \\ a_2 - a_3 &= 60 - 50 = 10 \\ a_3 - a_4 &= 50 - 40 = 10 \\ a_4 - a_5 &= 40 - 30 = 10 \\ &........ \end{aligned}\right\} \qquad a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a_3 - a_4 = a_4 - a_5 = a_5 - a_6 = 10$$

Cuando esta propiedad se cumple, la sucesión se llama progresión aritmética, porque cada término se consigue sumando (o restando) al anterior una misma cantidad.

Una ***progresión aritmética*** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, es igual al anterior sumando una cantidad fija (positiva o negativa), a la que llamamos ***diferencia, d,*** de la progresión.

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia.

Ejemplo

1.- Conocidos el primer término $a_1 = 2$ y la diferencia $d = 3$, de una progresión aritmética, ¿Cómo hallaríamos el término 100?

Para pasar del primer término, a_1 , al término 100, a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

- ✓ Cada paso supone aumentar 3 unidades.
- ✓ Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.
- ✓ Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

El ***término general*** $\{a_n\}$ de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d viene dado por la expresión:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Para obtener esta expresión basta tener en cuenta que para pasar de a_1 a a_n damos n – 1 pasos de amplitud d.

Piensa y practica

7.- El primer término de una progresión aritmética s_n es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.

8.- Calcula, para la progresión aritmética {9, 7, 5, 3, 1, −1, −3, −5, ...} el término 31.

9.- Halla el término general de la progresión {120, 140, 160, 180, 200, 220, ...} (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando)

10.- Si dos términos de una progresión aritmética a_n son: $a_1 = 6$ y $a_3 = 9$, halla el término general de dicha progresión.

Ejemplo

2.- Una ONG que se dedica a la ayuda al Tercer Mundo se inició con 125 personas. Si todos los meses se incorporan 5 voluntarios, ¿cuántas personas trabajarán en la ONG al cabo de 2 años y medio?

2 años y medio son 24 + 6 meses = 30 meses.

Tenemos que calcular a_{30} de la progresión aritmética de primer término $a_1 = 125$ y de diferencia $d = 5$, así que primero calcularemos el término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \rightarrow \quad a_{30} = a_1 + (30-1)\cdot d = 125 + 29\cdot 5 = 125 + 145 = 270$$

Así que, al cabo de 2 años y medio la ONG tendrá 270 voluntarios.

3.3.1.- Suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética

Las progresiones aritméticas cumplen una propiedad muy útil para obtener la expresión que permite el cálculo de sus n primeros términos.

Dada la progresión aritmética formada por los 8 primeros números impares: $a_n = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ podemos observar que si sumamos el primero y el último, 1+15 = 16, obtenemos los mismo que si sumamos el segundo y el penúltimo, 3+13=16 y obtenemos lo mismo que si sumamos el tercero y el antepenúltimo 5+11=16

$$a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5 = 16$$

En una progresión aritmética, la suma del primer término y el último es igual a la suma de dos términos situados a igual distancia de los extremos.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots\ldots = a_m + a_{n-m+1}$$

Si quisiéramos calcular la suma de los 8 primeros números impares, S_n, la podríamos hacer de dos formas, una sumando directamente todos los números (ya sea de forma natural o de forma invertida), cosa que se complicará mucho si tuviéramos que sumar muchos términos.

$$S_8 = 1+3+5+7+9+11+13+15 = 64 \qquad ó \qquad S_8 = 15+13+11+9+7+5+3+1 = 64$$

y otra, ayudándonos de la propiedad que acabamos de ver:

$$S_8 = 1+3+5+7+9+11+13+15 = (1+15)+(3+13)+(5+11)+(7+9) = 16\cdot 4 = 64$$

De forma general, lo podemos hacer de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccccccccc} & S_8 & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 & + & 15 \\ + & S_8 & = & 15 & + & 13 & + & 11 & + & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline & 2S_8 & = & 16 & + & 16 & + & 16 & + & 16 & + & 16 & + & 16 & + & 16 & + & 16 \end{array}\right\} \rightarrow 2S_8 = 16\cdot 8 \rightarrow S_8 = \frac{16\cdot 8}{2} = 16\cdot 4 = 64$$

