CALCULAR TÉRMINOS EN UNA SUCESIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

SUCESIÓN

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales: $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$

Cada uno de los números que forman la sucesión es un **término**.

EJEMPLO

3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … es una sucesión.

El primer término de esta sucesión es: $a_1 = 3$

El segundo término de esta sucesión es: $a_2 = 2$

El tercer término de esta sucesión es: $a_3 = 1$

El cuarto término de esta sucesión es: $a_4 = 2$

ACTIVIDADES

1 Dada la sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …, escribe sus 10 primeros términos.

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$a_6 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_9 =$ $a_{10} =$

2 Escribe, para la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …, los términos a_1, a_4, a_7, a_8 y a_{10}.

$a_1 =$ $a_4 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_{10} =$

3 Dada la sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, …, ¿cómo son todos los términos que ocupan las posiciones pares? ¿Y los términos que ocupan las posiciones impares? Escribe los términos a_{18} y a_{23}.

$a_2, a_4, a_6, \ldots =$ $a_{18} =$

$a_1, a_3, a_5, \ldots =$ $a_{23} =$

4 Escribe los 3 términos que siguen en la sucesión: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, …

5 Escribe los 4 términos que siguen en la sucesión: 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, …

CALCULAR TÉRMINOS EN UNA SUCESIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN

Existen sucesiones que siguen una regla definida en su formación, es decir, un orden lógico que nos ayuda a obtener el siguiente término. Cuando esto ocurre se puede determinar una fórmula que permite calcular cualquier término a partir del lugar que ocupa en la sucesión.

A esta fórmula se le llama **término general**.

EJEMPLO

En la sucesión 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … podemos observar que, en las posiciones pares, el valor es 2; sin embargo, en las posiciones impares se van alternando los valores 3 y 1:

3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, …

Cuando n es par, su valor es 2:

$a_2 = 2$
$a_4 = 2$
$a_6 = 2$
$a_8 = 2$

Cuando n es impar, su valor es 3 o 1:

$a_1 = 3$
$a_3 = 1$
$a_5 = 3$
$a_7 = 1$

EJEMPLO

Halla el término general de la sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

En esta sucesión, para pasar de un término al siguiente se suma 2:

$$a_1 = 2 = \longrightarrow 1 \cdot 2$$
$$a_2 = 4 = 2 + 2 = \longrightarrow 2 \cdot 2$$
$$a_3 = 6 = 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 3 \cdot 2$$
$$a_4 = 8 = 2 + 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 4 \cdot 2$$
$$\downarrow$$
$$a_9 = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \cdot 2$$
$$\downarrow$$
$$a_n = n \cdot 2$$

La fórmula $a_n = 2n$ se llama término general de la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12, … y representa la sucesión de todos los números pares.

Conocido el término general, se puede calcular cualquier término de la sucesión, sabiendo la posición que ocupa. Así, para hallar el término que ocupa la posición 71, basta con sustituir n por 71:

$$a_{71} = 71 \cdot 2 = 142$$

6 Para la sucesión del ejemplo anterior, calcula los términos que ocupan la posición 12, 18 y 21.

$a_{12} =$

$a_{18} =$

$a_{21} =$

CALCULAR TÉRMINOS EN UNA SUCESIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

7 Sea $a_n = 4n + 1$ el término general de una sucesión. Calcula el término a_{25}.

8 Escribe los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 6n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

b) $a_n = 4 + 7n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

c) $a_n = 5^n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

9 Escribe una fórmula que exprese el término general de una sucesión, y calcula el valor de los términos 13, 25 y 64 de esa sucesión.

EJEMPLO

Halla el término general de la sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Esta sucesión va alternando los valores 1 y 0, de forma que no podemos obtener un único término general. Por tanto, escribiremos un término general para los términos pares y otro para los términos impares:

$a_n = 1$, si n es impar.

$a_n = 0$, si n es par.

10 Calcula el término general de la sucesión: 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...

IDENTIFICAR PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado **diferencia** de la progresión, que se representa por ***d***.

El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

EJEMPLO

Dada la sucesión 3, 8, 13, 18, 23, 28, …, vemos que es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 5 unidades al anterior, es decir, la diferencia es $d = 5$.

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 8 = 3 + 5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1 \cdot 5$

$a_3 = 13 = 8 + 5 = 3 + 5 + 5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 5$

$a_4 = 18 = 13 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 5$

$a_5 = 23 = 18 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 5$

$a_6 = 28 = 23 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_6 = 3 + 5 \cdot 5$

El término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2$.

ACTIVIDADES

1 La siguiente sucesión es aritmética: 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, … Halla la diferencia y el término general.

La sucesión es aritmética, porque cada término se obtiene sumando $\boxed{}$ al anterior.

Por tanto, la diferencia es $d = \boxed{}$.

