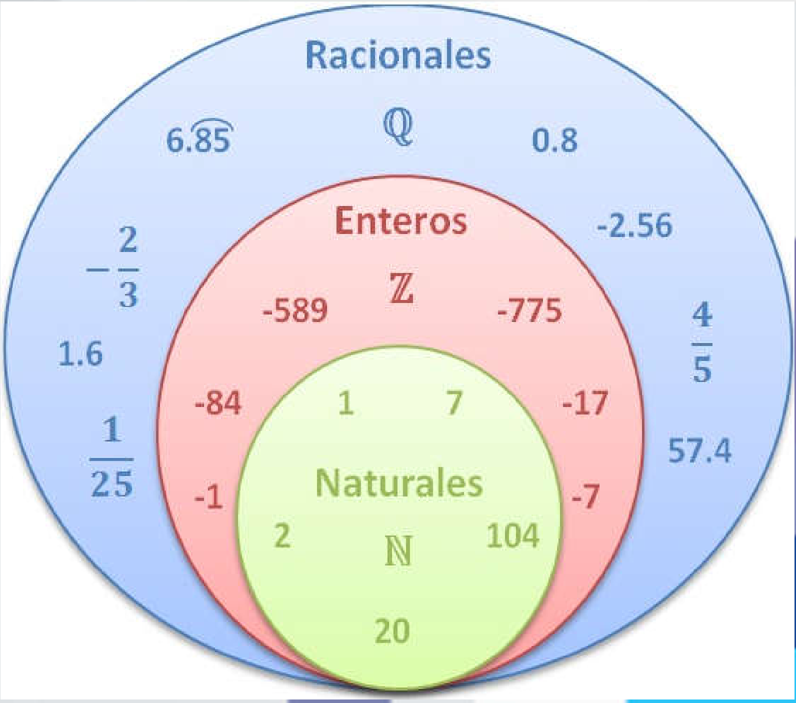
Unidad Didáctica 1

NÚMEROS RACIONALES

3º ESO



En esta unidad vamos a:

Comprender el concepto y la utilidad de las fracciones.

Identificar y entender las fracciones equivalentes.

Saber reducir a común denominador.

Poder comparar fracciones.

Realizar operaciones con racionales.

Conocer los distintos tipos de números decimales.

Pasar de fracción a decimal y de decimal a fracción.

Resolver problemas con números racionales.

Sumario

1.00.- Lectura comprensiva

La senda de los recuerdos

La sala del trono papal aparecía enorme y vacía a los ojos de Silvestre II.

El otrora poderoso pontífice romano había perdido todo su poder político aunque a los ojos de sus contemporáneos, su presencia aún imponía un respeto casi místico.

Ya anciano, le gustaba pasear por su pasado, el único sitio a donde solo podía llegar él y donde se sentía realmente libre. Recordaba feliz su estancia en el monasterio catalán de Ripoll, en el año 967 D.C., donde hacía frecuentes visitas a su imponente biblioteca. Fue allí donde entró en contacto con la ciencia árabe y donde se despertó su interés por el estudio de las matemáticas y la astronomía.

A su memoria volvían algunos de sus recuerdos que iluminaban su rostro, como aquel ábaco que él mismo construyó con los números arábigos escritos en sus fichas y cuyo uso describió con detalle, o el proyecto de aquella máquina que fraccionaría el tiempo, sustituta de la campana de los monjes: maitines, laudes, prima, tercia…

Abrió el libro y, por azar, se encontró con el proyecto de la máquina que medía el tiempo cuyas primeras líneas decían:

Día y noche son las dos partes en que se
divide el día, mas no son iguales, el primero
de diciembre durante el día se han consumido
3 velas y 6 durante la noche…

De repente, como el humo de las velas tras un golpe de aire, el imaginario camino trazado en el tiempo se desvaneció al oír la voz de su secretario que, a cierta distancia, le informaba de su próxima audiencia.

¿Qué fracción de un día le asignarías al día? ¿y a la noche?

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>

1.- ¿De qué habla el texto?

2.- ¿Sabes dónde está Ripoll exactamente?

2.- Según el texto ¿Qué fracción del día le asignarías al día?, ¿y a la noche?

3.- Pon algún otro ejemplo del uso de las fracciones.

1.01.- Introducción

Los números han surgido a lo largo de la historia por la necesidad que ha tenido el hombre de contar, de medir y de repartir, entre otras. Luego de la aparición de estos números, los matemáticos los sistematizaron y formalizaron como sistemas numéricos, los cuales a su vez sirven de base para desarrollar otras teorías matemáticas, de gran utilidad para el desarrollo de la humanidad.