Basándonos en esta propiedad y utilizando el mismo procedimiento, podemos obtener la fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

$$\begin{array}{rl} \text{Suma} \rightarrow & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \left.\begin{array}{r}\text{Suma}\\ \text{invertida}\end{array}\right\} \rightarrow & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (\ ) + (\ ) + \ldots + (\ ) + (\ ) + (a_n + a_1) \end{array}$$

En la que hay n paréntesis cuyo resultado siempre es el mismo e igual que $(a_1 + a_n)$, por tanto:

$$2\cdot S_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots\ldots\ldots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n) = n\cdot(a_1+a_n)$$

Y despejando S_n, tenemos:

$$2\cdot S_n = n\cdot(a_1+a_n) \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

Por tanto, con estos resultados, obtenemos que la ***suma***, Sn, ***de los n primeros términos*** de una progresión aritmética, $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ la podemos calcular mediante la expresión:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

Ejemplo

3.- Voy a poner 7 filas de macetas de forma que en la primera pondré 3 macetas, y en cada una de las siguientes filas 3 macetas más que en la anterior. ¿Cuántas macetas podré colocar en total?

Si en la primera fila ponemos 3 macetas, entonces $a_1=3$. Y si en cada fila pone 3 más que en la anterior, entonces $d=3$. Así que tenemos una progresión aritmética. Vamos a calcular las macetas que corresponden a la séptima fila usando la fórmula de las progresiones aritméticas

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \rightarrow \quad a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = 3 + 6\cdot 3 = 21$$

Así que el número total de macetas vendrá dado por la suma de los 7 primeros términos:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2} \quad \rightarrow \quad S_7 = \frac{7\cdot(a_1+a_7)}{2} = \frac{7\cdot(3+21)}{2} = \frac{7\cdot 24}{2} = 7\cdot 12 = 84$$

Así que, podré colocar 84 macetas.

Piensa y practica

11.- Halla la suma de todos los números impares menores que 100.
12.- Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}
13.- La suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1=-5$ es 120. Calcula a_{10} y la diferencia.

3.04.- Progresiones Geométricas

Si en las progresiones aritméticas se pasa de un término al siguiente sumando una cierta cantidad, en las progresiones geométricas lo que haremos para pasar de un término al siguiente será multiplicar por otra cantidad fija llamada razón.

Observa la siguiente sucesión:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

En ella, cada término lo obtenemos multiplicando el que va justo antes por 2, y ocurre siempre. Luego efectivamente se trata de una progresión geométrica y además su razón es 2.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2

Una ***Progresión Geométrica*** es un sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad constante *r*:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

La cantidad fija, ***r***, se llama ***razón de la progresión*** y puede ser positiva o negativa.

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón, además podemos reconocerlas si al dividir cada término entre el anterior siempre se obtiene el mismo valor.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \ldots\ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Para calcular cualquier término a partir del primero, procederemos de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Conocido } a_1 : \\
&a_2 = a_1 \cdot r \\
&a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\
&a_4 = a_3 \cdot r = a_2 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\
&a_5 = a_4 \cdot r = a_3 \cdot r \cdot r = a_2 \cdot r \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{25} = a_{24} \cdot r = a_{23} \cdot r \cdot r = a_{22} \cdot r \cdot r \cdot r = a_{21} \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_1 \cdot r^{24} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n = a_1 \cdot r^{n-1}
\end{aligned}
$$

El ***término general*** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es *r* se obtiene razonando del siguiente modo:

Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por *r*. Por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Ejemplo

4.- Calcula el término general de una progresión geométrica en la que hay términos negativos si $a_5=0{,}064$ y $a_9=1{,}024$.