Hallamos el término general:

$a_1 = 10 \longrightarrow a_1 = 10$

$a_2 = 8 = 10 - 2 \longrightarrow a_2 = 10 + 1 \cdot (-2)$

$a_3 = 6 = 10 - 2 - 2 \longrightarrow a_3 = 10 + 2 \cdot (-2)$

$a_4 = 4 = 10 - 2 - 2 -$ .... $\longrightarrow a_4 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_5 = 2 = 10 -$ .... − .... − .... − .... $\longrightarrow a_5 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_6 = 0 = 10 -$ .... − .... − .... − .... − .... $\longrightarrow a_6 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

$a_7 = -2 = 10 -$ .... − .... − .... − .... − .... − .... $\longrightarrow a_7 = 10 + \boxed{} \cdot (-2)$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

IDENTIFICAR PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

2 Considera la sucesión: 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5, … Halla la diferencia y el término general.

La sucesión es aritmética, porque cada término se obtiene sumando $\boxed{}$ al anterior.

Por tanto, la diferencia es $d = \boxed{}$.

Hallamos el término general:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 4{,}5 = 3 + 1{,}5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1{,}5$

$a_3 = 6 = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 1{,}5$

$a_4 = 7{,}5 = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 1{,}5$

$a_5 = 9 = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 1{,}5$

$a_6 = 3 + 5 \cdot 1{,}5$

$a_7 = \boxed{}$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

3 Considera la sucesión: 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

a) ¿Es una progresión aritmética? Si es así, ¿cuál es su diferencia?

b) Calcula su término general.

c) Halla el término 42.

4 Dada la sucesión: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \dots$

a) Comprueba que es una progresión aritmética.

b) Calcula su término general.

c) Halla los términos 25 y 76.

5 Escribe una progresión aritmética que tiene como primer término $a_1 = 6$ y la diferencia es 4.

6, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, …

IDENTIFICAR PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

EJEMPLO

¿Cuál es el tercer término de una sucesión aritmética donde el término 7 es 17 y la diferencia es 1,5?

Se puede proceder de dos formas:

1.ª FORMA: Como la diferencia es 1,5, avanzamos hacia atrás restando 1,5, hasta obtener el valor del tercer término.

+1,5 +1,5 +1,5 +1,5

		?				17	

−1,5 −1,5 −1,5 −1,5

2.ª FORMA: Como conocemos la fórmula general de las progresiones aritméticas, la aplicamos al término 7 para hallar el término 1.

Fórmula general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Fórmula aplicada al término 7: $a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 1{,}5$

$17 = a_1 + 6 \cdot 1{,}5$

$a_1 = 8$

Conociendo el primer término, sumamos la diferencia, $d = 1{,}5$, hasta obtener el término 3:

$a_1 = 8$

$a_2 = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$

$a_3 = 9{,}5 + 1{,}5 = 11$

6 ¿Cuál es el quinto término de una sucesión cuyo término 24 es 233 y la diferencia es 1,2?

				?	....	233

Hay demasiada distancia entre los dos términos para utilizar la primera forma; por tanto, la segunda forma es más efectiva.

				?	....	233

$a_{24} = a_1 + 23 \cdot d$

$233 = a_1 + 23 \cdot 1{,}2$

$233 = a_1 + \boxed{}$

$233 - \boxed{} = a_1$

$\boxed{} = a_1$

$a_5 = a_1 + 4 \cdot d$

$a_5 = \boxed{} + 4 \cdot 1{,}2$

$a_5 = \boxed{}$

IDENTIFICAR PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

SUMA DE LOS *n* PRIMEROS TÉRMINOS

La **suma de los *n* primeros términos** de una progresión aritmética se calcula con la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EJEMPLO

Calcula la suma de los cinco primeros términos de una sucesión aritmética sin usar la fórmula y luego comprueba que el resultado se ajusta a la fórmula.

Sea la progresión aritmética formada por los números: 3, 8, 13, 18, 23, …

- Sumamos los 5 términos: $S_5 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23$
- Los ordenamos de atrás hacia delante: $S_5 = 23 + 18 + 13 + 8 + 3$
- Sumamos las dos expresiones obtenidas:

$$\begin{array}{rl} S_5 = & 3 + 8 + 13 + 18 + 23 \\ + \quad S_5 = & 23 + 18 + 13 + 8 + 3 \\ \hline 2S_5 = & 26 + 26 + 26 + 26 + 26 \end{array}$$

$$2S_5 = 5 \cdot 26 \rightarrow S_5 = \frac{5 \cdot 26}{2}$$

- Aplicamos la fórmula general: $S_5 = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2}$
- Igualamos ambas expresiones: $\dfrac{5 \cdot 26}{2} = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2} \longrightarrow a_1 + a_5 = 26$
- Comprobamos el resultado: $a_1 = 3, a_5 = 23 \rightarrow a_1 + a_5 = 3 + 23 = 26$

EJEMPLO

Calcula la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética: 3, 7, 11, 15, 19, …

- Calculamos el término general:
  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ $\qquad a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$
- Obtenemos el término a_{20}: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 4 = 79$
- Aplicamos la fórmula general: $S_{20} = \dfrac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$

7 En una progresión aritmética, $a_4 = 21$ y $d = -2$.

a) Calcula a_1 y el término general.

b) Suma los 30 primeros términos.

