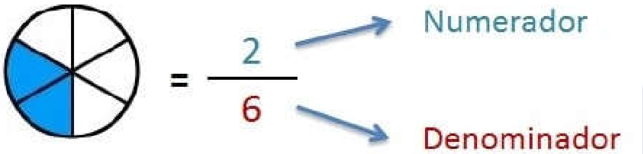
¿Qué sabes de...? Números Racionales

Números Racionales
Departamento de Matemáticas
http://selectividad.intergranada.com

Concepto de fracción

Una *fracción* es una expresión de la forma a/b en la que a es un número entero y b un número natural llamados numerador y denominador.

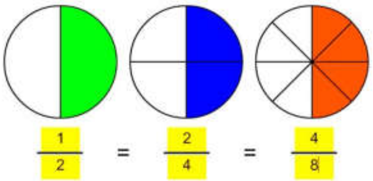


Y donde b representa el número de partes iguales en que se divide la unidad, y a el número de partes que se toman.

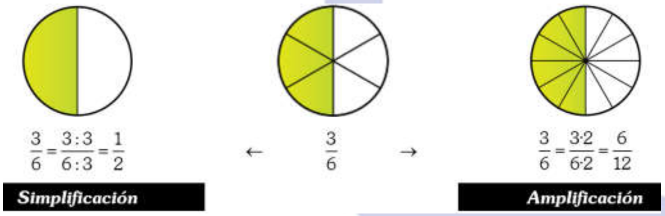
Decimos que una fracción es *propia* si el numerador es más pequeño que el denominador mientras que es *impropia* en el caso contrario.

Fracciones equivalentes

Decimos que dos *fracciones* son *equivalentes* cuando expresan la misma porción de unidad.



Para obtener fracciones equivalentes a otra dada se multiplican *(Método de Amplificación)*, o se dividen *(Método de Simplificación)*, los dos términos de una fracción por el mismo número.



Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva.

Para comprobar si dos fracciones son equivalentes basta con multiplicar en cruz y ver si obtenemos el mismo resultado.

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{8} \;\rightarrow\; \begin{matrix} 3 \times 8 = 24 \\ 4 \times 6 = 24 \end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Fracción Irreducible

La *fracción irreducible* de una fracción, es otra fracción equivalente a ella en la que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes. Es decir que la fracción no se puede simplificar más.

$$\frac{60}{90} \xrightarrow[\text{por 5}]{\text{Dividimos}} \frac{12}{18} \xrightarrow[\text{por 3}]{\text{Dividimos}} \frac{4}{6} \xrightarrow[\text{por 3}]{\text{Dividimos}} \frac{2}{3} \rightarrow \textit{Fracción irreducible}$$

La forma más rápida de conseguir la fracción irreducible de otra es dividir numerador y denominador por el mayor de todos sus divisores comunes, es decir, por el *máximo común divisor*.

$$\frac{60}{90} \rightarrow M.C.D\,(60,90) = 2·3·5 = 30 \rightarrow \frac{60}{90} = \frac{60:30}{90:30} = \frac{2}{3} \begin{cases} \textit{Fracción} \\ \textit{Irreducible} \end{cases}$$

Otra forma de saber si dos fracciones son equivalentes es ver si tienen la misma fracción irreducible.

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir varias fracciones a común denominador consiste en buscar fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Ese nuevo denominador será el *m.c.m.* de los antiguos denominadores.

Para calcular los nuevos numeradores dividiremos el nuevo denominador entre el antiguo y lo que de lo multiplicaremos por el antiguo numerador.

$$\textit{Nuevo numerador} = \frac{\text{Nuevo denominador}}{\text{antiguo denominador}} \text{ x } \textit{nuevo numerador}$$

Reduce a común denominador las fracciones 2/5 y 1/3

$$\frac{2}{5} \; y \; \frac{1}{3} \rightarrow m.c.m.(5,3) = 3·5 = 15 \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:5)·2}{15} = \frac{3·2}{15} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \\ \frac{1}{3} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:3)·1}{15} = \frac{5·1}{15} = \frac{5}{15} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \end{cases}$$

Comparación de fracciones

Comparar fracciones es ver cuál es más grande o más pequeña.

- ✓ *Si tienen el mismo denominador,* es mayor la fracción que tiene mayor el numerador.
- ✓ *Si tienen el mismo numerador* es mayor la que tiene menor denominador.
- ✓ *Si tienen distinto numerador y denominador*, se reducen primero a común denominador, y después se comparan los numeradores.

Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones, primero se reducen a común denominador (si fuera necesario) y, después, se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador. Si alguno de los sumandos es entero lo transformaremos en una fracción de denominador 1.

$$\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}_{m.c.m(4,5)=20} = \begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{4·1}{4·5} = \frac{4}{20} \\ \frac{3}{4} = \frac{5·1}{5·4} = \frac{5}{20} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{9}{20}$$

Siempre que se opere con fracciones tenemos *que dar el resultado en la fracción irreducible,* por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá porque si no lo haces tú profesor te bajará la nota.

Producto de fracciones

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \begin{matrix} \leftrightarrow \text{Se multiplican los numeradores.} \\ \leftrightarrow \text{Se multiplican los denominadores.} \end{matrix}$$

$$\frac{7}{4}·\frac{15}{10} \underset{\text{Simplificamos antes de operar}}{=} \frac{7}{4}·\frac{15:5}{10:5} = \frac{7}{4}·\frac{3}{2} = \frac{7·3}{4·2} = \frac{21}{8} \qquad 3·\frac{4}{7} = \frac{3}{1}·\frac{4}{7} = \frac{3·4}{1·7} = \frac{12}{7}$$

Cociente de fracciones

El cociente de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y como denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \leftrightarrow \text{Se multiplican los términos cruzados.}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8·5}{15·4} = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{6} : 6 = \frac{2}{6} : \frac{6}{1} = \frac{2·1}{6·6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Potencia de una fracción

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos el numerador y el denominador a esa potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \overbrace{\frac{a}{b}·\frac{a}{b}·\frac{a}{b}·\ldots\ldots·\frac{a}{b}}^{c\ veces} = \frac{a^c}{b^c} \qquad \textit{ejemplo}: \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \overbrace{\frac{2}{3}·\frac{2}{3}·\frac{2}{3}}^{3\ veces} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Raíz Cuadrada de una fracción

Para hacer la raíz cuadrada a una fracción, haremos la raíz cuadrada al numerador y también al denominador:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \textit{ejemplo}: \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

Operaciones Combinadas con fracciones

Al igual que con las operaciones combinadas de números naturales y enteros, para realizar operaciones con fracciones hay que seguir el orden de prioridad en las operaciones:

Octubre de 2021

Orden de prioridad en las operaciones

1. *Efectuar las operaciones entre paréntesis y corchetes del interior al exterior.*
2. *Efectuar las potencias y raíces (si las hubiera).*
3. *Efectuar los productos y cocientes.*
4. *Realizar las sumas y restas.*

Cuando tengamos operaciones de igual prioridad se ejecutan de manera natural, es decir, de izquierda a derecha.

a) $$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)=\underbrace{\left[\left(\frac{6}{9}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2\right]}_{\text{Primero hacemos el corchete y dentro de él los paréntesis}}:\left(-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]}_{\text{Antes de sumar tenemos que hacer la potencia}}:\left(-\frac{2}{3}\right)=\underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\right]}_{\text{después el producto}}:\left(-\frac{2}{3}\right)=\underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{13}{9}\right)\right]}_{\text{ahora sumamos}}:\left(-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\underbrace{\left[\frac{18}{9}\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{ahora dividimos}}=2:\left(-\frac{2}{3}\right)=\underbrace{\frac{-6}{2}}_{\text{y simplificamos si se puede}}=-3$$

b) $$\sqrt{-\frac{5}{9}+1}\cdot\left(-2+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot(-2)^2=\underbrace{\sqrt{-\frac{5}{9}+1}}_{\text{Resolvemos la raíz}}\cdot\underbrace{\left(-2+\frac{5}{4}\right)}_{\text{Hacemos el paréntesis}}-\underbrace{\left(\frac{1}{4}-1\right)}_{\text{Hacemos el paréntesis}}\cdot(-2)^2=$$

$$=\underbrace{\sqrt{-\frac{5}{9}+\frac{9}{9}}}_{\text{Haciendo mcm}}\cdot\left(-\frac{8}{4}+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{4}\right)\cdot 4=\underbrace{\sqrt{\frac{4}{9}}}_{\text{Raíz}}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 4=\underbrace{\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{4}\right)}_{\text{Operamos y simplificamos}}+\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}=$$

$$=-\frac{1}{2}+3=-\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{5}{2}$$

Números Decimales

Los números decimales son los números existentes entre dos números enteros. Cualquier número decimal tiene una parte entera, situada a la izquierda de la coma, y una parte decimal, situada a la derecha.