Sustituyendo los valores dados en la fórmula del término general, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_9 = a_1 \cdot r^8 \\ a_5 = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustituimos}} \left.\begin{array}{l} 1{,}024 = a_1 \cdot r^8 \\ 0{,}064 = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Dividimos}} \frac{1{,}024}{0{,}064} = \frac{a_1 \cdot r^8}{a_1 \cdot r^4} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{1{,}024}{0{,}064} = r^4 \rightarrow 16 = r^4$$

Y despejando:

$$16 = r^4 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[4]{16} = -2$$

Tomamos la raíz negativa porque el enunciado dice que hay términos negativos y de $0{,}064 = a_1 \cdot r^4$ despejamos a_1:

$$0{,}064 = a_1 \cdot r^4 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{0{,}064}{r^4} = \frac{0{,}064}{16} = 0{,}004$$

Así que conocidos a_1 y r, el término general es: $a_n = 0{,}004 \cdot (-2)^{n-1}$

Piensa y practica
14.- Calcula el término general y el término 20 de una progresión geométrica de razón r=00,2 y a_1=800.
15.- Los dos primeros términos de una progresión geométrica son a_1 = 250 y a_2 = 300. Calcular r, a_6 y a_n.
16.- Calcula el término general de la siguiente progresión a_n={-3, 6, -12, 24, …}

3.4.1.- Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Se puede encontrar una fórmula para calcular la suma, S_n, de los n primeros términos de una progresión geométrica de término general $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, y para ello lo haremos paso a paso:

1. Se escribe la suma como: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_{n-1} + a_n$
2. Se multiplican ambos miembros por la razón r:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + a_4 \cdot r + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} \cdot r + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r$$

3. Como $a_1 \cdot r = a_2$ $\quad a_2 \cdot r = a_3$ $\quad a_3 \cdot r = a_4 \cdot r$ $\quad \ldots\ldots\ldots$, sustituyendo:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_n + a_n \cdot r$$

4. Si sumamos a_1 a ambos miembros:

$$a_1 + r \cdot S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_n}_{S_n} + a_n \cdot r$$

5. Si cambiamos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_{n-1} + a_n$ por S_n, llegamos a:

$$a_1 + r \cdot S_n = S_n + a_n \cdot r$$

6. Si agrupamos y operamos llegamos a:

$$a_1 + r \cdot S_n = S_n + a_n \cdot r \quad \rightarrow \quad r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1 \quad \rightarrow \quad S_n (r-1) = a_n \cdot r - a_1$$

7. De donde:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

La ***suma de los n primeros términos*** de una progresión geométrica, viene dada por la expresión:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Si en ella, y sustituimos a_n por $a_1 \cdot r^{(n-1)}$ llegamos a otra expresión similar, pero que solo depende de a_1 y r:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = a_1 \cdot r^{(n-1)} = \frac{a_1 \cdot r^{(n-1)} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

Luego tenemos dos expresiones para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \qquad\qquad S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

Ejemplo

5.- Si para realizar una película, a una actriz le ofrecen el contrato mensual GEO: un sueldo de 1 céntimo el primer día, 2 céntimos el segundo, 4 céntimos el siguiente y así hasta terminar el mes, duplicando cada día el salario del anterior. ¿cuánto dinero ganó la actriz en total en el mes que duró e rodaje?

Para saber cuánto ha ganado durante todo el mes, tenemos que calcular la suma de los primeros 30 términos de la progresión geométrica $a_n = 0{,}01 \cdot 2^{n-1}$

$$\text{De}\ \ S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \quad \rightarrow \quad S_{30} = \frac{a_1 \cdot (r^{30} - 1)}{r-1} = \frac{0{,}01 \cdot (2^{30} - 1)}{2-1} = 0{,}01 \cdot (2^{30} - 1) = 10.737.418{,}23\ €$$

Luego la actriz ganó con el contrato GEO la cantidad de 10.737.418,23 €

Si $|r| < 1$, r^n es un número muy pequeño cuando n es muy grande y con esto:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \quad \rightarrow \quad \text{Si}\ \ |r| < 1 \quad \rightarrow \quad r^n \approx 0 \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (0-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Si la razón *r* de una progresión geométrica cumple que $|r| < 1$, entonces podemos calcular la suma S de sus infinitos (todos) términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejemplo

6.- Calcula la fracción generatriz del número periódico 2,55555555 ayudándote de las progresiones geométricas.

