Ecuación

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o *incógnitas*, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Cuando esta igualdad es cierta para cualquie3r valor de la incógnita recibe el nombre de *Identidad.*

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\text{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Los elementos de una ecuación son:

- *Miembro:* Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- *Término:* Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
- *Término Independiente:* Es aquel que no tiene parte literal.
- Incógnita: Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular. (Se suelen representar con x)
- *Grado:* Es el mayor de los grados de sus términos

Si en la igualdad aparecen polinomios de primer grado, diremos que la ecuación es de primer grado, y si aparecen polinomios de segundo grado, diremos que se trata de una ecuación de segundo grado.

$$\underbrace{6x+5=7x-3}_{\text{Ecuación de primer grado}} \qquad \underbrace{5x^2+2x-5=4x-7}_{\text{Ecuación de segundo grado}}$$

Dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen la misma solución.

Ejemplo:
$$\begin{cases} 3x+1=9-x & \rightarrow & x=2 \\ 4x=8 & \rightarrow & x=2 \end{cases}$$

Transformaciones de ecuaciones

Reducir los términos de una ecuación es agrupar los monomios semejantes, las x con las x y los números con los números:

$$2x+3+5x=-9-4x+2x \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Reducción de}} 7x+3=-9-2x$$

Trasponer los términos de una ecuación es pasar todas las x a un miembro y todos los números al otro (normalmente las x al primer miembro y los números al segundo), sabiendo que al cambiar de miembro, en éste realiza la operación inversa que hacía en el otro.

Lo que está sumando (o restando) en un miembro, pasa al otro miembro de la ecuación restando (o sumando) y viceversa:

$$\underbrace{7x+3=-9-2x \xrightarrow{\text{Trasponemos}} 7x\underbrace{+2x}_{\text{cambia de signo}}=-9\underbrace{-3}_{\text{cambia de signo}}}_{\substack{\text{El 3 que suma en el primer miembro, pasa al segundo restando.}\\ \text{El -2x que está restando en el segundo miembro, pasa al primero sumando.}}}$$

Lo que está multiplicando (o dividiendo) en un miembro, pasa al otro miembro dividiendo (o multiplicando) y viceversa:

$$\underbrace{9\cdot x=-12 \rightarrow x=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}}_{\text{El 9 que multiplica en el primer miembro, pasa dividiendo al segundo}}$$

$$\underbrace{\frac{y}{4}=5 \rightarrow y=5\cdot 4=20}_{\text{El 4 que divide en el primer miembro, pasa multiplicando al segundo}}$$

Ecuaciones de primer grado

Las *ecuaciones de primer grado* son de la forma $ax+b=c$, donde a es el coeficiente principal, b el término independiente y x es la incógnita.

La solución de dicha ecuación viene dada por la expresión:

$$ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

Ejemplo:

$$2x+3(2x-1)=x+67 \xrightarrow[\text{Paréntesis}]{\text{Rompemos}} 2x+6x-3=x+67$$

$$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 8x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 8x-x=67+3$$

$$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 7x=70 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x=\frac{70}{7}=10 \xrightarrow{\text{Solución}} x=10$$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, multiplicaremos los dos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow m.c.d.(3,2,6)=6 \rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3(13-2x)}{6}=\frac{2}{6}$$

$$\rightarrow 2x-3(13-2x)=2 \qquad 2x-38+6x=2 \rightarrow 8x-38=2$$

$$\rightarrow 8x=38+2 \rightarrow 8x=40 \rightarrow x=\frac{40}{8}=5$$

Ecuaciones de segundo grado

Las *ecuaciones de segundo grado* son de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

Donde a es el coeficiente del término de 2º grado, b el del término de primer grado y c el término independiente.

Las soluciones vienen dadas por la expresión: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

Decimos que una *ecuación de segundo grado es completa* si los coeficientes a,b,c son todos números distintos de cero.