IDENTIFICAR PROGRESIONES GEOMÉTRICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números tal que cada uno de ellos (menos el primero) es igual al anterior multiplicado por un número fijo llamado **razón**, que se representa por ***r***.

El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

EJEMPLO

Dada la sucesión 5, 10, 20, 40, 80, 160, …, vemos que es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2 unidades, es decir, la razón es $r = 2$.

$a_1 = 5 \longrightarrow a_1 = 5$

$a_2 = 10 = 5 \cdot 2 \longrightarrow a_2 = 5 \cdot 2$

$a_3 = 20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_3 = 5 \cdot 2^2$

$a_4 = 40 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_4 = 5 \cdot 2^3$

$a_5 = 80 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_5 = 5 \cdot 2^4$

$a_6 = 160 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_6 = 5 \cdot 2^5$

El término general es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$

ACTIVIDADES

1 La siguiente sucesión es geométrica: 3, 15, 75, 375, 1875, 9375, … Halla la razón y el término general.

La sucesión es geométrica, porque cada término se obtiene multiplicando por $\boxed{}$ el anterior.

Por tanto, la razón es $r = \boxed{}$.

Hallamos el término general:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 15 = 3 \cdot 5 \longrightarrow a_2 = 3 \cdot 5$

$a_3 = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_3 = 3 \cdot 5^2$

$a_4 = 375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_4 = 3 \cdot 5^3$

$a_5 = 1875 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_5 = 3 \cdot 5^4$

$a_6 = 9375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_6 = 3 \cdot 5^5$

El término general es:

$a_n = \boxed{}$

2 Escribe los 6 primeros términos de la progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = 6$.

El término general es: $a_n =$

Los 6 primeros términos son:

$a_1 = 2$ $a_2 =$ $a_3 =$

$a_4 =$ $a_5 =$ $a_6 =$

IDENTIFICAR PROGRESIONES GEOMÉTRICAS Y CALCULAR SUS ELEMENTOS

Nombre: Curso: Fecha:

SUMA DE LOS *n* PRIMEROS TÉRMINOS

La suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica se calcula con la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

EJEMPLO

Suma los 10 primeros términos de la progresión geométrica cuyo término general viene dado por $a_n = 7 \cdot 3^{n-1}$.

- Calculamos a_1: $a_1 = 7 \cdot 3^{1-1} = 7 \cdot 3^0 = 7$
- Calculamos r: Para ello calculamos a_2 y vemos cuál es la razón entre a_1 y a_2: $a_2 = 7 \cdot 3^{2-1} = 7 \cdot 3 = 21$

  $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{21}{7} = 3$
- Aplicamos la fórmula de la suma: $S_{10} = \frac{7(3^{10} - 1)}{3 - 1} = 206\,668$

3 Calcula la suma de los cinco primeros términos de la sucesión geométrica 2, −4, 8, −16, 32, −64,… sin usar la fórmula y luego comprueba que el resultado se ajusta a la fórmula.

4 Realiza las sumas indicadas.

a) De los 15 primeros términos para $a_n = (-1) \cdot 4^{n-1}$

b) De los 12 primeros términos para $a_n = 10 \cdot (-1)^{n-1}$

IDENTIFICAR LOS ELEMENTOS QUE INTERVIENEN Y CALCULAR EL INTERÉS COMPUESTO

Nombre: Curso: Fecha:

Un **interés compuesto** es cuando depositamos un capital durante un período de tiempo, t, a un rédito, r %, y, al finalizar cada período de inversión, los intereses se añaden al capital.

El capital final, C_f, obtenido al invertir un capital, C, a interés compuesto es:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \text{ (} t \text{ tiempo en años)}$$

EJEMPLO

Daniela contrata un servicio del banco por el que le dan un rédito de un 1,2 % de interés compuesto anual. Si Daniela deposita 3000 €, ¿cuánto dinero tendrá después de 5 años?

Sabemos que $C = 3000$, que $r = 1,2$ y que $t = 5$. Aplicamos la fórmula para calcular el capital final:

$$C_f = 3000 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^5 = 3000 \cdot 1,012^5 = 3184,37 \text{ €}$$

ACTIVIDADES

1 Halla el interés compuesto en los siguientes casos:

a) $C = 1000$ $r = 2$ $t = 10$

b) $C = 5500$ $r = 0,9$ $t = 4$

2 Bruno contrata durante 3 años un producto bancario por el que obtiene un beneficio de un 3% de interés compuesto anual. Inicialmente deposita sus ahorros que son 10000 euros. ¿Cuánto dinero tendrá al acabar el contrato?

3 Lara tiene 500 euros y quiere dejarlos en el banco durante un tiempo, pero no sabe qué producto contratar. Uno que tiene un 4% de interés anual, pero solo se puede contratar durante 2 años. U otro en el que el interés es de un 2,2% durante 5 años. ¿Con cuál obtendrá más beneficios?