Si escribimos el número de la siguiente forma:

$$2{,}\widehat{5} = 2{,}5555555.... = 2 + \underbrace{0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + ...}_{S_\infty}$$

Donde S_∞ es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón 0,1 y primer término: $a_1 = 0{,}5$

Luego, si calculamos esta suma, como $|r| < 1$, podemos utilizar la fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0{,}5}{1-0{,}1} = \frac{0{,}5}{0{,}9} = \frac{5}{9}$

Así pues, el número decimal periódico puro lo podemos escribir como:

$$2{,}\widehat{5} = 2{,}5555555.... = 2 + \underbrace{0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + ...}_{S_\infty} = 2 + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$$

Piensa y practica

17.- Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica: 3, -6, 12, -24, ………

18.- María se acaba de comprar su primer coche por 16.110 €, ¿cuántos meses lleva ahorrando para poder comprárselo, si al principio tenia 300€ y cada mes ha ido ahorrando 70 € más que el anterior?

19.- Dada una progresión geométrica de la que se conocen los términos a1=243 y a10=9 calcula: a) Su término general, b) La suma de los 15 primeros términos y c) La suma delos infinitos términos.

3.4.2.- Producto de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

De forma análoga a las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas cumplen una propiedad muy útil para obtener la expresión que permite calcular el producto de los *n* primeros términos.

Ejemplo: Dada la progresión $a_n = 1,2,4,8,16,32$, podemos observar que: $1\cdot 32 = 2\cdot 16 = 4\cdot 8 = 32$

Así que en una progresión geométrica, el producto del primero por el último es igual que el del segundo y el penúltimo y en general igual al producto de dos términos situados a igual distancia de los extremos.

$$a_1\cdot a_n = a_2\cdot a_{n-1} = a_3\cdot a_{n-2} = a_4\cdot a_{n-3} = \dots\dots\dots = a_p\cdot a_{n-p-1}$$

Dados los n primeros términos de una progresión geométrica, el producto de todos ellos es igual a:

$$P_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot \dots\dots\dots\dots \cdot a_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n$$

Y de forma inversa:

$$P_n^* = a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-3}\cdot \dots\dots\dots\dots \cdot a_4\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1$$

Si multiplicamos ambas expresiones:

$$P_n\cdot P_n^* = \left(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot \dots\dots\dots\dots \cdot a_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n\right)\cdot\left(a_n\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-3}\cdot \dots\dots\dots\dots \cdot a_4\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1\right)$$

Si los agrupamos, llegamos a:

$$P_n\cdot P_n^* = P_n^2 = \left(a_1\cdot a_n\right)\cdot\left(a_2\cdot a_{n-1}\right)\cdot\left(a_3\cdot a_{n-2}\right)\cdot \dots\dots\dots\dots \cdot\left(a_{n-2}\cdot a_3\right)\cdot\left(a_{n-1}\cdot a_2\right)\left(a_n\cdot a_1\right)$$

En el segundo miembro de la igualdad, y por la propiedad vista con anterioridad, tenemos *n* productos de $\left(a_1\cdot a_n\right)$

Por lo tanto:

$$P_n^2 = \left(a_1\cdot a_n\right)^n \quad \rightarrow \quad P_n = \sqrt{\left(a_1\cdot a_n\right)^n}$$

Así que, ***el producto de los n primeros términos*** de una progresión geométrica, lo podemos calcular mediante

$$P_n = \sqrt{\left(a_1\cdot a_n\right)^n}$$

Con esta expresión, el producto de los seis primeros términos de la progresión $a_n = 1,2,4,8,16,32$ es:

$$P_6 = \sqrt{\left(1\cdot 32\right)^6} = 32.708$$

Piensa y practica

20.- Calcula la suma y el producto de los 10 primeros términos de la progresión 1; 0,1; 0,01; 0,001; ……..