Ejemplo:

$$x^2+5x-6=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2} \rightarrow x=\frac{-5\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-5+7}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-5-7}{2}=\dfrac{-12}{2}=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-6 \end{cases}$$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Decimos que una *ecuación es incompleta si* alguno de los coeficientes *a, b,* o *c* es nulo.

$$\underbrace{ax^2+bx=0}_{\text{Falta el término independiente}} \qquad \underbrace{ax^2+c=0}_{\text{Falta el término en x}}$$

Para resolverlas, en el caso de que falte el término independiente sacaremos factor común, y en el caso de que falte el término en x, calcularemos la x haciendo la raíz cuadrada. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

$$x^2+5x=0 \rightarrow x(x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \end{cases}$$

$$x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Problemas de ecuaciones

Para resolver un problema de ecuaciones debemos seguir esta receta:

1) Lectura y comprensión del enunciado.
2) Asignar la incógnita x.
3) Plantear la ecuación ayudándonos del lenguaje algebraico.
4) Resolver la ecuación con precisión.
5) Analizar la solución de la ecuación en el problema y verificarla.
6) Dar respuesta a la pregunta o preguntas planteadas.

> *Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta traducir dicho problema del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, o sea, a una ecuación.*
>
> *Isaac Newton*

Problemas de Edades

En este tipo de problemas se recomienda el uso de una tabla para el planteamiento de la ecuación. En la mayoría de ellos que considerar tres tiempos: presente, pasado y futuro. Las relaciones entre los datos y las incógnitas se refieren siempre a éstos. Esquemáticamente:

Pasado	Presente	Futuro
Hace t años	Ahora	Dentro de t años
x-t	x	x+t
y-t	y	y+t
z-t	z	z+t

La edad actual de Sergio es el doble que la de su hermana Raquel, pero hace 10 años la edad de Sergio era el triple que la de Raquel. ¿Cuántos años tienen actualmente cada uno?

Si llamamos x a la edad de Raquel y recogemos los datos en una tabla:

	Edad Actual	Hace 10 años
Raquel	x	x-10
Sergio	2x	2x-10

Ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{2x-10}_{\text{Hace 10 años la edad de Sergio}} = \underbrace{3(x-10)}_{\text{Será el triple de la edad de Raquel}}$$

Cuya solución es:

$$2x-10=3(x-10) \rightarrow 2x-10=3x-30$$
$$2x-3x=-30+10 \rightarrow -x=-20 \rightarrow x=20$$

Por tanto, la edad actual de Raquel es 20 años y la de Sergio es 40.

Problemas de mezclas

En ellos nos ayudaremos de una tabla que rellenaremos con los datos del enunciado y en la que colocamos la incógnita x en alguna de las variables. No podemos olvidar que la cantidad de mezcla siempre es la suma de las cantidades a mezclar y que la ecuación la plantearemos con la columna total, en la que:

$$\text{Total}_1 + \text{Total}_2 = \text{Total}_{\text{Mezcla}}$$

Mezclamos 600 gramos de oro con una pureza del 80 % con 550 g de otro oro con un 95 % de pureza. ¿Qué pureza tendrá la mezcla de oro resultante?

Si recogemos los datos en una tabla:

	Cantidad (gr)	Pureza (%)	Total
Au I	600	80	(600·80) = 48.000
Au II	550	95	(550·95) = 52.250
Mezcla	600+550 = 1.150	X	1.150 · X

Recuerda que la columna total se consigue multiplicando cantidad por precio, y la cantidad de mezcla se obtiene sumando ambas cantidades de oro.

Para escribir la ecuación correspondiente haremos siempre:

$$T_{Mezcla} = T_{\text{Oro I}} + T_{\text{Oro II}}$$

Por tanto:

$$1.150 \cdot x = 48.000 + 52.250 \rightarrow x = \frac{100.250}{1.150} = 87,2\%$$

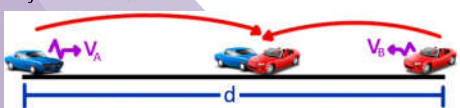
La pureza del Au resultante es del 87,2 %.

Problemas de móviles

En los problemas de móviles, trabajaremos con las ecuaciones del MRU, movimiento rectilíneo y uniforme:

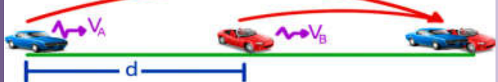
$$v=\frac{e}{t} \rightarrow e=v\cdot t \rightarrow t=\frac{e}{v} \rightarrow \text{donde}: \begin{cases} e = espacio \\ v = velocidad \\ t = tiempo \end{cases}$$

En un encuentro, los vehículos salen de distintos puntos y se encuentran entre ellos. En este tipo de ejercicios $e_1+e_2=d$



El tiempo de encuentro viene dado por: $t_e = \dfrac{d}{v_A+v_B}$

En un alcance, los vehículos salen del mismo sitio, uno más tarde que el otro.



