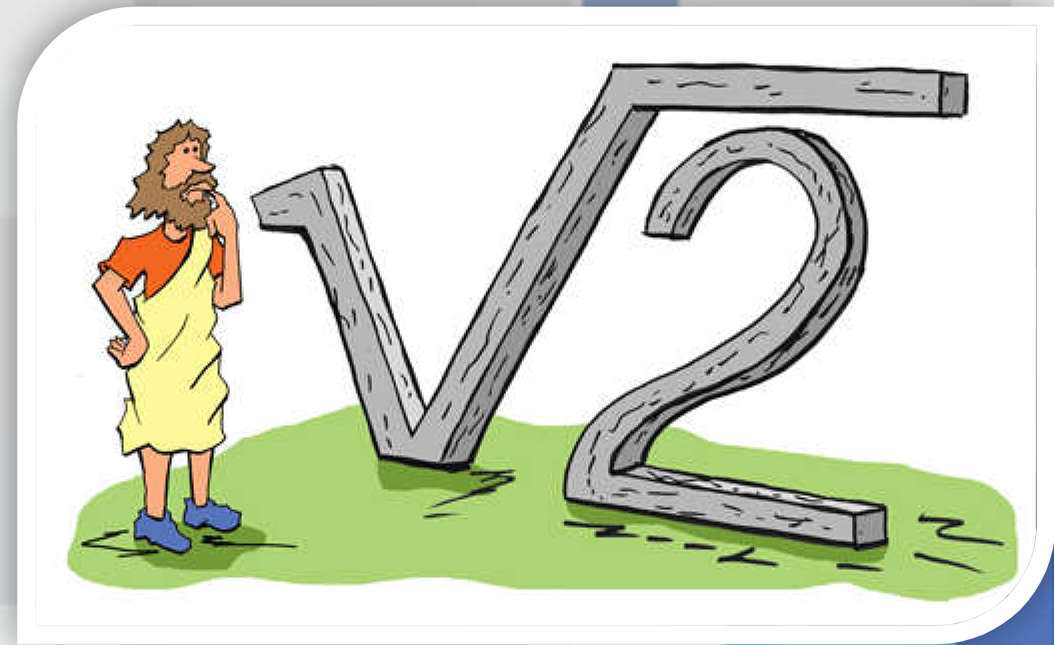
Unidad Didáctica 2

POTENCIAS Y RAÍCES

3º ESO



En esta unidad vamos a:

1.- Repasar el concepto de potencia y sus propiedades para realizar distintas operaciones.

2.- Conocer el concepto de raíz de cualquier orden y saber calcularlas.

3.- Operar con radicales.

4.- Relacionar potencias y radicales.

5.- Expresar números en notación científica y realizar operaciones con ellos.

6.- Realizar aproximaciones de cualquier número y calcular los errores cometidos en ellas.

7.- Conocer el concepto de intervalo y saber aplicarlo en distintas situaciones.

8.- Resolver problemas.

Sumario

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Conocer y desarrollar potencias utilizando sus propiedades.
2. Realizar operaciones con potencias.
3. Conocer y desarrollar radicales utilizando sus propiedades.
4. Relacionar potencias y raíces.
5. Distinguir radicales y saber operar con ellos.
6. Saber calcular errores al hacer diferentes aproximaciones.
7. Conocer y comprender el concepto de intervalo.
8. Conocer y utilizar la notación científica.
9. Plantear y resolver problemas con distintos tipos de números.

2.0.- Lectura comprensiva

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: ***el ajedrez.***

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido.

Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara. Éste rechazó esa recompensa, pero el rey insistió y Sissa pidió lo siguiente:

> *"Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante."*

El rey se sorprendió bastante con la petición creyendo que era una recompensa demasiado pequeña para tan importante regalo y aceptó.

- ¿No quieres nada más? preguntó.

- Con eso me bastará, le respondió el matemático.

El rey dio la orden a su gran visir de que, inmediatamente, quedaran satisfechos los deseos del sabio. Mandó a los calculistas más expertos de la corte que calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que había pedido Sissa, es decir:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+..........+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}$$

Pero cuál no sería el asombro del rey, cuando éstos le comunicaron que no podía entregar esa cantidad de trigo después de hacer el cálculo, ya que ascendía a:

18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo

Para darle al inventor la cantidad que pedía, no había trigo bastante en los reales graneros, ni en los de toda Persia, ni en todos los de Asia.

El rey Sheram tuvo que confesar a Sissa que no podía cumplir su promesa, ya que no era lo suficientemente rico. En ese momento Sissa renunció al presente. Tenía suficiente con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y además les había dado una lección matemática que no se esperaban.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>

1.- ¿De qué trata el texto?

2.- ¿Cómo hubieras reaccionado tú?

3.- ¿Cuál es la moraleja de esta historia?

2.01.- Introducción

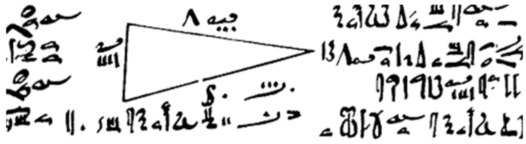

Euclides 325 A.C. - 265 A.C.

El concepto básico de los exponentes se remonta al menos hasta la antigua Grecia, cuando *Euclides* usó el término "***potencia***" para indicar el número de veces que un número debía multiplicarse por sí mismo. Un estudioso del siglo XIV, *Nicolás Oresme,* escribió números para indicar el uso de potencias en este sentido. Sin embargo, ninguno de estos primeros ejemplos del concepto usó la notación simbólica para expresar las matemáticas.

El uso de los números elevados para señalar los exponentes data del siglo XVII. *Hérigone* usó símbolos como *a3* para indicar a por a por a, aunque no elevó el exponente. El primero que utilizó los exponentes elevados fue *David Hume*, en 1636, escribió números romanos (como III o IX). En 1637, Rene Descartes usó exponentes positivos escritos a la manera moderna.

Los primeros usos de notación exponencial fueron invariablemente con exponentes positivos. Isaac Newton fue el primero que usó la notación moderna para un exponente negativo, en 1676. *Nicolás Oresme* utilizó exponentes fraccionarios en el siglo XIV, pero no con la notación moderna, que no aparecieron hasta Newton, en 1676.

Las primeras raíces cuadradas son expresiones matemáticas que surgieron al plantear diversos problemas geométricos como la longitud de la diagonal de un cuadrado, o la hipotenusa de un triángulo.


Trozo del papiro de Ahmes

El *Papiro de Ahmes* datado hacia 1650 a. C., que copia textos más antiguos, muestra cómo los egipcios ya extraían raíces cuadradas.