21.- ¿La sucesión que resulta al multiplicar término a término dos progresiones geométricas es una progresión geométrica? En caso afirmativo, ¿cuál es su razón?

22.- Toma un folio y dóblalo por la mitad. Obtienes dos cuartillas que juntas tendrán un grosor doble del grosor del folio. Ahora dobla nuevamente las dos cuartillas y obtienes cuatro octavillas, con un grosor cuádruple que el del folio. Si la hoja inicial tuviera un grosor de 0,1 milímetros y fuese tan grande que pudieras repetir la operación 100 veces, ¿qué grosor tendría el fajo resultante?

3.05.- Resolución de problemas de Progresiones

La resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya tenéis.

Es evidente que para poder resolver problemas de matemáticas hay que poseer un buen conocimiento de los conceptos teóricos.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

1. Lectura y comprensión del enunciado.
2. Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
3. Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
4. Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
5. Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

1.- La asociación de vecinos de un barrio realiza un "rastrillo" de venta de objetos usados cuya recaudación donarán a la gente necesitada del barrio. ¿Cuánto dinero recaudaron a lo largo de una semana si las recaudaciones de cada día forman una progresión geométrica de razón 2 y el primer día recaudaron 15 euros?

Se trata de una progresión geométrica de razón r=2 y de primer término a_1=15.

El último día de la semana recaudaron $a_7 = a_1 \cdot r^6 = 15 \cdot 2^6 = 960$

Para hallar cuánto recaudaron a lo largo de la semana hemos de calcular la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica.

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \quad \rightarrow \quad S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{960 \cdot 2 - 15}{2-1} = 1.905 \text{ €}$$

Recaudaron 1.905 € a lo largo de la semana.

2.- Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua potable a una población de Somalia. Su coste ha sido de 2 190 euros. ¿Qué profundidad tiene el pozo si se sabe que el primer metro costó 15 euros y cada metro restante costó 4 euros más que el anterior?

El coste del pozo se trata de una progresión aritmética de diferencia d=4, y de primer término a_1=15.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 15 + (n-1) \cdot 4 = 11 + 4n$$

El coste del pozo es igual a la suma de los n primeros términos de la progresión:

$$Sn = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} = \frac{(11 + 4n + 15) \cdot n}{2} = \frac{(26 + 4n) \cdot n}{2} = (13 + 2n) \cdot n = 2.190$$

Operando, hemos llegado a una ecuación de 2º grado en n, que resolviendo:

$$(13 + 2n) \cdot n = 2.190 \quad \rightarrow \quad 13n + 2n^2 = 2.190 \quad \rightarrow \quad 2n^2 + 13n - 2190 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 30$$

La solución negativa no tiene sentido por tratarse de una longitud.

Así que el pozo tiene 30 metros de profundidad.

3.- Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de diferencia 2 y su perímetro es de 15 centímetros. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Si los tres lados están en progresión aritmética de diferencia 2, quiere decir que el primero será: a_1, el segundo a_1+2 y el tercero a_1+4

Como el perímetro es la suma de los tres lados: $a_1+a_1+2+a_1+4=15 \rightarrow 3a_1=15-6 \rightarrow a_1=\frac{9}{3}=3$

Así que las longitudes de los lados son 3,5 y 7.

4.- Dada una progresión geométrica de la que se conocen los términos $a_1=243$ y $a_{10}=9$ calcula: a) Su término general, b) La suma de los 15 primeros términos y c) La suma delos infinitos términos.

a) El término general de una progresión geométrica viene dada por la expresión: $a_n=a_1 \cdot r^{n-1}$

Sustituyendo los términos conocidos obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{10}=a_1\cdot r^9 \\ a_7=a_1\cdot r^6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustituimos}} \left.\begin{array}{l} 9=a_1\cdot r^9 \\ 243=a_1\cdot r^6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Dividimos}} \frac{9}{243}=\frac{a_1\cdot r^9}{a_1\cdot r^6} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{9}{243}=r^3 \rightarrow \frac{1}{27}=r^3$$