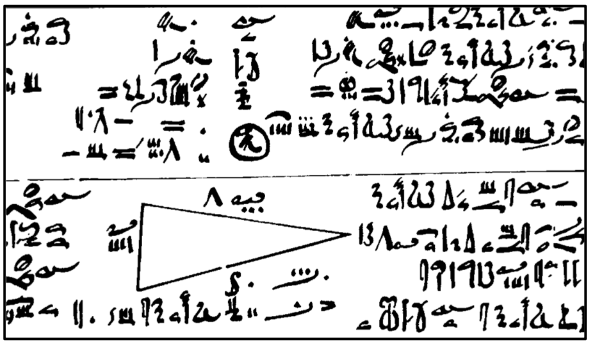
Los primeros números que se utilizaron fueron los naturales, sin embargo, estos números no son suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por ello, se dio el surgimiento de otros números como los enteros, los racionales, etc.

Por ejemplo, la necesidad de utilizar fracciones se observa al querer representar que la cantidad de grano de una producción llenó la mitad del granero; es muy difícil expresarlo si sólo se pueden utilizar números naturales, lo mejor es expresarlo como $1/2$.

En la vida diaria es común utilizar fracciones, por ejemplo, si se tiene que una receta de cocina rinde para 6 personas y se quiere prepara una cena para dos, entonces se debe tomar la tercera parte de cada ingrediente y así adaptarla para menos personas.

Es curioso notar que la aparición de las fracciones se dio antes de que se utilizaran los números negativos; así se marca el hecho que a los números racionales se les encontró una aplicación práctica mucho antes que a los negativos.

En la historia, el primer documento del que se tiene referencia sobre los números racionales es en un "*papirus*" egipcio que data de 1900 a.C. (¡hace casi 4000 años!) escrito por el sacerdote *Ahmes*. En este papiro se nota las serias dificultades que tuvieron para darle significado a las fracciones con numerador distinto de 1.



1.- Extracto del papiro de Ahmes

Los griegos también tuvieron esta dificultad, ya que lograron encontrarle significado a las fracciones con numerador 1, $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$, pero no así a fracciones como $\frac{3}{5}$ ó $\frac{2}{3}$. Dada esta limitación, ellos representaban una fracción como $\frac{4}{15}$ en forma de suma de dos fracciones simples $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$, lo que hace que cualquier operación sencilla se vuelva más complicada.

Los babilonios y los romanos también trabajaron con fracciones, ellos no se dieron ninguna limitación para el numerador, sin embargo, en sus instrumentos de medición se utilizó la base 60, lo que los llevó a utilizar fracciones con un denominador fijo de 60.

Así, por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ la representaban como $\frac{36}{60}$, lo cual también complicaba los cálculos.

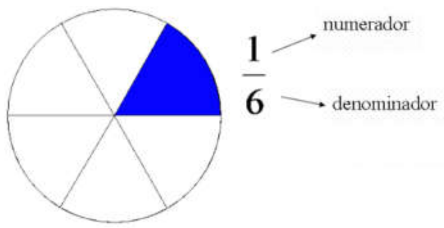
Esta numeración en base 60 tuvo influencia aún en nuestros días, un ejemplo claro es en la medición del tiempo; una hora tiene 60 minutos y cada minuto tiene 60 segundos.

Después de algún tiempo se logró darle significado a los números racionales y en la actualidad los matemáticos han logrado formalizar la teoría del conjunto de los números racionales y encontrar muchas de sus características.

1.02.- Fracciones.

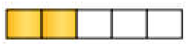
Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ en la que a y b son números enteros llamados numerador y denominador.

$$\frac{a}{b}=\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$



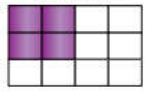
Una Fracción se puede interpretar de distintas formas:

<u>Fracción como parte de la unidad:</u> el denominador *b* representa el número de partes iguales en que se divide la unidad. Y el numerador *a* representa el número de partes que se toman.



$\frac{2}{5} \rightarrow$ dos quintos

$\frac{1}{6} \rightarrow$ *un sexto*



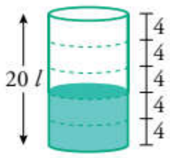
$\frac{4}{12} \rightarrow$ *cuatro doceavos*

<u>Fracción como cociente:</u> para calcular su valor se divide el numerador entre el denominador.

$\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2

$2:5$ → Dividimos 2 unidades entre 5 → $2:5 = 0{,}4$

<u>Fracción como operador:</u> Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



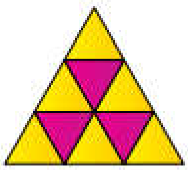
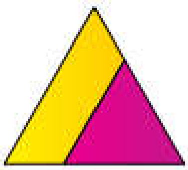
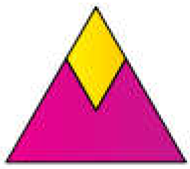
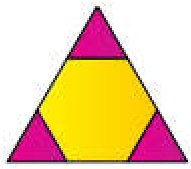
En el bidón hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros. $\begin{cases} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 20:5 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 4 \cdot 2 = 8 \end{cases}$ ➔ $\frac{2}{5}$ *de* 20 *litros* $= (20:5) \cdot 2 = 8$

Para calcular la fracción de un número, se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

Decimos que una fracción es ***propia*** si el numerador es más pequeño que el denominador mientras que es ***impropia*** en el caso contrario.