El tiempo de encuentro en este caso viene dado por: $t_e = \dfrac{d}{v_A-v_B}$

Un malhechor escapa a 70 km/h, y 90 km más atrás le persigue la policía a 85 km/h. ¿Cuándo y dónde le alcanzarán?

Si llamamos x a la distancia que recorre el malhechor, entonces, 90+x será la distancia que recorre la policía.

Como salen a la vez, llamaremos t al tiempo que tardan en encontrarse, y con la ecuación de la velocidad:

$$v=\frac{e}{t} \rightarrow t=\frac{e}{v}= \rightarrow t_M=\frac{x}{70} \quad y \quad t_P=\frac{x+90}{85}$$

Como los tiempos son iguales, igualamos ambas expresiones:

$$t_M=t_P \rightarrow \frac{x}{70}=\frac{x+90}{85} \rightarrow x=420\ km$$

Y el tiempo que la policía tarda en alcanzar al malhechor es:

$$t_P=\frac{x+90}{85}=\frac{420+90}{85}=\frac{510}{85}=6\ horas$$

Se encuentran a 420 km de C, o a 510 km de A. 6 horas después.

Problemas de Grifos

En el enunciado de este tipo de problemas se presentan siempre una serie de sujetos" que realizan *labores* que se pueden acumular (grifos que llenan un depósito; máquinas que realizan un mismo trabajo; obreros que realizan una obra, etc ...).

Los datos e incógnitas siempre se refieren a los tiempos que cada uno por separado o todos juntos realizan dicha labor. El "truco" para plantear el problema radica en considerar la parte de la labor que realiza, en la unidad de tiempo, cada "sujeto" y todos juntos; la parte que realizan todos juntos es la suma de la parte de labor que realiza cada uno de los sujetos.

Supongamos que tenemos dos grifos para llenar un depósito:

- *El **grifo 1** tarda t_1 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1/t_1$*
- *El **grifo 2** tarda t_2 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1/t_2$*

Si el depósito tiene un desagüe:

- *El **desagüe** tarda t_3 horas en vaciarlo, en una hora vaciará: $1/t_3$*

Si todos juntos tardan en llenarlo T horas, en una hora llenarán: $1/T$

Para calcular alguna de las variables, procederemos de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{T}}_{\text{Sin desagüe}} \qquad \underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}=\frac{1}{T}}_{\text{Con desagüe}}$$

Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Si llamamos x al tiempo que tardan en llenar el depósito los dos grifos con el desagüe abierto, $1/x$ será lo que llenan ambos grifos durante 1 hora.

Si el grifo A tarda en llenarlo 2 horas, en 1 hora llenará: 1/2 del depósito.
Si el grifo B tarda 3 horas, en una hora llenará: 1/3 del depósito.
Si el desagüe lo vacía en 6 horas, en una hora vaciará: 1/6 del depósito.

Si sumamos la labor que hace cada uno en 1 hora eso será igual a lo que hacen todos a la vez:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \rightarrow \frac{5}{8}=\frac{1}{x} \rightarrow x=\frac{8}{5}=1,6\ horas$$

Por tanto, los dos grifos llenarán el depósito en 1 h y 36 min.

Se poseen dos cirios de igual altura que se encienden simultáneamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo la altura del primero será el doble del segundo, si se sabe que se consumen, el primero en 6 horas y el segundo en 4 horas?

Si llamamos x al tiempo que pasa hasta que la altura del primero sea el doble que la del segundo.

Si el primero se consume en 6 horas, en 1 hora se consumirá: 1/6, y en x horas lo hará x/6.

Si el segundo se consume en 4 horas, en 1 hora se consumirá: 1/4, y en x horas lo hará x/4.

Cuando pasen x horas, la altura del primero (1–x/6) será igual que el doble de la altura del segundo (1–x/4):

$$\left(1-\frac{x}{6}\right)=2\left(1-\frac{x}{4}\right) \rightarrow 1-\frac{x}{6}=2-\frac{x}{2} \rightarrow x=3$$

Por tanto, han de pasar 3 horas.