En la antigua India, el uso del cuadrado y la raíz cuadrada fue al menos tan antiguo como los *Sulba Sutras,* fechados entre el 500 y el 300 a. C. Un método para encontrar muy buenas aproximaciones a las raíces cuadradas de 2 y 3 es dado en el *Baudhaiana-sulba-sutra.*

Ariabhatta (476-550) en su tratado *Ariabhatíia*, dio un método para encontrar la raíz cuadrada de números con varios dígitos.

Los babilonios también usaron las raíces cuadradas para hacer cálculos repitiendo las mismas divisiones una y otra vez.

Las raíces cuadradas fueron uno de los primeros desarrollos de las matemáticas, siendo particularmente investigadas durante el periodo pitagórico, cuando el descubrimiento de que la raíz cuadrada de 2 era irracional (no se podía medir) o no expresable como cociente alguno, lo que supuso un hito en la matemática de la época.

Posteriormente se fue ampliando la definición de raíz cuadrada.

Inicialmente mostraron su utilidad para la resolución de problemas trigonométricos y geométricos, como la diagonal de un cuadrado o el *teorema de Pitágoras*. Posteriormente fueron ganando utilidad para operar con polinomios y resolver ecuaciones de segundo grado o superior, siendo una de las herramientas matemáticas más elementales hoy en día.

El símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1.525 por el matemático *Christoph Rudolff*. El signo no es más que una forma estilizada de la letra r minúscula para hacerla más elegante, alargándola con un trazo horizontal, hasta adoptar el aspecto actual, que representa la palabra latina *radix*, que significa raíz.

2.02.- Potencias de números racionales

Una ***potencia*** es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un número por sí mismo varias veces, es decir, es una multiplicación de factores iguales.

En una potencia, la ***base*** representa el factor que se repite, y el ***exponente*** las veces que se repite el producto.

$$a^c = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots\cdots\cdots a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{\text{El producto de a por sí mismo se repite c veces}}$$

Ejemplo

$$\underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}_{\text{el 3 se repite 9 veces}}=3^9 \qquad \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{\text{el (-2) se repite 5 veces}}=(-2)^5 \qquad \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{el 2/3 se repite 6 veces}}=\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

2.2.1.- Potencias de fracciones

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos el numerador y el denominador a dicha potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}_{\text{El producto de } \frac{a}{b} \text{ por sí misma se repite c veces}}=\frac{a^c}{b^c}$$

Ejemplo

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{El producto se repite 4 veces}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1^4}{2^4}=\frac{1}{16} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^3=\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)}_{\text{Se repite 3 veces}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}$$

Al igual que las potencias de números enteros, si la base es positiva, la potencia es positiva, y si la base es negativa, la potencia será positiva si el exponente es par y negativa si es impar.

2.2.2.- Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un entero negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$$(-3)^1=-3 \qquad (-3)^2=+9 \qquad (-3)^3=-27 \qquad (-3)^4=+81$$

<u>*En general:*</u>

✓ Si la base es positiva, el resultado es siempre positivo $\begin{cases}(+)^{+}=+ & \rightarrow\ (+2)^2=+4\\ (+)^{-}=+ & \rightarrow\ (+2)^{-2}=+\frac{1}{4}\end{cases}$

✓ Si la base es negativa, dependerá del exponente: $\begin{cases}(-)^{par}=+ & \rightarrow\ (-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+16\\ (-)^{impar}=- & \rightarrow\ (-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27\end{cases}$

Piensa y practica

1.- Completa la siguiente tabla:

Potencia	Base	Exponente	Valor	Se lee
$(-1)^7$				
$(-2)^5$				
$(+3)^3$				
$(-4)^3$				
8^2				

2.- ¿Qué signo tienen las potencias siguientes?

a) 6^3 **b)** $(-3)^{12}$ **c)** 3^{21} **d)** $(-3)^{21}$ **e)** $(-2)^4$ **f)** 5^{32} **g)** $(-3)^5$ **h)** 4^{51} **i)** 3^{35} **j)** $(-1)^{17}$ **k)** 3^{-3} **l)** $(-2)^{-3}$

2.03.- Propiedades de las potencias

A la hora de trabajar con potencias, es conveniente aprenderse algunas propiedades que nos van a facilitar su cálculo. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Por definición:

- ***Todo número elevado a cero es 1.*** $a^0 = 1$ $\quad (-2)^0 = 1 \quad \left(\frac{5}{7}\right)^0 = 1$

- ***Todo número elevado a 1 es él mismo.*** $a^1 = a$ $\quad 3^1 = 3 \quad \left(-\frac{4}{5}\right)^1 = -\frac{4}{5}$

2.3.1.- Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad 2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2\cdot2\cdot2}_{2^3} \cdot \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4} = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^{3+4}} = 2^7$$

2.3.2.- Cociente de potencias de la misma base

Al dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes. En este caso, tiene que ocurrir que el primer exponente sea mayor que el segundo, $b>c$.

$$a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \qquad 2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}^{2^6}}{\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}} = \underbrace{\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot2\cdot2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}}_{2^{6-4}} = 2^2$$

2.3.3.- Potencia de potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c} \qquad \left(2^4\right)^2 = 2^4 \cdot 2^4 = \overbrace{\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4} \cdot \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^4}}^{\text{el } 2^4 \text{ se repite 2 veces}} = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{2^{4+4}=2^{4\cdot2}} = 2^{4\cdot2} = 2^8$$

2.3.4.- Potencia un producto

La potencia del producto de dos números es igual al producto de sus potencias.

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \qquad (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4 \underset{*}{=} 10^4$$

* *Cuando multiplicamos potencias de distinta base pero de igual exponente, se multiplican las bases.*

2.3.5.- Potencia un cociente

La potencia del cociente de dos números es igual al cociente de sus potencias.

$$(a : b)^c = a^c : b^c \qquad (8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3 \underset{*}{=} 4^3$$

* *Cuando dividimos potencias de distinta base pero de igual exponente, se dividen las bases.*

2.3.6.- Casos especiales de potencias

Es posible que nos encontremos con ejercicios de productos o cocientes en los que ni la base ni el exponente son iguales y por tanto no podremos calcular el resultado, porque no podremos aplicar ninguna de las propiedades de las potencias. Lo único que podremos hacer es calcular cada una de las potencias y operar después.

Ejemplo

$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \qquad 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 = 675 \qquad 7^2 \cdot 5^3 = 49 \cdot 125 = 6.125$

Existen potencias que en principio no se podrían realizar, pero si somos observadores encontraremos alguna forma de hacerlas. En estos casos, suele ocurrir que aunque las bases sean distintas, unas son potencias de otras.