Piensa y practica

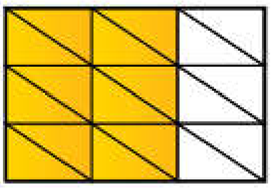
1.- Escribe debajo la fracción que ocupa la parte amarilla en cada figura:

1.03.- Fracciones equivalentes.

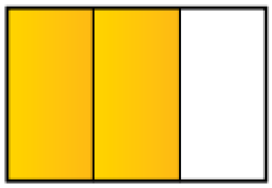
Decimos que dos fracciones son ***equivalentes*** cuando expresan la misma porción de unidad.

Ejemplo



$\frac{12}{18}$

$\frac{6}{9}$



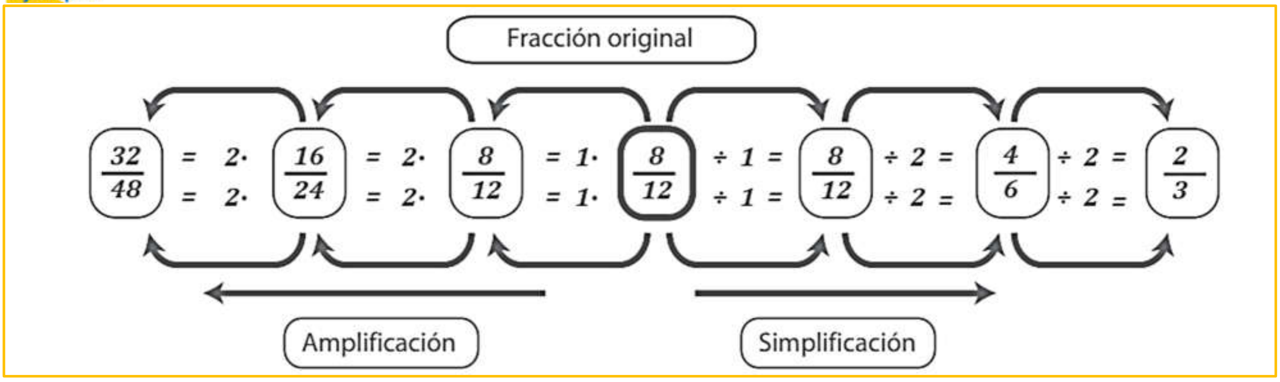
$\frac{1}{3}$

Las fracciones $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes porque como vemos representan la misma porción.

1.3.1.- Obtención de fracciones equivalentes

Existen dos formas sencillas de obtener fracciones equivalentes a otra dada. Para ello se multiplican (*Método de* ***Amplificación***), o se dividen (*Método de* ***Simplificación***), los dos términos de una fracción por el mismo número.

Ejemplo



Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

1.3.2.- Fracción irreducible

La ***fracción irreducible*** de una fracción dada es otra fracción equivalente a ella en la que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes a excepción de la unidad. Es decir que la fracción no se puede simplificar más.

Ejemplo

$$\frac{60}{90} \underset{\text{Dividimos por 5}}{\rightarrow} \frac{12}{18} \underset{\text{Dividimos por 3}}{\rightarrow} \frac{4}{6} \underset{\text{Dividimos por 3}}{\rightarrow} \frac{2}{3} \rightarrow \textit{Fracción irreducible}$$

La forma más rápida de conseguir la fracción irreducible de otra es dividir numerador y denominador por el mayor de todos sus divisores comunes, es decir, por el máximo común divisor.

Ejemplo

$$\frac{60}{90} \rightarrow \begin{cases} 60 = 6\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5 \\ 90 = 9\cdot 10 = 3^2\cdot 2\cdot 5 = 2\cdot 3^2\cdot 5 \end{cases} \rightarrow M.C.D\,(60,90) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30 \rightarrow \frac{60}{90} = \frac{60:30}{90:30} = \frac{2}{3} \begin{cases} \textit{Fracción} \\ \textit{Irreducible} \end{cases}$$

Una vez visto todo esto, y como resumen, existen 3 formas de saber si dos fracciones son equivalentes:

1.- Dos fracciones son equivalentes si al multiplicar en cruz obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad a\cdot d = b\cdot c$$

$$\textit{ejemplo}: \quad \frac{1}{3} \text{ y } \frac{5}{15} \text{ son equivalentes porque } 1\cdot 15 = 5\cdot 3 \quad \rightarrow \quad 15 = 15$$

2.- Dos fracciones son equivalentes si tienen la misma fraccción irreducible:

$$\textit{ejemplo}: \quad \frac{3}{9} \text{ y } \frac{5}{15} \text{ son equivalentes porque } \begin{cases} \frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3} \\ \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3.- Dos fracciones son equivalentes si al realizar la división obtenemos el mismo resultado:

$$\textit{ejemplo}: \frac{1}{4} \text{ y } \frac{5}{20} \text{ son equivalentes porque } \begin{cases} 1:4=0,25 \\ 5:20=0,25 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4}=\frac{5}{20}$$

1.04.- Comparación de fracciones.