Y despejando:

$$\frac{1}{27}=r^3 \rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$$

Conocida la razón, podemos calcular de, $9=a_1\cdot r^9$, el valor del primer término a_1:

$$9=a_1\cdot r^9 \rightarrow a_1=\frac{9}{r^9}=\frac{9}{\left(\frac{1}{3}\right)^9}=9\cdot 3^9=3^{11}=177.147$$

Por tanto el término general es: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=177.147\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

b) Para hallar la suma de los 15 primeros términos es necesario calcular primero a_{15}:

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}=177.147\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \rightarrow a_{15}=177.147\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{14}=0,037$$

Y con esto:

$$S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1} \rightarrow S_{15}=\frac{a_{15}\cdot r-a_1}{r-1}=\frac{0,037\cdot\frac{1}{3}-177147}{\frac{1}{3}-1}=265.720,48$$

Por tanto la suma de los 15 primeros términos es $S_{15}=265.720,48$

c) Como $|r|<1$, la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica viene dada por la expresión :

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$

Donde sustituyendo los valores conocidos de a1 y r, llegamos a:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{177147}{1-\frac{1}{3}}=265.720,5$$

Y la suma de todos sus términos es $S_\infty=265,720,5$

5.- María se acaba de comprar su primer coche por 16.110 €, ¿cuántos meses lleva ahorrando para poder comprárselo, si al principio tenía 300€ y cada mes ha ido ahorrando 70 € más que el anterior?

Los ahorros de María se pueden describir mediante una progresión aritmética de primer término $a_1=300$ y de diferencia $d=70$.

El término general viene dado por: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 300 + (n-1)\cdot 70 = 70n + 230$

La suma de los n meses que ha estado María ahorrando es igual al precio total del coche: $Sn = \frac{(a_n + a_1)\cdot n}{2}$

Sustituyendo: $Sn = \frac{300 + (70n + 230)}{2}\cdot n = 16.110$ y operando llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$35n^2 + 265n - 16110 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 18$$

En donde, hemos desechado la solución negativa por tratarse de tiempo.

Así que María ha tardado 18 meses en ahorrar el dinero para comprarse el coche.

6.- Interpola tres medios aritméticos entre los números -3 y 13

Interpolar consiste en encontrar un cierto número de términos ubicados entre el primero y último término, para formar una progresión aritmética, es decir, es meter varios números entre otros dos.

Como nos dicen de interpolar 3 números de forma que formen una progresión aritmética, tenemos que:

$a_1 = -3$ y $a_5 = 13$, y por tanto tenemos que calcular: a_2, a_3 y a_4.

Sabemos que el término general de una progresión aritmética viene dado por: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, por tanto:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = -3 + 4\cdot d = 13 \quad \rightarrow \quad 13 = -3 + 4d \quad \rightarrow \quad 16 = 4d \quad \rightarrow \quad d = \frac{16}{4} = 4$$

Una vez conocidos el primer término y la diferencia, ya podemos calcular los tres términos pedidos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -3 \\ a_2 = a_1 + d = -3 + 4 = 1 \\ a_3 = a_2 + d = 1 + 4 = 5 \\ a_4 = a_3 + d = 5 + 4 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Luego los medios aritméticos entre -3 y 13 son: -3, 1, 5, 9, 13, …

7.- Interpolar 4 medios geométricos en la progresión $-3, \ldots, 96$.

Como hemos dicho, interpolar consiste en encontrar un cierto número de términos ubicados entre otros dos.

Como nos dicen de interpolar 4 números de forma que formen una progresión geométrica, tenemos que:

$a_1 = -3$ y $a_6 = 96$, y por tanto tenemos que calcular: a_2, a_3, a_4 y a_5.