Ejemplo

$$2^3 \cdot \underbrace{4^2}_{4=2^2} = 2^3 \cdot \left(2^2\right)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 \qquad \underbrace{9^3}_{9=3^2} \cdot \underbrace{27^2}_{27=3^3} = \left(3^2\right)^3 \cdot \left(3^3\right)^2 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$$

2.3.7.- Potencias de exponente negativo

La potencia de un número con exponente negativo es igual al inverso del número elevado a exponente positivo.

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \xrightarrow{\text{Demostración}} a^{-b} = a^{0-b} \overset{\text{La resta la expresamos como un cociente}}{=} \frac{a^0}{a^b} = \frac{1}{a^b}$$

Ejemplo

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 7^{-5} = 7^{0-5} = \frac{7^0}{7^5} = \frac{1}{7^5} \qquad m^{-n} = m^{0-n} = \frac{m^0}{m^n} = \frac{1}{m^n}$$

Una potencia fraccionaria de exponente negativo es igual a la inversa de la fracción elevada a exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c} \xrightarrow{\text{Demostración}} \left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \frac{a^{-c}}{b^{-c}} = \frac{a^{0-c}}{b^{0-c}} = \frac{\dfrac{a^0}{a^c}}{\dfrac{b^0}{b^c}} = \frac{\dfrac{1}{a^c}}{\dfrac{1}{b^c}} = \frac{1}{a^c} : \frac{1}{b^c} = \frac{b^c}{a^c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c}$$

Ejemplo

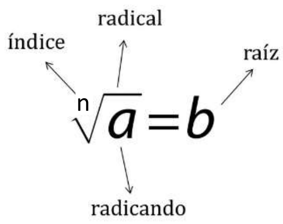
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \frac{2^{0-3}}{3^{0-3}} = \frac{\dfrac{2^0}{2^3}}{\dfrac{3^0}{3^3}} = \frac{\dfrac{1}{2^3}}{\dfrac{1}{3^3}} = \frac{1}{2^3} : \frac{1}{3^3} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$$

Resumen de propiedades de las potencias					
Producto		**Cociente**		**Potencia**	
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^7$	$a^b : a^c = a^{b-c}$	$6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$	$2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$	$6^3 : 3^3 = 2^3$	$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} 2^{12}$
Potencias de exponente negativo					
$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^{c}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$	

Piensa y practica			
3.- Expresa estas operaciones como una sola potencia:			
a) $\left(5^8 \cdot 5^4\right) : \left(5^2\right)^5 =$	*b*) $\left[\left(-2^6\right) \cdot (+2)^3\right] : \left[(+2)^3\right]^2 =$	*c*) $(-12)^{-7} \cdot \left[\left(-3^5 \cdot 4^5\right)\right]$	*d*) $25^3 : \left[(-15)^5 : 3^5\right]$
e) $6^3 : \left[\left(2^7 : 2^6\right) \cdot 3\right]^{-2}$	*f*) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{-2} : \left(\frac{4}{25}\right)^{-1} =$	*g*) $8^4 : \left(2^5 \cdot 4^2\right)$	*h*) $\left[\left(6^2\right)^2 \cdot 4^4\right] : \left(2^3\right)^4$
i) $\left[4^{-4}\right] \cdot \left(2^3\right)^4 =$	*j*) $2^3 : 8^{-2} \cdot 2^4 =$	*k*) $81^5 \cdot 27^{-2} =$	*l*) $\frac{3^7 \cdot 9^3 \cdot 3^{-3}}{81 \cdot 9^{-5}} =$

2.04.- Raíces exactas. Radicales

En general, en una raíz cualquiera o ***radical***, el ***radicando*** es el número que hay dentro de la raíz, ***a***, $\sqrt{\ }$ es el ***símbolo de la raíz***, **n** es el ***índice de la raíz***, y **b** es el resultado de la raíz ó **raíz.**



Al igual que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado, la raíz cúbica, cuarta ….. será la operación inversa de elevar al cubo, a la cuarta…etc.

- La ***raíz cuadrada*** de un número *a* es otro número *b* que, elevado al cuadrado, nos da el número *a*.

$$\sqrt{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^2=a \qquad \sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$$

- La ***raíz cúbica*** de un número *a* es otro número *b* que, elevado al cubo, nos da el número *a*.

$$\sqrt[3]{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^3=a \qquad \sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$$

- La ***raíz cuarta*** de un número *a* es otro número *b* que, elevado a la cuarta, nos da el número *a*.

$$\sqrt[4]{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^4=a \qquad \sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

. . . .

- La ***raíz e-nésima*** de un número *a* es otro número *b* que, elevado a la e-nésima, nos da el número *a*.

$$\sqrt[n]{a}=b \quad \Leftrightarrow \quad b^n=a \qquad \sqrt[15]{32768}=\sqrt[15]{2^{15}}=2$$

La forma sencilla de resolver cualquier raíz es intentar conseguir en el radicando una potencia de exponente igual que el índice de la raíz.

Ejemplo

$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2 \qquad \sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3 \qquad \sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5 \qquad \sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2$$

- Decimos que dos ***radicales son equivalentes*** si tienen la misma raíz.

Ejemplo

$$\sqrt{25} \quad y \quad \sqrt[3]{125} \qquad \sqrt[4]{16} \quad y \quad \sqrt{4} \qquad \sqrt[4]{81} \quad y \quad \sqrt[3]{27}$$

2.4.1.- Raíces de Fracciones

La ***raíz de una fracción*** es el cociente entre la raíz del numerador y la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\pm 2}{\pm 3}=\pm\frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{8} \qquad \sqrt[4]{\frac{81}{625}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{3}{5}$$

2.4.2.- Peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea *n*.
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe si *n* es impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, cuando escribimos $\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz positiva: $\sqrt{4}=+2$

2.4.3.- Relación entre potencias y raíces. Potencias de exponente racional.

Llamamos potencias de exponente fraccionario a aquellas potencias en las que el exponente es un número racional (fracción) $a^{\frac{b}{c}}$.

Ejemplo

$2^{\frac{5}{4}}$ $3^{\frac{1}{2}}$ $(-4)^{\frac{-1}{7}}$ $(-3)^{\frac{2}{5}}$ $5^{\frac{1}{5}}$

Este tipo de potencias se pueden expresar igualmente como una raíz (o radical) de la siguiente forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}}$$

Donde el numerador es la potencia y el denominador es índice de la raíz. *(Ley de exponentes fraccionarios)*

Luego como podemos observar, existe una relación entre los radicales y las potencias, de forma que podemos pasar de uno a otro con facilidad (*expresión potencial de un radical*).