Comparar fracciones es ver cual de ellas es mas grande o más pequeña. Para ello seguiremos los siguientes criterios:

- Si tienen el ***mismo denominador***, es mayor la fracción que tiene mayor el numerador:

6/10 es menor que 8/10 porque al tener el mismo denominador nos fijamos en los numeradores y 6<8.

- Si tienen el ***mismo numerador*** es mayor la que tiene menor denominador:

1/4 es menor que 1/3 porque al tener el mismo numerador nos fijamos en los denominadores y 3<4.

- Si tienen distinto numerador y denominador, se reducen primero a común denominador, y después se comparan los numeradores:

1/3 es menor que 3/5 porque al reducir a común denominador 5/15 es menor que 9/15 ya que 5<9.

1.4.1.- Reducción de fracciones a común denominador

Reducir fracciónes a común denominador consiste en obtener fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Ese nuevo denominador será el mínimo común múltiplo de los antiguos denominadores.

Para calcular los nuevos numeradores dividiremos el nuevo denominador entre el antiguo y el resultado lo multiplicaremos por el antiguo numerador.

Nuevo numerador = Nuevo denominador : antiguo denominador x nuevo numerador

Ejemplo

Reducir a común denominador las fracciones $\frac{2}{5}$ *y* $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{1}{3} \rightarrow m.c.m.(5,3)=3\cdot 5=15 \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}=\frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:5)\cdot 2}{15}=\frac{3\cdot 2}{15}=\frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5}=\frac{6}{15} \\ \frac{1}{3}=\frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:3)\cdot 1}{15}=\frac{5\cdot 1}{15}=\frac{5}{15} \rightarrow \frac{1}{3}=\frac{5}{15} \end{cases}$$

Piensa y practica

2.- Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{30}$

1.05.- Operaciones con fracciones.

Una vez visto el concepto de fracción, de redución de fracciones a común denominador y de fracciones equivalentes vamos a ver como se realizan las operaciones con fracciones:

1.5.1.- Suma y resta de fracciones

Con igual denominador:

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, simplemente, se suman o se restan los numeradores y se deja intacto el denominador:

Ejemplo

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5} \qquad \frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4+7}{9}=\frac{11}{9} \qquad \frac{8}{15}+\frac{13}{15}=\frac{8+13}{15}=\frac{21}{15}$$

Con distinto denominador:

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador, primero se reducen a común denominador y, después, se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador. Si alguno de los sumandos es entero lo transformaremos en una fracción de denominador 1.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}_{m.c.m(4,5)=20}=\begin{cases}\frac{1}{5}=\frac{4\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{4}{20}\\ \frac{3}{4}=\frac{5\cdot 1}{5\cdot 4}=\frac{5}{20}\end{cases} \rightarrow \frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

Los sumandos enteros se transforman en fracciones de denominador 1

$$\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

Siempre que se opera con fracciones tenemos que dar el resultado en la *fracción irreducible*, por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}}_{m.c.m(2,5,6)=30}=\begin{cases}\frac{7}{6}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{35}{30} & y \quad 3=\frac{3}{1}=\frac{30\cdot 3}{30\cdot 1}=\frac{90}{30}\\ \frac{5}{2}=\frac{15\cdot 5}{15\cdot 2}=\frac{75}{30} & y \quad \frac{1}{5}=\frac{6\cdot 1}{6\cdot 5}=\frac{6}{30}\end{cases} \rightarrow \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{35}{30}+\frac{75}{30}-\frac{90}{30}+\frac{6}{30}=$$

$$=\frac{35+75-90+6}{30}=\frac{26}{30}\xrightarrow{\text{Simplificando}}=\frac{26:2}{30:2}=\frac{13}{15}\ \underset{\text{por tanto}}{\rightarrow}\ \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$$

Además es importante no esperar hasta el final para simplificar sino que podemos (mas bien debemos) hacerlo en cualquier momento, incluso al principio.

Ejemplo

$$\frac{24}{10}+\frac{12}{30}-\frac{15}{25}=\underset{\substack{\text{Simplificamos antes de operar}\\ \text{para facilitar los cálculos}\\ \text{(Fracción irreducible)}}}{=}\begin{cases}\frac{24}{10}=\frac{12}{5}\\ \frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\\ \frac{15}{25}=\frac{3}{5}\end{cases}\underset{\substack{\text{Y Observamos que no es necesario}\\ \text{reducir a común denominador porque}\\ \text{ya tienen el mismo denominador.}\\ \text{SIMPLEMENTE OPERAMOS}}}{\rightarrow}=\frac{12}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$$

1.5.2.- La fracción opuesta:

Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene siempre una fracción opuesta, que es de la forma $-\frac{a}{b}$ ó $\frac{-a}{b}$ y nunca $\frac{a}{-b}$.

$$\text{Opuesta de } \frac{a}{b} \rightarrow -\frac{b}{a}$$

Dos fracciones son ***opuestas*** si la suma de las dos es cero.

Ojo !!: Nunca se pone el número negativo en el denominador (debajo). Siempre en el numerador (arriba) o delante.

