8 Lugares geométricos. Figuras planas

- **PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS**
  - PARALELOGRAMOS Y TRIÁNGULOS
  - POLÍGONOS REGULARES
  - POLÍGONOS CUALESQUIERA

- **PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES**
  - LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA
  - LONGITUD DE UN ARCO
  - ÁREA DEL CÍRCULO
  - ÁREA DE FIGURAS CIRCULARES

- **ÁNGULOS EN FIGURAS PLANAS**
  - ÁNGULOS EN POLÍGONOS
  - ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

La riqueza de los sabios

Aquella fue la gota que colmó el vaso: su propia madre le reprochaba que siendo tan sabio no fuera igualmente rico. La chanza no era nueva pero a Tales de Mileto le dolió como nunca. Se encerró en casa y comenzó a fraguar su plan.

Sus estudios de los astros le permitieron predecir un perfecto año para el cultivo. Así que reuniendo todo el dinero del que disponía y aun el que, en secreto, pudo pedir prestado, se hizo con el control de todas las prensas de aceite de Mileto y su vecina Quíos.

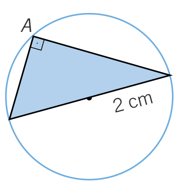
Su predicción sobre el clima fue acertada, y sus vecinos se frotaban las manos pensando en los beneficios de la cosecha de aceituna. Pero cuando fueron a moler las aceitunas sus sonrisas se tornaron en muecas, pues hubieron de pagar lo estipulado por Tales.

Cumplida su pequeña venganza, y además convertido en rico, vendió las prensas y las tierras y se dedicó a sus estudios de filosofía y matemáticas, no sin antes decirle a sus vecinos: «Tomad para vosotros los consejos que dais a otros».

Uno de los postulados de Tales es que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es siempre un ángulo recto.

¿Cómo construirías un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 4 cm?

Con un compás trazamos una circunferencia de radio 2 cm y señalamos en ella uno de sus diámetros, que medirá 4 cm, y que es la hipotenusa. Después, tomamos cualquier punto de la circunferencia (que no pertenezca al diámetro), **A*****, y uniendo el punto con los extremos del diámetro formamos el triángulo rectángulo.***



Lugares geométricos. Figuras planas

EJERCICIOS

001 **Dibuja en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos que cumplen estas condiciones.**

a) Equidistan de los extremos de un segmento de 6 cm de longitud.

b) Equidistan de los lados de un ángulo de 90°.

c) Están a 2 cm del punto *P*.

a) El lugar geométrico es la mediatriz de un segmento de longitud 6 cm.

b) El lugar geométrico es la bisectriz de un ángulo de 90°.

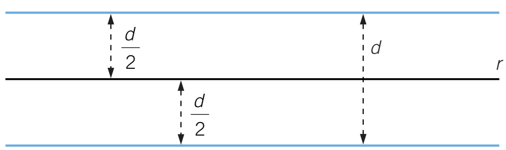
c) El lugar geométrico es una circunferencia de radio 2 cm y centro *P*.

002 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta.**

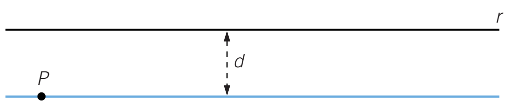
Los puntos que equidistan de una recta son dos rectas paralelas que están a la misma distancia de la recta inicial.

003 **Define las rectas rojas como lugar geométrico.**

a)



b)

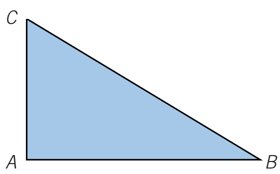


a) Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia $\frac{d}{2}$ de la recta *r*.

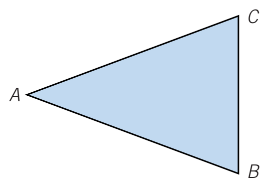
b) Es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia *d* de *r* y que están alineados con el punto *P*, formando una recta con él.