Ejemplo

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} \qquad \sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \qquad \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

Piensa y practica			
4.- Convierte las raíces en potencias y viceversa:			
a) $\sqrt{7} =$	b) $\sqrt[3]{7} =$	c) $4^{\frac{2}{5}} =$	d) $(-3)^{\frac{3}{5}} =$

2.05.- Propiedades de los radicales

Los radicales tienen una serie de definiciones y propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura, todas ellas, consecuencia inmediata de conocidas propiedades de las potencias.

1.- El producto de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los radicandos:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \quad \rightarrow \quad ej: \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4\cdot 5} = \sqrt[3]{20} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5} = 4^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} = (4\cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 20^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{20}$$

2.- El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad si\ b \neq 0 \quad \rightarrow \quad ej: \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\frac{16}{8}} = \sqrt[5]{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{16^{\frac{1}{5}}}{8^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{16}{8}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$$

3.- Un radical de índice n elevado a una potencia m equivale a una raíz de índice n y de radicando elevado a la potencia m:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \rightarrow \quad ej: \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

4.- La raíz de índice *m* de un radical de índice *n* es equivalente a una raíz de índice *n* de un radical de índice *m* y es igual a una raíz de índice *m·n*:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[3\cdot 5]{3} = \sqrt[15]{3} \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5]{3^{\frac{1}{3}}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{3}$$

5.- Si $a \geq 0$ la raíz de índice n de a es igual que la raíz de índice m·n de a elevado a m.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m\cdot n]{a^m} \quad \rightarrow \quad ej: \sqrt[3]{3} = \sqrt[5\cdot 3]{3^{5\cdot 1}} = \sqrt[15]{3^5} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5\cdot 3}{5\cdot 1}} = 3^{\frac{15}{5}} = \sqrt[15]{3^5}$$

En todas ellas, hemos puesto un ejemplo en color azul y su demostración mediante las propiedades de las potencias en rojo.

Piensa y practica				
5.- Aplica las propiedades de los radicales y calcula:				
a) $\sqrt[6]{2^{18}\cdot 7^{12}}$	*b)* $\left(\sqrt[5]{9}\right)^{15}=$	*c)* $\sqrt[4]{16\cdot 9^{2}}=$	*d)* $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{625}}}=$	*e)* $\sqrt[3]{1728}=$

2.06.- Operaciones con radicales

En este curso solamente vamos a estudiar algunas de las operaciones con radicales:

2.6.1.- Reducción a índice común

Para realizar operaciones con radicales de distinto índice es necesario reducirlos a otros equivalentes que tengan el mismo índice. Este nuevo índice será el mínimo común múltiplo de todos los índices.

Ejemplo

Reduce a índice común las raíces $\sqrt{3}$ *y* $\sqrt[3]{2}$ *:*

Para ello calculamos el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3: m.c.m.(2,3)=6

$$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{3^3} \qquad \sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{2^2}$$

2.6.2.- Simplificación de radicales

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionarios y de las propiedades de los radicales, simplificar un radical es expresarlo en su forma más simple. Es decir, un radical está simplificado cuando:

- No se puede extraer ningún factor del radicando (es el menor posible)
- No puede reducirse su índice (es el menor posible)
- El radicando no es una fracción
- No hay radicales en el denominador de una fracción

Para simplificar radicales, se factoriza el radicando y se extraen todos los posibles factores del radical. Después, si es posible, con la ley de exponentes fraccionarios se reduce su índice.

Ejemplo

$$\sqrt[4]{11664}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^6}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4\cdot 3^2}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{3^2}=2\cdot 3\cdot\sqrt[4]{3^2}\overset{*}{=}2\cdot 3\cdot\sqrt{3} \qquad *\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5\cdot c^7\cdot m^{14}}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{3^6}b^5\cdot c^7\cdot m^{14}}=\frac{2}{3^2}\cdot b\cdot c^2\cdot m^4\cdot\sqrt[3]{b^2\cdot c\cdot m^2}$$

2.6.3.- Introducción de factores en un radical

Para introducir factores dentro de un radical, el factor que está fuera se escribe dentro elevado al índice de la raíz y después operamos.

Ejemplo

$$-5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{(-5)^3\cdot 4}=\sqrt[3]{-500}=-\sqrt[3]{500} \qquad \sqrt{3\sqrt[4]{2}}=\sqrt{\sqrt[4]{3^4\cdot 2}}=\sqrt[8]{162}$$

Piensa y practica			
6.- Simplifica los radicales:			
$\sqrt[5]{1024m^{37}c^{18}}$	$\sqrt{2,\overset{\frown}{7}b^3}$	$\sqrt[3]{\dfrac{8}{729}b^5m^{14}}$	$\sqrt[5]{125m^{10}c^{13}b^7}$

7.- Introduce los factores en los radicales siguientes:			
$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$	$\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}}$	$\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$	$3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$

2.6.4.- Producto y cociente de radicales

Para poder multiplicar (o dividir) radicales han de tener el mismo índice, si no es así, primero hay que reducir a índice común. El resultado del producto (o del cociente) ya lo hemos visto en las propiedades 1 y 2.

Ejemplo

$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4\cdot 5}=\sqrt[3]{20}$ $\quad\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^5}$ $\quad\frac{\sqrt[5]{16}\cdot}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\frac{16}{8}}=\sqrt[5]{2}$

2.6.5.- Suma y resta de radicales

Decimos que dos ***radicales son semejantes*** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo

$\sqrt{5}$ *y* $5\sqrt{5}$ $\qquad 2\cdot\sqrt[3]{3}$ *y* $5\cdot\sqrt[3]{3}$ $\qquad \sqrt[7]{3}$ *y* $8\sqrt[7]{3}$

Para poder sumar radicales han de ser semejantes. Para sumar o restar radicales semejantes, se extrae factor común y se operan los coeficientes.