1.5.3.- Multiplicación de fracciones:

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

↔ Se multiplican los numeradores.
↔ Se multiplican los denominadores.

ejemplo : $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$

De igual forma, siempre que se multipliquen fracciones tenemos que dar el resultado en la *fracción irreducible*, por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá y no necesariamente al final como vimos en el apartado anterior.

Ejemplo

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{15}{10}\underset{\text{Simplificamos antes de operar}}{=}\frac{7}{4}\cdot\frac{15:5}{10:5}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{21}{8}$$

$$3\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 7}=\frac{12}{7}$$

1.5.4.- Fracción inversa o inversa de una fracción:

Toda fracción distinta de cero tiene inversa, y esta se consigue dándole la vuelta, el numerador pasa a ser el denominador y viceversa.

$$\text{Inversa de } \frac{a}{b} \quad\rightarrow\quad \frac{b}{a}$$

Dos fracciones son ***inversas*** cuando su producto es igual a la unidad.

$\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son fracciones inversas porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{b}}{\cancel{b}\cdot\cancel{a}}=1$

1.5.5.- División de fracciones:

El cociente de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y como denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

↔ Se multiplican los términos cruzados.

ejemplo : $\frac{3}{5}:\frac{7}{4}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$

Ejemplo

$$\frac{8}{15}:\frac{4}{5}=\frac{8\cdot 5}{15\cdot 4}=\frac{40}{60}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{6}:6=\frac{2}{6}:\frac{6}{1}=\frac{2\cdot 1}{6\cdot 6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{8}{9}$$

1.5.6.- Potencia de una fracción:

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos el numerador y el denominador a esa potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{c\ veces} = \frac{a^c}{b^c} \qquad ejemplo: \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}^{3\ veces} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

En una potencia de base una fracción y exponente natural:

- Si la base es positiva, la potencia es positiva:

$$ejemplo: \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} > 0 \quad \rightarrow \quad + \quad Positivo$$

- Si la base es negativa, la potencia es: $\begin{cases} Positiva \text{ si el exponente es par} \\ Negativa \text{ si el exponente es impar} \end{cases}$

$$ejemplos: a)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9} > 0 \quad \rightarrow \quad + \quad Positivo \qquad b)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27} < 0 \quad \rightarrow \quad - \quad Negativo$$

En el capítulo siguiente veremos las potencias y las raíces de forma más amplia. Aquí solo hacemos una pequeña introducción.

1.06.- Operaciones combinadas con fracciones.

Al igual que con las operaciones combinadas de números naturales y enteros, para realizar operaciones con fracciones hay que seguir el orden de prioridad en las operaciones:

1.- Se realizan las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes, de dentro a fuera.
2.- Se realizan las potencias.
3.- Se resuelven las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4.- Se resuelven las sumas y restas, de izquierda a derecha.

Ejemplo

$$a)\ \frac{12}{13}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{7}\right)-\frac{2}{5} = \frac{12}{13}\cdot\underbrace{\left(\frac{21}{28}-\frac{8}{28}\right)}_{\text{Resolvemos el paréntesis haciendo el m.c.m.}}-\frac{2}{5} = \underbrace{\frac{12}{\cancel{13}}\cdot\left(\frac{\cancel{13}}{28}\right)}_{\text{Después el producto, simplificando a la fracción irreducible}}-\frac{2}{5} = \underbrace{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}}_{\text{Por último hacemos la resta}} = \underbrace{\frac{15}{35}-\frac{14}{35}}_{\text{Para ello hacemos el m.c.m.}} = \frac{1}{35}$$

$$b)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{32}{40}-\frac{5}{40}\right)}_{\text{Resolvemos el paréntesis haciendo el m.c.m.}} = \frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{27}{40}\right)}_{\text{Después el producto, simplificando a la fracción irreducible}} = \frac{1}{2}+\frac{9}{40} = \underbrace{\frac{20}{40}+\frac{9}{40}}_{\text{Por último hacemos la suma con la ayuda del m.c.m.}} = \frac{29}{40}$$

$$c)\ \left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{6}{9}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2\right]}_{\text{Primero hacemos el corchete y dentro de él los paréntesis}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]}_{\text{Antes de sumar tenemos que hacer la potencia}}:\left(-\frac{2}{3}\right) =$$

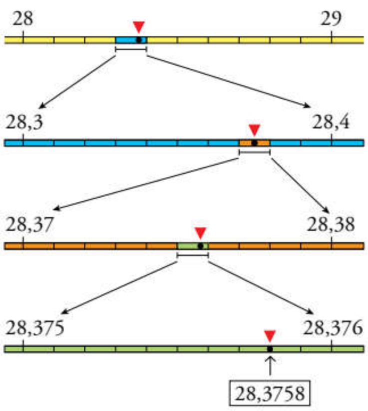
$$= \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\right]}_{\text{después el producto}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{13}{9}\right)\right]}_{\text{ahora sumamos}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\frac{18}{9}\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{ahora dividimos}} = 2:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\frac{-6}{2}}_{\text{y simplificamos si se puede}} = -3$$