Existen varios tipos de decimales, pero en este curso nos centraremos sólo en dos:

 Decimales exactos: Son aquellos que tienen un número limitado de cifras decimales.

$$\frac{9}{8}=1,\underbrace{125}_{\text{3 cifras decimales}}\qquad \frac{3}{10000}=0,\underbrace{0003}_{\text{4 cifras decimales}}$$

 Decimales periódicos: Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que se repiten de forma periódica. Llamamos periodo al número o números que se repiten. Pueden ser de dos tipos:

Periódico Puro: Si lo que se repite (periodo) empieza justo después de la coma.

$$0,\hat{3}=0,\underbrace{3}_{Periodo}\ 33333333....\qquad 1,\underbrace{125}_{Periodo}125125.....\qquad 5,\underbrace{75}_{Periodo}\ 757575757575...$$

Todos los periodos empiezan justo después de la coma

Periódico mixto: Si lo que se repite, no empieza justo después de la coma si no que lo hace varios lugares después.

$$0,5\hat{3}=0,5\ \underbrace{3}_{Periodo}\ 33333333....\qquad 1,52\ \underbrace{125}_{Periodo}125125.....\qquad 5,999\ \underbrace{75}_{Periodo}\ 757575...$$

Los periodos empiezan varios lugares después de la coma

Llamamos anteperiodo a los números entre la coma y el periodo. En los números anteriores, los anteperiodos serían: 5, 52 y 999.

La Fracción generatriz

La fracción generatriz de un número decimal es la fracción irreductible que da como resultado dicho número decimal.

 Para pasar un *número decimal exacto a fracción*, se escribe en el numerador el número decimal sin coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

$$0,3=\frac{3}{10}\qquad 0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\qquad 3,124=\frac{3124}{1000}=\frac{781}{250}$$

 Para pasar un número decimal periódico fracción, en el numerador, se escribe primero el número decimal sin coma (hasta el final del periodo) y se le resta la parte hasta el periodo, también sin coma. En el denominador pondremos tantos 9 como cifras tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras tenga el anteperiodo.

$$3,252525..=3,\overset{\frown}{25}=\frac{325-3}{99}=\frac{322}{99}\qquad 0,611111111...=0,6\hat{1}=\frac{61-6}{90}=\frac{55}{90}=\frac{11}{18}$$

Resolución de Problemas con fracciones

 En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

a) Lectura y comprensión del enunciado. (Ayúdate con un dibujo)
b) Análisis de los datos del enunciado.
c) Plantear las operaciones y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad y de forma correcta.
d) Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
e) Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

Las tres quintas partes de los alumnos de mi clase nos vamos de excursión. Si en el autobús somos veinticuatro alumnos, tres profesores y el conductor. ¿Cuántos alumnos hay en mi clase?

El enunciado dice que los $\frac{3}{5}$ de los alumnos son 24 alumnos,

Entonces $\frac{1}{5}$ (que es la tercera parte de $\frac{3}{5}$) de los alumnos serán 8 alumnos (que es la tercera parte de 24)

Y por tanto los $\frac{5}{5}$ que son todos los alumnos de la clase serán $5\cdot 8=40$ alumnos (que son 5 veces 1/5)

Por tanto, en la clase hay 40 alumnos.

De los vecinos de Carmen, 2/7 son andaluces y la cuarta parte de éstos son de Cádiz. Sabiendo que hay seis gaditanos. ¿Cuántos vecinos hay en su edificio?

Si la cuarta parte de dos séptimos son de Cádiz, entonces:

$$\frac{1}{4}\,de\,\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$$

Si los gaditanos son 6 y representan 1/14, entonces los vecinos son:

$$\frac{1}{14}\,son\ 6\quad\rightarrow\quad\frac{14}{14}\ son\ 14\cdot 6=84$$

Por tanto, Carmen tiene 84 vecinos.

Una amiga me pidió que le pasase un escrito al ordenador. El primer día pasé ¼ del trabajo total. El segundo día 1/3 de lo restante. El tercer día 1/6 de lo que faltaba, y el cuarto lo terminé pasando 30 folios. ¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el escrito?

1) El primer día un cuarto del trabajo: $\frac{1}{4}$

Quedan ¾

2) El segundo día 1/3 de lo que queda: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

Entre los dos días: 1) + 2) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Por tanto, **quedan 1/2**

3) El tercer día 1/6 de lo que queda: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Así que, entre los dos días: 1) + 2) +3) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$

Por tanto, **al final quedan 5/12**

4) El cuarto día hace las últimas 30 páginas que representan 5/12 Por lo que:

$$\frac{5}{12}\,son\ 30\quad\rightarrow\quad\frac{1}{12}\,son\ \frac{30}{5}=6\quad\rightarrow\quad\frac{12}{12}\,son\ 6\cdot 12=72$$

Y entonces el trabajo tiene 72 folios.