Ejemplo

a) $\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{27}-2\sqrt{243}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}=3\cdot\sqrt{3^3}-2\sqrt{3^5}+\sqrt{3\cdot 5^2}-2\cdot\sqrt{3\cdot 2^4}=3\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}+5\sqrt{3}-$
$-2\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}=9\sqrt{3}-18\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{20}-\frac{3}{5}\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{180}+6\sqrt{45}=\frac{2}{5}\sqrt{2^2\cdot 5}-\frac{3}{5}\sqrt{2^4\cdot 5}+\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}+6\sqrt{3^2\cdot 5}=\frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{5}-$
$-\frac{3}{5}\cdot 2^2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{5}++6\cdot 3\sqrt{5}=\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{12}{5}\sqrt{5}+3\sqrt{5}+18\sqrt{5}=\frac{4-12+15+90}{5}\sqrt{5}=\frac{97}{5}\sqrt{5}$

Es importante notar que la suma algebraica de dos radicales de cualquier índice nos es igual a la raíz de la suma algebraica de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}\neq\sqrt[n]{a+b}$$

Piensa y practica	
8.- Calcula:	
a) $8\sqrt{8}-5\sqrt{2}+4\sqrt{20}-12\sqrt{5}+3\sqrt{18}=$	*b)* $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}=$

2.6.6.- Operaciones combinadas

Una vez estudiadas las propiedades de las potencias y de los radicales, podemos dar un paso más mezclándolas todas a la vez y creando operaciones combinadas con todas ellas. Hasta ahora, en las operaciones combinadas que hemos hecho, solo aparecían raíces cuadradas, pero ya podemos hacerlo con raíces de cualquier índice. Nos quedan pendientes algunos ejercicios pendientes en los que aparecían potencias de exponente negativo, y raíces de orden 3 y 4…

Para realizar operaciones combinadas es importante recordar el ***Orden de prioridad en las operaciones:***

- ***i)*** *Las expresiones encerradas entre corchetes y paréntesis, de los interiores a los exteriores.*
- ***ii)*** *Las potencias y radicales.*
- ***iii)*** *Los productos y cocientes.*
- ***iv)*** *Las sumas y restas.*

Ejemplo

$$a)\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{29}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\sqrt{\left(\frac{6}{4}+\frac{5}{4}-\frac{29}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\sqrt{\left(\frac{11}{4}-\frac{29}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{18}{4}\right)\div\left(-\frac{1}{2}\right)}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\sqrt{\frac{36}{4}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\sqrt{9}-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=3-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=3-\frac{27}{8}=\frac{24}{8}-\frac{27}{8}=-\frac{3}{8}$$

$$b)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^{2}-2\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}\right)+\left(3\sqrt{2}\right)^{2}=4\cdot 3-12\sqrt{2\cdot 3}+9\cdot 4=12-12\sqrt{6}+36=48-12\sqrt{6}$$

Piensa y practica	
9.- Resuelve las siguientes operaciones:	
$-4\cdot(4-2)^{-2}+(-3+1)^{3}+(2\cdot 3)^{2}:(-1-5)-4:(2-3)^{7}=$	$\sqrt{-\frac{5}{9}+1}\cdot\left(-2+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$
$\frac{10}{50}-\sqrt{\frac{25}{3}-\frac{11}{9}}\div\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}-\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$	$\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}+\sqrt[4]{324}+\sqrt[6]{8}+\sqrt{\frac{2}{4}}-9\sqrt{2}=$

2.6.7.- Racionalización de radicales

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes pero que no tengan radicales en el denominador. A este proceso es a lo que se llama ***racionalización*** de radicales de los denominadores.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

Se pueden dar varios casos, pero este curso solo estudiaremos 2:

Caso 1: El denominador es un radical cuadrático:

Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada, se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cuadrada del denominador.

Ejemplo

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\qquad\qquad \frac{6}{\sqrt{8}}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

Caso 2: El denominador es un binomio con raíces cuadradas.

Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales (o en los dos) hay una raíz cuadrada, se racionaliza utilizando la tercera identidad notable. Es decir, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^{2}-b^{2}\quad \textit{donde}\quad (a+b)\quad \textit{y}\quad (a-b)\quad \textit{son binomios conjugados}$$

Ejemplo

$$a)\ \frac{7}{1+\sqrt{2}}=\frac{7}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\underbrace{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}_{\text{SUMA X DIFERENCIA}}}=\frac{7-7\sqrt{2}}{\underbrace{1-\left(\sqrt{2}\right)^{2}}_{\text{Diferencia de cuadrados}}}=\frac{7-7\sqrt{2}}{1-\sqrt{2^{2}}}=\frac{7-7\sqrt{2}}{1-\sqrt{4}}=\frac{7-7\sqrt{2}}{1-2}=\frac{7-7\sqrt{2}}{-1}=7\sqrt{2}-7$$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{9-\sqrt{4}}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{9-2}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{7}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{1-3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

Piensa y practica

10.- Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$	b) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$	c) $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}$	d) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

11.- Calcula:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$	b) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{7}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

2.07.- Aproximaciones y errores

Las medidas experimentales están afectadas de cierta imprecisión en sus valores debido a las imperfecciones del aparato de medida o a las limitaciones de nuestros sentidos en el caso de que sean ellos los que deben registrar la información. El valor de las magnitudes se obtiene experimentalmente efectuando una medida ya sea de manera directa, sobre la magnitud en cuestión, o indirecta, obtenida por medio de los valores medidos de otras magnitudes relacionadas con ella. Así pues, resulta prácticamente imposible llegar a conocer el valor exacto de ninguna magnitud, ya que los medios experimentales de comparación con el patrón correspondiente en las medidas directas viene siempre afectado de imprecisiones inevitables. El problema es establecer los límites dentro de los cuales se encuentra dicho valor.

2.7.1.- Aproximaciones

En la práctica, no se puede trabajar con cantidades que tengan infinitas cifras decimales, ya que ni siquiera se pueden escribir y mucho menos realizar cálculos exactos con ellas. En su lugar tomamos aproximaciones a dichas cantidades, que simplifican los cálculos.

Dado un número real x, una aproximación es un valor a cercano a x.

- *Si **a > x** la aproximación es **por exceso***
- *Si **a < x** la aproximación es **por defecto.***

Generalmente, la aproximación ***a*** es un número decimal finito y cercano (en algún sentido) al valor *x*.

Existen 2 métodos fundamentales para aproximar una cantidad. En ambos casos, debemos indicar la cifra a la que queremos aproximar:

- ***Redondeo:*** para redondear una cantidad a la n-ésima cifra, nos fijaremos en la siguiente cifra. Si ésta es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra n-ésima. En otro caso, dejamos tal y como está la cifra n-ésima y despreciamos las demás cifras a partir de ella.

Ejemplo

Realiza una aproximación por redondeo a las décimas, centésimas y milésimas del número 3,5738
- ✓ *A las décimas 3,5738 ➔ 7>5 entonces:* ***3,6***
- ✓ *A las centésimas 3,5738 ➔ 3<5 entonces:* ***3,57***
- ✓ *A las milésimas 3,5738 ➔ 8>5 entonces:* ***3,574***

- ***Truncamiento:*** para truncar una cantidad a la cifra n-ésima, se prescinde directamente de las siguientes cifras a partir de ella. Este método siempre produce aproximaciones por defecto, es decir, menores que la cantidad exacta *x* que queremos aproximar.