Piensa y practica

3.- Calcula y expresa el resultado en la fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$ b) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$ c) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}$

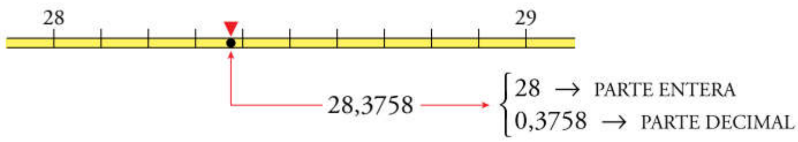
1.07.- Números decimales



Como ya sabemos, los números decimales son los números existentes entre dos números enteros y generalmente provienen de fracciones que no son exactas.

$$\underbrace{\frac{8}{4}=2}_{\text{Número Entero}} \qquad \underbrace{\frac{7}{2}=3{,}5}_{\text{Número Decimal}}$$

Un número decimal tiene una ***parte entera***, situada a la izquierda de la coma, y una ***parte decimal***, situada a la derecha.



1.7.1.- Tipos de números decimales

Hay 4 tipos de números decimales, pero en este capítulo nos centraremos sólo en dos:

- ***Decimales exactos:*** Son aquellos que tienen un número limitado de cifras decimales.

$$\frac{9}{8}=1,\underbrace{125}_{\text{3 cifras decimales}} \qquad \frac{3}{10000}=0,\underbrace{0003}_{\text{4 cifras decimales}}$$

- ***Decimales periódicos:*** Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que se repiten de forma periódica. Llamamos ***periodo*** al número o números que se repiten.

Los decimales periódicos pueden ser de dos tipos:

- ***Periódico Puro:*** Si lo que se repite (periodo) empieza justo después de la coma.

$0,\hat{3}=0,\underbrace{3}_{\text{Periodo}}\ 33333333....$ $\quad 1,\underbrace{125}_{\text{Periodo}}125125.....$ $\quad 5,\underbrace{75}_{\text{Periodo}}\ 757575757575...$

Todos los periodos empiezan justo después de la coma

- ***Periódico mixto:*** Si lo que se repite, no empieza justo después de la coma si no que lo hace varios lugares después.

$0,5\hat{3}=0,5\underbrace{3}_{\text{Periodo}}\ 33333333....$ $\quad 1,52\underbrace{125}_{\text{Periodo}}125125.....$ $\quad 5,999\underbrace{75}_{\text{Periodo}}\ 757575757575...$

Los periodos empiezan varios lugares después de la coma

Llamamos ***anteperiodo*** a los números entre la coma y el periodo. En los números anteriores, los anteperiodos serían: 5, 52 y 999.

$$3,7777777657657657...=3,\underbrace{7777777}_{\text{Anteperiodo}}\underbrace{\overset{\frown}{657}}_{\text{Periodo}}$$

1.08.- Paso de fracción a decimal y de decimal a fracción:

Los números decimales y las fracciones están muy relacionados de forma que se puede pasar de uno a otro de forma más o menos sencilla. En este curso solo veremos el paso de fracción a decimal, dejando para cursos posteriores el caso contrario, aunque no todos, solo se pueden pasar a fracción los decimales exactos y los periódicos.

$$\underbrace{\frac{3}{5}=0,6}_{\text{Paso de fracción a decimal}} \qquad \leftrightarrow \qquad \underbrace{1,3333333....=\frac{4}{3}}_{\text{Paso de decimal a fracción}}$$

1.8.1.- Paso de fracción a decimal

Para pasar de una fracción a decimal, o lo que es lo mismo, obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división del numerador *a* entre el denominador *b*.

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Fracción}} = \underbrace{c,defg...}_{\text{Decimal}}$$

Cualquier fracción puede expresarse mediante un número entero, un número decimal exacto o un número decimal periódico.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{9}{3}=3}_{\text{Número entero}} \to \underbrace{\frac{3}{4}=0,75}_{\text{Número decimal exacto}} \to \underbrace{\frac{1}{3}=0,33333..=0,\widehat{3}}_{\text{Número decimal periódico puro}} \to \underbrace{\frac{8}{15}=0,5333333..=0,5\widehat{3}}_{\text{Número decimal periódico mixto}}$$

1.8.2.- Paso de decimal a fracción: La fracción generatriz.

Tanto los números decimales exactos como los periódicos se pueden representar mediante fracciones irreducibles que reciben el nombre de ***fracciones generatrices***. Existen tres formas distintas de hacerlo dependiendo del tipo de decimal del que se trate.

1.8.2.1.- De decimal exacto a fracción

Para pasar un número decimal exacto a fracción, se escribe en el numerador el número decimal sin coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga. En caso de que se pueda simplificar, se simplifica.

Ejemplo

$$0,3=\frac{3}{10} \qquad 0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4} \qquad 3,124=\frac{3124}{1000}=\frac{781}{250}$$

1.8.2.2.- De decimal periódico puro a fracción

Para pasar un número decimal periódico puro a fracción, en el numerador se escribe primero el número sin coma (hasta el final del periodo) y se le resta la parte entera del número decimal. En el denominador, se escriben tantos 9 como cifras tenga el periodo. Si se puede simplificar, se simplifica.