004 **Dibuja la circunferencia circunscrita a estos triángulos.**

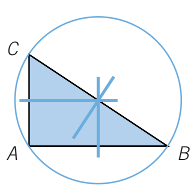
a)



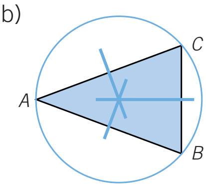
b)



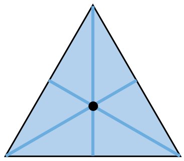
a)



b)



005 **Dibuja un triángulo equilátero y determina su baricentro y su circuncentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?**



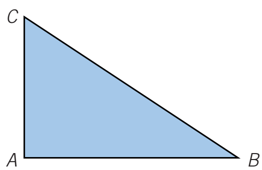
El baricentro y el circuncentro coinciden en cualquier triángulo equilátero, ya que las mediatrices coinciden con las medianas.

006 **Define el baricentro como lugar geométrico.**

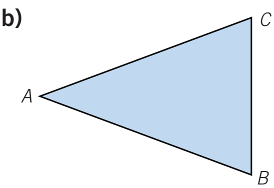
El baricentro es el lugar geométrico de los puntos que están a doble distancia de los vértices que de sus lados opuestos.

007 **Dibuja la circunferencia inscrita de estos triángulos.**

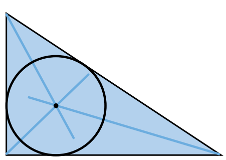
a)



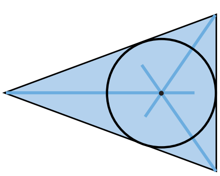
b)



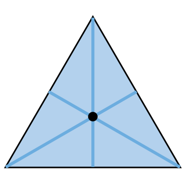
a)



b)



008 **Dibuja un triángulo equilátero y determina su ortocentro y su incentro. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo en cualquier triángulo equilátero?**



El ortocentro y el incentro coinciden en cualquier triángulo equilátero, ya que las bisectrices coinciden con las alturas.

009 **Define la circunferencia inscrita como lugar geométrico.**

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al incentro es igual que la distancia del incentro a cualquiera de los lados del triángulo.

010 **Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 24 cm.**

$$a = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1.600} = 40 \text{ cm}$$

011 **Evalúa si las siguientes medidas determinan los lados de un triángulo rectángulo.**

a) 8 cm, 5 cm y 4 cm **b) 10 cm, 8 cm y 6 cm**

a) No es rectángulo, ya que $8^2 \neq 5^2 + 4^2$.

b) Sí es rectángulo, porque $10^2 = 8^2 + 6^2$.

012 **Calcula el tercer lado de un triángulo rectángulo del que conocemos los otros dos: 28 cm y 21 cm.**

Si suponemos que los lados conocidos son los catetos:

$$a = \sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{1.225} = 35 \text{ cm}$$

Y si suponemos que los lados conocidos son la hipotenusa y un cateto:

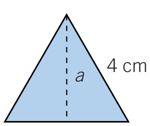
$$a = \sqrt{28^2 - 21^2} = \sqrt{343} = 18{,}52 \text{ cm}$$

013 **Sin operar, razona por qué el triángulo de lados 35, 77 y 85 no puede ser rectángulo.**

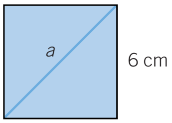
No puede ser rectángulo porque al ser 35 y 77 múltiplos de 7, la suma de sus cuadrados será múltiplo de 7, y como 85 no es múltiplo de 7, su cuadrado tampoco lo será, por lo que no se cumple el teorema de Pitágoras.

014 **Calcula el valor de *a* en este triángulo equilátero y el cuadrado.**

a)



b)



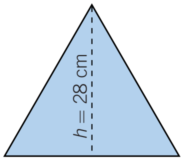
a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ cm}$

b) $a = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8{,}49 \text{ cm}$

015 **Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 8 cm.**

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow 64 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

016 **Halla el lado de un triángulo equilátero de altura 28 cm.**



$$l^2 = 28^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = 784 + \frac{l^2}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4l^2 = 3.136 + l^2 \rightarrow 3l^2 = 3.136 \rightarrow l^2 = \sqrt{\frac{3.136}{3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow l = 32{,}33 \text{ cm}$$

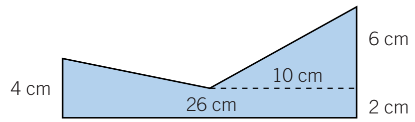
017 **Calcula el área de los siguientes polígonos.**

a) Un trapecio de bases 12 cm y 8 cm y altura 5 cm.