Ejemplo

Realiza una aproximación por truncamiento a las décimas, centésimas y milésimas del número 3,5738
- ✓ *A las décimas 3,5738* ➔ ***3,5***
- ✓ *A las centésimas 3,5738* ➔ ***3,57***
- ✓ *A las milésimas 3,5738* ➔ ***3,573***

2.7.2.- Errores

El error se define como la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente. Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas. Atendiendo a las causas que los producen, los errores se pueden clasificar en dos grandes grupos: ***errores sistemáticos y errores accidentales.***

Los ***errores sistemáticos*** son aquellos que permanecen constantes a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afectan a todas las mediciones de un modo definido y es el mismo para todas ellas; se pueden subclasificar en errores *instrumentales, personales o por la elección del método*. Los errores ***instrumentales*** son los debidos al aparato de medida. Los errores ***personales*** se deben a las limitaciones propias del experimentador. Finalmente, el error en la ***elección del método*** se presenta cuando se lleva a cabo la determinación de una medida mediante un método que no es idóneo para tal fin.

Los ***errores accidentales*** son aquellos que se producen en las variaciones que pueden darse entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo operador. Estas variaciones no son reproducibles de una medición a otra y su valor es diferente para cada medida. Las causas de estos errores son incontrolables para el observador. Los errores accidentales son en su mayoría de magnitud muy pequeña y para un gran número de mediciones se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas. Aunque con los errores accidentales no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordantes con el real, si se emplean métodos estadísticos se puede llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

2.7.2.1.- Error Absoluto

Llamamos ***error absoluto (E_A)*** a la diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la medida (valor aproximado) y el valor tomado como exacto o valor real.

$$E_A = |V_R - V_{aprox}|$$

Cuando existe un conjunto de datos, se utilizará como error absoluto la semidiferencia entre los valores máximo y mínimo.

$$E_A = \frac{|V_{\max} - V_{\min}|}{2}$$

Ejemplo

Calcula el error absoluto cometido en la medida del diámetro de un tubo de 7 dm si hemos obtenido 70,7 cm.

El valor real o exacto es el dato que nos dan V_R=70 cm, y el valor aproximado es el valor que hemos medido V_{aprox}=70,7 cm, por tanto:

$$E_A = |V_R - V_{aprox}| = |70 - 70,7| = 0,7\ cm$$

El error absoluto es de E_A= 0,7 cm

2.7.2.2.- Error Relativo

Llamamos ***error relativo (E_r)*** al cociente entre el error absoluto y el valor exacto multiplicado por 100. Lo damos en % para poder compararlo mejor.

$$E_r = \frac{E_A}{V_R} \cdot 100$$

Cuando no disponemos de valor Real o exacto, tomaremos como tal la media aritmética de las medidas.

$$Si\ V_R\ es\ desconocido;\ V_R = \frac{\sum x_i}{n}$$

Ejemplo

Calcula el error relativo cometido en la medida del diámetro de un tubo de 7 dm si hemos obtenido 70,7 cm.

Conocido el error absoluto, ya podemos calcular el relativo:

$$E_r = \frac{E_A}{V_R}\cdot 100 = \frac{0,7}{70}\cdot 100 = 0,01\cdot 100 = 1\ \%$$

El error relativo cometido es de E_r=1 %

Piensa y practica

12.- Sabiendo que el valor exacto del número irracional ∏ es 3,14159265359...., calcula los errores absoluto y relativo cometidos cuando aproximamos a 3,14.

2.08.- Intervalos y semirrectas

Un ***intervalo*** de extremos *a* y *b* son todos los números comprendidos entre *a* y *b*.

Notación de Intervalo	*Notación de conjunto*	*Notación gráfica*
$(3,5)$	$\{x \in \mathbb{R}/\ 3 < x < 5\}$	3 — 5

Como ya vimos en el curso anterior al estudiar las funciones, existen tres formas de representar un intervalo: Mediante la *notación de intervalo*, usando paréntesis y corchetes, mediante la *notación de conjunto*, haciendo uso de desigualdades con las cuáles atribuimos las condiciones de un valor *X* cualquiera para poder considerarlo como parte del conjunto, y por último mediante la *notación gráfica,* usando la recta real y delimitando la marcación de los extremos del conjunto con círculos, ya sean rellenos o vacíos.

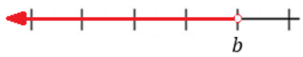
Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados y semiabiertos.

Tipos de Intervalos			
Abierto	Semiabiertos		Cerrados
No incluye sus extremos.	*Incluyen solo uno de sus extremos.*		*Incluye sus extremos.*
(a,b)	$(a,b]$	$[a,b)$	$[a,b]$
$\{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$	$\{x \in \mathbb{R}/\ a < x \le b\}$	$\{x \in \mathbb{R}/\ a \le x < b\}$	$\{x \in \mathbb{R}/\ a \le x \le b\}$
(a, b) a b	(a, b] a b	[a, b) a b	[a, b] a b

Ejemplo

Intervalo abierto	**Ejemplo:** Los **mayores** que 3 y **menores** que 5	**Intervalo:** $(3,5)$	**Conjunto:** $\{x:\ x\epsilon R\ /\ 3 < x < 5\}$	**Gráfica:** 3 5
Intervalo cerrado	**Ejemplo:** Los **mayores o iguales** que 3 y **menores o iguales** que 5	**Intervalo:** $[3,5]$	**Conjunto:** $\{x:\ x\epsilon R\ /\ 3 \le x \le 5\}$	**Gráfica:** 3 5
Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha	**Ejemplo:** Los **mayores o iguales** que 3 y **menores** que 5	**Intervalo:** $[3,5)$	**Conjunto:** $\{x:\ x\epsilon R\ /\ 3 \le x < 5\}$	**Gráfica:** 3 5
Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha	**Ejemplo:** Los **mayores** que 3 y **menores o iguales** que 5	**Intervalo:** $(3,5]$	**Conjunto:** $\{x:\ x\epsilon R\ /\ 3 < x \le 5\}$	**Gráfica:** 3 5

Una ***semirrecta*** o intervalo infinito es un conjunto de números reales definido para valores menores o mayores que un número dado. Es aquel que tiene un valor infinito en uno o ambos extremos. El extremo que posea el infinito será un extremo abierto.