Ejemplo

$$1,33333333..=1,\widehat{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3} \qquad 3,252525..=3,\widehat{25}=\frac{325-3}{99}=\frac{322}{99}$$

Aunque existe otra forma, en la que se trata de restar dos números decimales de forma que el resultado sea un número entero (desapareciendo así la parte decimal).

Veamos cómo se hace de esta otra manera:

Ejemplo

Llamamos N al número: $N = 3,2525252525.....$

Como el periodo tiene dos decimales y quiero restar dos números con la misma parte decimal, tenemos que calcular 100 N: $100N = 325,25252525.....$

Calculamos 100N, porque si calculara 10N=32,52525252 las partes decimales no coinciden y al restarlas no daría un número entero.
Vemos ahora que los números 100N y N tienen la misma parte decimal.

Si restamos estos dos números, obtenemos un número entero:

$$100N - N = 325,252525..... - 3,25252525.... \quad \rightarrow \quad 99N = 322$$

Y si despejamos N: $N = \dfrac{322}{99}$

Por tanto: $3,252525252525.... = \dfrac{322}{99}$

1.8.2.3.- De decimal periódico mixto a fracción

Para pasar un número decimal periódico mixto a fracción, en el numerador, se escribe primero el número decimal sin coma (hasta el final del periodo) y se le resta la parte entera y el anteperiodo, también sin coma, es decir, la parte entera unida a los decimales que están antes del periodo.

El número del denominador estará formado por tantos 9 como cifras tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras tenga el anteperiodo. En caso de que se pueda simplificar, se simplifica.

Ejemplo

$$0,611111111... = 0,6\overset{\frown}{1} = \frac{61-6}{90} = \frac{55}{90} = \frac{11}{18} \qquad 3,2155555.. = 3,21\overset{\frown}{5} = \frac{3215-321}{900} = \frac{2894}{900} = \frac{1447}{450}$$

En este otro caso existe una forma similar a la vista en el punto anterior, en la que se trata de restar dos decimales de forma que su diferencia sea un número entero.

Ejemplo

Primero convertimos el número en periódico puro. Para ello como entre el periodo y la coma solo hay una cifra, lo multiplicamos por 10:

$$N = 0,6\overset{\frown}{1} \quad \rightarrow \quad 10N = 6,\overset{\frown}{1} \quad \rightarrow \quad 100N = 61,\overset{\frown}{1}$$

Vemos que 10N y 100N tienen la misma parte decimal, así que, si los restamos obtendremos un entero:

$$100N - 10N = 61,\overset{\frown}{1} - 6,\overset{\frown}{1} \quad \rightarrow \quad 90N = 55$$

Si ahora despejamos N, ya tenemos la fracción generatriz del número decimal pedido:

$$N = 0,6\overset{\frown}{1} \quad \rightarrow \quad N = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

Piensa y practica

4.- Calcula la fracción generatriz de cada uno de los siguientes números decimales:

a) $1,75$ *b)* $0,041$ *c)* $3,\overset{\frown}{56}$ *d)* $0,2\overset{\frown}{1}$ *e)* $2,35\overset{\frown}{9}$ *f)* $5,4\overset{\frown}{563}$

1.09.- Resolución de problemas con números racionales

Como ya sabéis, la resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya tenéis.

Es evidente que para poder resolver problemas de matemáticas hay que poseer un buen conocimiento de los conceptos teóricos.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

- **a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- **b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- **c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- **d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- **e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

1.9.1.- Ejercicios resueltos de números racionales

1.- Mi cortijo tiene un depósito de agua que se llena con agua de lluvia con una capacidad de 21.000 litros. Si gastamos en una semana los 3/7, ¿qué fracción de agua queda en el depósito?, ¿Cuántos litros quedan?

Si gastamos 3 partes de 7, entonces nos quedan 4 partes de 7: Quedan $\frac{4}{7}$

Y si quedan $\frac{4}{7}$ de 21.000 litros, entonces quedan:

$$\frac{4}{7}\ de\ 21.000 = \frac{4}{7}\cdot 21.000 = 4\cdot\frac{21.000}{7} = 4\cdot 3.000 = 12.000 \text{ litros}$$

Quedan 4/7 del depósito que son 12.000 litros de agua.

2.- Imane y Rhim salen de viaje al desierto con una cierta cantidad de gasoil en el depósito de su todoterreno. El viaje lo hacen en dos etapas: en la primera, desde Casablanca a Marrakech consumen 2/5 del combustible, y en la segunda 1/3 de lo que quedaba después de la primera etapa, si llegan a Ouarzazate con 20 litros en el depósito. ¿Con cuántos litros de gasoil emprendieron el viaje?

Si en la primera etapa gastan 2/5 del combustible, le quedarán 3/5

Y si en la segunda etapa gastan 1/3 de lo que le queda de la primera, gastan 1/3 de 3/5, por tanto gastan:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, entre las dos etapas habrán gastado:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Por tanto les quedarán 2/5 del depósito.