Sabemos que el término general de una progresión geométrica viene dado por: $a_n = a_1\cdot r^{n-1}$. Si despejamos r:

$$a_n = a_1\cdot r^{n-1} \quad \rightarrow \quad r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}, \text{ como } a_6 = a_1\cdot r^5 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[5]{\frac{a_6}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{96}{-3}} = -2$$

Una vez conocidos el primer término y la razón, ya podemos calcular los tres términos pedidos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=-3 \\ a_2=a_1\cdot r=-3\cdot(-2)=6 \\ a_3=a_2\cdot r=6\cdot(-2)=-12 \\ a_4=a_3\cdot r=-12\cdot(-2)=24 \\ a_5=a_4\cdot r=24\cdot(-2)=-48 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Luego los medios entre -3 y 96 son: -3, 6, -12, 24, -48, 96

8.- Una rana está en el borde de una charca circular de 7 metros de radio y quiere llegar al centro saltando. Da un primer salto de 3 metros y, después, avanza en cada uno la mitad que en el salto anterior. ¿Logrará llegar al centro?

Es una progresión geométrica, con r = 0,5 y a_1 = 3, por tanto, como $|r|<1$, la distancia máxima que recorrerá será la suma infinita de los términos:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{3}{1-0,5}=6\ m$$

Por lo que, la rana no llegará al centro del estanque.

3.6.- Autoevaluación

1.- Un equipo de ciclismo programa su entrenamiento semanal en cinc o etapas. En la primera etapa recorre una distancia de 40 kilómetros y cada etapa sucesiva es 5/4 más larga que la anterior. ¿Cuántos kilómetros recorre el equipo a lo largo de la semana?

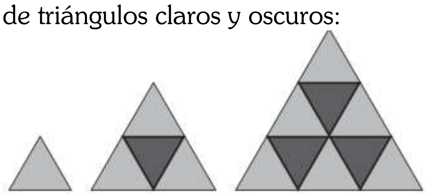
Sol: 328,28 km.

2.- Escribe los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

$$a_n=4n-3 \qquad b_n=(-1)^n\cdot 2^n \qquad c_n=n^2+2$$

Sol: a) 1,5,9,13,17; b) -2,4,-8,16,-32; c) 3,6,11,18,27

3.- Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan, respectivamente, el número de triángulos claros y oscuros:



Sol: claros: 1,3,6,10,15,…. Oscuros: 0,1,3,6,10…

4.- Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética cuyo quinto término es 19 y la diferencia es 3.

Sol: a_n=3n+4

5.- Halla el primer término de la progresión aritmética cuyo término vigésimo es 100 y la suma de los 20 primeros términos es 1 050.

Sol: a_1=5

6.- Al comienzo del año, Juan decide ahorrar para comprarse una consola de videojuegos. En enero mete en su hucha 10 euros y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?

Sol: 186 €

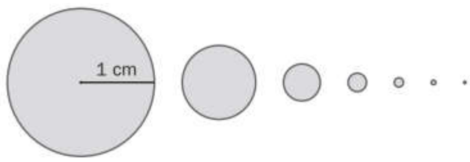
7.- Las anotaciones obtenidas por las cinco jugadoras de un equipo de baloncesto están en progresión aritmética. Si el equipo consiguió 70 puntos y la máxima anotadora obtuvo 24 puntos, ¿cuántos puntos anotaron las restantes jugadoras?

Sol: 4, 9, 14, 19 y 24 puntos.

8.- El primer término de una progresión geométrica es 2 y la razón es 4. ¿Qué lugar ocupa en la progresión el término cuyo valor es 131.072?

Sol: El noveno.

9.- El radio de cada círculo es la mitad que el del anterior:



Calcula:

- **a)** El área del círculo que ocupa el quinto lugar.
- **b)** La suma de las áreas de los 6 primeros círculos de la sucesión.
- **c)** La suma de las áreas de todos los círculos.

Sol: a) 0,012 cm^2; b) 4,18 cm^2 c) 4,19 cm^2.

10.- La suma de los infinitos términos de una progresión decreciente es 6 y la suma de sus dos primeros términos es 16/3. Calcula el primer término.

Sol: Si r = 1/3 ⇒ a_1 = 4 y Si r = – 1/3 ⇒ a_1 = 8

11.- Interpola los términos que se piden entre los números 2 y 32:

- **a)** Tres términos geométricos.
- **b)** Cinco términos aritméticos.

Sol: a) 2, 4, 8, 16, 32; b) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32.