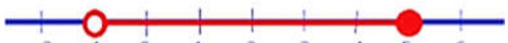
Tipos de Semirrectas			
Abierta por la izquierda	Cerrada por la izquierda	Abierta por la derecha	Cerrada por la derecha
$(a, +\infty)$ $(a, \rightarrow)$	$[a, +\infty)$ $[a, \rightarrow)$	$(-\infty, b)$ $(\leftarrow, b)$	$(-\infty, b]$ $(\leftarrow, b]$
$\{x \in \mathbb{R} / \ a < x\}$	$\{x \in \mathbb{R} / \ a \le x\}$	$\{x \in \mathbb{R} / \ x < b\}$	$\{x \in \mathbb{R} / \ x \le b\}$
			

Ejemplo

Intervalo abierto por la izquierda	**Ejemplo:** Los **mayores** que 5	**Intervalo:** $(5, \infty^{+})$	**Conjunto:** $\{x: x \in R \ / \ x > 5\}$	**Gráfica:** 
Intervalo abierto por la derecha	**Ejemplo:** Los **menores** que 5	**Intervalo:** $(\infty^{-}, 5)$	**Conjunto:** $\{x: x \in R \ / \ x < 5\}$	**Gráfica:** 
Intervalo cerrado por la derecha	**Ejemplo:** Los **menores o iguales** que 5	**Intervalo:** $(\infty^{-}, 5]$	**Conjunto:** $\{x: x \in R \ / \ x \le 5\}$	**Gráfica:** 
Intervalo cerrado por la izquierda	**Ejemplo:** Los **mayores o iguales** que 5	**Intervalo:** $[5, \infty^{+})$	**Conjunto:** $\{x: x \in R \ / \ x \ge 5\}$	**Gráfica:** 

Piensa y practica

13.- Completa la tabla:

Intervalo	Desigualdad	Gráfico
$(\leftarrow, 4)$		
	$-2 \le x < 3$	
		

2.09.- Notación científica

La ***notación científica*** nos permite escribir números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada.

Esta notación consiste simplemente en multiplicar por una potencia de base 10 con exponente positivo si el número es muy grande o negativo si es muy pequeño.

$$4752,3 = \underbrace{4}_{\text{un número entero}} , \underbrace{7523}_{\text{varios decimales}} \cdot \underbrace{10}_{\text{base } 10}{}^{\overset{\text{exponente}}{3}} = 4,7523 \cdot 10^{3}$$

$4752,3 = 4,7523 \times 10^{3}$

Siempre el exponente es igual al número de cifras decimales que deben correrse para convertir un número escrito en notación científica en el mismo escrito en notación decimal. Se desplazará la coma a la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si es negativo. Cuando se trata de convertir un número a notación científica el proceso es a la inversa.

Ejemplo

$500 = 5 \cdot 10^{2}$	$600.000 = 6 \cdot 10^{5}$	$300.000.000 = 3 \cdot 10^{8}$	$5.000.000.000.000.000 = 5 \cdot 10^{15}$
$0,05 = 5 \cdot 10^{-2}$	$0,000\ 12 = 1,2 \cdot 10^{-4}$	$0,000\ 000\ 000\ 4 = 4 \cdot 10^{-10}$	$0,000\ 000\ 002\ 5 = 2,5 \cdot 10^{-9}$

Piensa y practica
14.- Supón que en el ordenador puedes teclear 110 cifras por minuto. ¿Cuántas podrías teclear en 100 días si te dedicas a ello durante 8 horas diarias?
15.- ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido mil doscientos cuarenta mil millones de segundos?
16.- La unidad angstrom se usa mucho en cristalografía y en espectroscopia. Si (1 Å) es 10^{-8} cm, exprésala en nanómetros y en picómetros.

2.10.- Resolución de problemas:

Como ya sabes, la resolución de problemas es considerada la parte más importante de las matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentarás la utilidad de las Matemáticas en el mundo que te rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya posees.

Como ya sabemos, para resolver problemas en matemáticas podemos seguir el siguiente esquema:

- **a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- **b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- **c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- **d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- **e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

2.10.1.- Ejemplos de problemas de potencias y raíces

1.- Un tipo de bacteria se reproduce por mitosis dividiéndose por la mitad cada minuto. ¿Cuántas bacterias serán al cabo de diez minutos? Escribe el resultado en forma de potencia y calcula su valor.

Si cada minuto, la bacteria se divide en dos partes, al cabo de un minuto habrá dos bacterias, al cabo de dos 2·2=4 bacterias, al cabo de tres, 4·2=8….. y así sucesivamente, por tanto, al cabo de 10 minutos tendremos:

$$2^{10}\,bacterias = 1024 \text{ bacterias}$$

Así que a los 5 minutos habrá 1024 bacterias

2.- Los terrenos de dos parcelas miden 3^8 y 3^4 metros cuadrados, respectivamente. Mohamed duda si la primera parcela es doble que la segunda o no. De no ser doble, ¿cuántas veces es mayor la primera que la segunda?

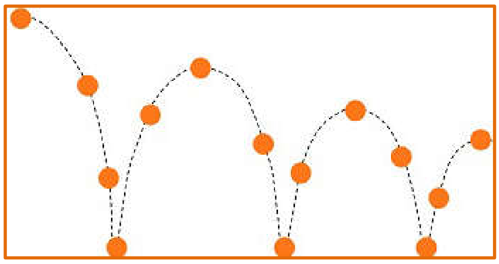
Sabemos que $3^8 = \left(3^4\right)^2$, por tanto, no es el doble, sino el cuadrado. Para vez cuantas veces es una mayor que la otra, bastaría con dividir:

$$3^8 : 3^4 = 3^4 = 81$$

Por tanto la primera parcela es 81 veces mayor que la segunda.

3.- Una pelota rebota cada vez a una altura igual a los 2/5 de la altura de la que cae. Si después de 3 botes se eleva a 32 centímetros, ¿cuál es la altura desde la que cae?

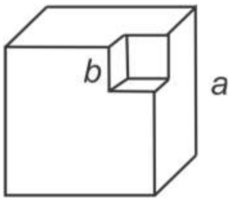
Si cae desde una altura h, y en cada bote llega a los $\frac{2}{5}$ de su altura anterior, después de tres botes llegará a: $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$ de la altura desde la que cae, y como dicen que después de los tres botes llega a 32 cm, entonces:



$$\frac{8}{125}\, de\ h=32 \quad\rightarrow\quad \frac{8}{125}\cdot h=32 \quad\rightarrow\quad h=\frac{32\cdot 125}{8}=500\ cm=5\ m$$

Por tanto cae desde una altura de 5 metros.

4.- Si tuviéramos un terrón de azúcar gigante con forma de cubo de 8 m^3 de volumen y nos dispusiéramos a dividirlo en pequeños terrones de 1 cm de lado, ¿Cuántos terrones obtendríamos?