Si han llegado a Ouarzazate con 20 litros de gasoil, entonces los 2/5 del depósito se corresponderán a esos 20 litros que les quedan.

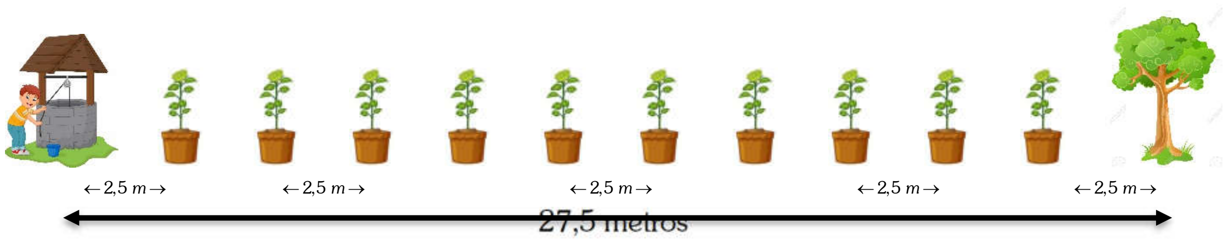
$$Si\ \frac{2}{5}\quad son\quad 20l\qquad \to\quad \frac{1}{5}\quad son\quad 10l\qquad y\qquad \frac{5}{5}\quad son\quad 5\cdot 10 = 50l$$

Por tanto Imane y Rhim emprendieron el viaje con 50 litros de gasoil en su depósito.

3.- En un jardín hay un pozo y un árbol a 27,5 m de distancia. Entre ellos se han colocado 10 macetas a intervalos iguales.

a) ¿A qué distancia de cada maceta está el pozo?
b) ¿Qué distancia se recorre para regarlas, si cada dos macetas hay que volver al pozo?

Si nos ayudamos con un dibujo:



a) Si observamos el dibujo vemos que si ponemos 10 macetas entre el árbol y el pozo tenemos 11 huecos. Si dividimos la distancia total entre los huecos tenemos: 27,5:11=2,5, quiere decir que la distancia entre todos ellos es de 2,5 m.

Para hallar la distancia de todas ellas al pozo bastaría con ir sumando 2,5 m sucesivamente hasta la llegar a la décima maceta, obteniendo:

2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5, y 25

metros, respectivamente.

b) Para calcular la distancia recorrida sabiendo que cada dos macetas vuelve al pozo sería 2 veces (ida y vuelta) la distancia cada dos macetas, es decir:

$$2\cdot 5 + 2\cdot 10 + 2\cdot 15 + 2\cdot 20 + 25 = 125 \text{ m}$$

Para regar las dos últimas solo hace la ida.

En total recorre 125 metros.

Piensa y practica
5.- Una amiga me pidió que le pasase un escrito al ordenador. El primer día pasé ¼ del trabajo total. El segundo día 1/3 de lo restante. El tercer día 1/6 de lo que faltaba, y el cuarto lo terminé pasando 30 folios. ¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el escrito?
6.- Luis XIV decidió en 1682 trasladarse a Versalles, para ello utilizó 4 carruajes. En el primero llevó un quinto del equipaje, en el segundo un cuarto del resto, en el tercero, dos tercios del nuevo resto, y en el cuarto 750 Kg. ¿Cuál era el peso total del equipaje?
7.- El diámetro aproximado de los glóbulos blancos de la sangre es de $1{,}2\cdot 10^{-7}$m. Suponiendo que una persona tiene aproximadamente 5,5 litros de sangre en su cuerpo y que el número de glóbulos blancos es de 7.500 por mm^3, averigua el número de glóbulos blancos y exprésalo en notación científica.

1.10.- Autoevaluación

1.- Ordena de mayor a menor:

$$\frac{5}{6},\frac{3}{5},\frac{7}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{10}$$

2.- Calcula paso a paso:

a) $3+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+3\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)\right]$ b) $5:\left(\frac{1}{2}+1\right)^{2}-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

3.- Las latas de refresco tienen un volumen de 1/3 de litro. ¿Cuántas latas son necesarias para envasar 20.000 litros de refresco?

4.- Calcula: $0,2+0,\widehat{2}+0,0\widehat{2}$

5.- Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana 1/3 del total, y, por la tarde, 2/5 también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

6.- Un señor sale de casa con 60 €. Gasta en un vestido 1/3 de su dinero, y, en el mercado, 2/5 de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?
b) ¿Cuánto dinero le queda?

7.- Un pelota rebota cada vez a una altura igual a los 2/5 de la altura de la que cae. Si después de 3 botes se eleva a 0,32 metros, ¿cuál es la altura desde la que cae?

8.- En una frutería, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden a las frutas, y el resto, a las verduras. De lo recaudado por las frutas, los 3/8 son de las naranjas, y ese día fueron 90 €. ¿Cuánto se recaudó en total? ¿Qué parte correspondió a las verduras?