Si los terrones tienen de lado 1 cm, el volumen de un cubo de 1 cm de lado será:

$$V=a^3=(1cm)^3=1\ cm^3$$

Por tanto, para calcular cuántos los cubitos que se obtienen del gran cubo, no tenemos más que dividir:

$$\frac{8\ m^3}{1\ cm^3}=\left\{\begin{matrix} 8\ m^3=8\ \cancel{m^3}\cdot\frac{10^3\ \cancel{dm^3}}{1\ \cancel{m^3}}\cdot\frac{10^3\ cm^3}{1\ \cancel{dm^3}}=8\cdot 10^3\cdot 10^3=8\cdot 10^6\ cm^3 \\ 1\ cm^3=1\ cm^3 \end{matrix}\right\}=\frac{8\cdot 10^6\ cm^3}{1\ cm^3}=8\cdot 10^6\ \ Terrones$$

Con el terrón de 8 m³, obtendríamos 8·10⁶ Terrones, o lo que es lo mismo 8 millones de terrones de 1 cm de lado.

5.- Una excelente aproximación del número irracional $\sqrt{2}$ es la fracción $\frac{17}{12}$. Calcula los errores absoluto y relativo.

El error absoluto es la diferencia en valor absoluto entre el valor real el valor aproximado:

$$E_A=\left|V_R-V_{aprox}\right|=\left|\sqrt{2}-\frac{17}{12}\right|=2{,}453\cdot 10^{-3}$$

Y el error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real expresado en tanto por ciento:

$$E_r=\frac{E_A}{V_R}\cdot 100=\frac{2{,}453\cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}\cdot 100=0{,}17\%$$

Por tanto los errores absoluto y relativo son: $E_A=2{,}453\cdot 10^{-3}$ y $E_r=0{,}17\%$

6.- La distancia que separa el Sol de la Tierra es de 1,486 · 10^{11} m. Si se toma la velocidad de la luz como 300.000 km/s, calcula el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

Sabemos por la asignatura de física y química que la velocidad es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado:

$$v=\frac{e}{t} \quad\rightarrow\quad despejando\ t \qquad t=\frac{e}{v}=\frac{1{,}485\cdot 10^{11}\ \cancel{m}}{3\cdot 10^8\ \cancel{m}\cdot s^{-1}}=495\ s=8\min\ \ y\ \ 15s$$

La luz tarda en llegar a la tierra 8 minutos y 15 segundos.

2.11.- Autoevaluación

1.- Reduca a una única potencia:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$ **b)** $5^7 : 5^3$

c) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4$ **d)** $(3^4)^4$

2.- Calcula:

a) $\left(5^8 \cdot 5^4\right):\left(5^2\right)^5$ **b)** $\left[\left(-2^6\right)\cdot\left(+2\right)^3\right]:\left[\left(+2\right)^3\right]^2$

3.- Opera y calcula:

a) $8^4 : \left(2^5 \cdot 4^2\right)$ **b)** $25^3 : \left[\left(-15\right)^5 : 3^5\right]$

4.- Calcula si es posible

a) $\sqrt{8^2}$ **c)** $\sqrt{-49}$ **e)** $\sqrt[5]{-1024}$

b) $\sqrt[3]{-343}$ **d)** $\sqrt{2500}$ **f)** $\sqrt[4]{a^5}$

5.- Una finca tiene forma cuadrada y su área mide 81 m^2. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

6.- Calcula y simplifica:

$$a)\ \sqrt{\frac{4}{16}}\cdot\left(\frac{24}{8}-\frac{5}{2}\right)^{-2}:\frac{2}{7}+3\cdot\frac{5}{7}=$$

$$b)\ \frac{2}{5}:\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot\sqrt{\frac{9}{16}}+1:\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=$$

$$c)\ -3-\sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\left[\left(-3\right):\left(\frac{1}{5}:\frac{1}{10}\right)\right]^{-3}=$$

7.- Extrae factores de los radicales:

a) $\sqrt[3]{81b^7}$ **b)** $\sqrt[5]{128m^{10}}$ **c)** $\sqrt[7]{256b^{14}c^{11}}$

d) $\sqrt[4]{b^7m^3}$ **e)** $\sqrt{2,\overline{7}b^3}$ **f)** $\sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}}$

g) $\sqrt[3]{0,001b^7}$ **h)** $\sqrt{324b^3x}$ **i)** $\sqrt[3]{\frac{8}{729}b^5m^{14}}$

j) $\sqrt[5]{125m^{10}c^{13}b^7}$ **k)** $\sqrt[3]{\frac{216}{343}m^{12}b^{15}c}$ **l)** $\sqrt[5]{1024m^{37}c^{18}}$

8.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $6\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}=$

b) $\sqrt{6}+\sqrt{60}-\sqrt{54}+\sqrt{96}=$

c) $9\sqrt{48}-\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75}=$

d) $9\sqrt{27}+2\sqrt{3}-8\sqrt{300}-4\sqrt{3}=$

e) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}=$

f) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}=$

9.- Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{a}{\sqrt{m}}$ **b)** $\frac{5}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{a}{a+\sqrt{b}}$ **d)** $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

e) $\frac{5}{2\sqrt[3]{5}}$ **f)** $\frac{m}{q\sqrt[5]{m^2}}$ **g)** $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **h)** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

i) $\frac{\sqrt{3+a}}{\sqrt{3-a}}$ **j)** $\frac{3}{5\sqrt[5]{3^2}}$ **k)** $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **l)** $\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}-2\sqrt{x}}$

m) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ **n)** $\frac{3}{3+\sqrt{6}}$ **ñ)** $\frac{3}{4-\sqrt{13}}$ **o)** $\frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

p) $\frac{3}{2\sqrt[4]{3^3}}$ **q)** $\frac{7}{3\sqrt[6]{7^4}}$ **r)** $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **s)** $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$

10.- En un restaurante hay para elegir entre 5 bebidas, 5 platos de primero, 5 platos de segundo, 5 postres y 5 cafés. ¿Cuántos días puedo ir a comer sin repetir el menú?

11.- La masa de la tierra es de $5{,}98\cdot10^{24}$ Kg y la masa de Júpiter es 317,94 veces mayor, ¿de cuántas toneladas hablamos?

12.- Calcula el valor de estas expresiones:

$$a)\ \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$$

$$b)\ \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}-\frac{5}{\sqrt{6}+1}$$

13.- Escribe $\{x\in\mathbb{R}\,/\,3<x\leq 7\}$ en forma de intervalo y gráficamente.

14.- Calcula el error absoluto y el error relativo de la aproximación de 4/9 a 0,45.

15.- Simplifica todo los que puedas:

$$a)\ \frac{6\cdot12^3\cdot18^2\cdot3^2\cdot108^2}{27^2\cdot3^2\cdot16\cdot48\cdot36}=$$

$$b)\ \frac{100^2\cdot(0{,}001)^3\cdot10^{-2}}{(0{,}01)^{-3}\cdot1000^4\cdot(0{,}1)^{-5}}=$$