b) Un rombo de diagonales 12 cm y 9 cm.

a) $A = \dfrac{(12 + 8) \cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2$ b) $A = \dfrac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ cm}^2$

018 **Halla el área de la figura.**



Área total = Área rectángulo + Área triángulo 1 + Área triángulo 2

Área rectángulo $= 26 \cdot 2 = 52 \text{ cm}^2$

Área triángulo 1 $= \dfrac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ cm}^2$

Área triángulo 2 $= \dfrac{10 \cdot 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$

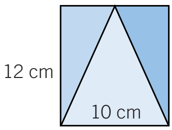
Área total $= 52 + 16 + 30 = 98 \text{ cm}^2$

019 **Calcula el área de un rectángulo de 3 cm de alto y 5 cm de diagonal.**

Base $= \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ cm

Área $= 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$

020 **Halla el área de cada uno de los tres triángulos.**



Los triángulos laterales son iguales:

$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

El triángulo central tiene de área: $A = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ cm}^2$.

021 **Halla la apotema de un heptágono regular de lado 6 cm y área 130,8 cm².**

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow a = \frac{2 \cdot A}{P} = \frac{2 \cdot 130{,}8}{6 \cdot 7} = 6{,}23 \text{ cm}$$

022 **Calcula el área de un cuadrado de lado 7 cm, aplicando la fórmula del área de un polígono regular.**

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \frac{4l \cdot \frac{l}{2}}{2} \rightarrow A = \frac{28 \cdot \frac{7}{2}}{2} = 49 \text{ cm}^2$$

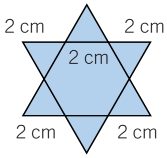
023 **Determina el área de un hexágono regular de lado 6 cm.**

La apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 6 cm, que podemos dividir en dos triángulos rectángulos.

$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

024 **Halla el área de la siguiente figura. Observa que el interior es un hexágono regular.**



El área es el doble del área del hexágono de lado 2 cm.

La apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 2 cm.

$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ cm}$$

$$A = \frac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \text{ cm}^2$$

El área de la figura es: $2 \cdot 10{,}38 = 20{,}76$ cm^2.

025 **Determina la altura y el perímetro de un triángulo equilátero de área 2 dm^2.**

La altura con respecto del lado es: $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = 0{,}87l.$

$$A = 2 = \frac{l \cdot 0{,}87l}{2} \to l = \sqrt{\frac{4}{0{,}87}} = 2{,}14 \text{ dm}$$

$$h = 0{,}87 \cdot 2{,}14 = 1{,}86 \text{ dm}$$

$$P = 3 \cdot 2{,}14 = 6{,}42 \text{ dm}$$

026 **Halla el área de un círculo cuyo diámetro mide 6 cm.**

$$r = \frac{d}{2} \to r = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$L = 2\pi r \to L = 2\pi \cdot 3 = 18{,}84 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 \to A = \pi \cdot 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

027 **Dos circunferencias concéntricas tienen radios de 5 y 3 cm, respectivamente. Calcula el área de la corona que originan. Halla también el área de los círculos que generan.**

Área corona $= \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (5^2 - 3^2) = \pi \cdot 16 = 50{,}24$ cm^2

Área círculo mayor $= \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}5$ cm^2

Área círculo menor $= \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 26{,}26$ cm^2

028 **Determina el área del segmento circular asociado a un sector de 120° y radio 20 cm.**

$$A_{\text{Segmento}} = A_{\text{Sector}} - A_{\text{Triángulo}}$$

$$A_{\text{Sector}} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120°}{360°} = 418{,}67 \text{ cm}^2$$

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17{,}3 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 17{,}3}{2} = 173 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Segmento}} = 418{,}67 - 173 = 245{,}67 \text{ cm}^2$$

029 **¿Qué relación hay entre los radios de dos circunferencias si la corona circular que generan es la mitad del área del círculo mayor?**

El área de la circunferencia mayor es el doble de la menor, por lo que el radio de la circunferencia mayor será el de la menor multiplicado por $\sqrt{2}$.

ACTIVIDADES

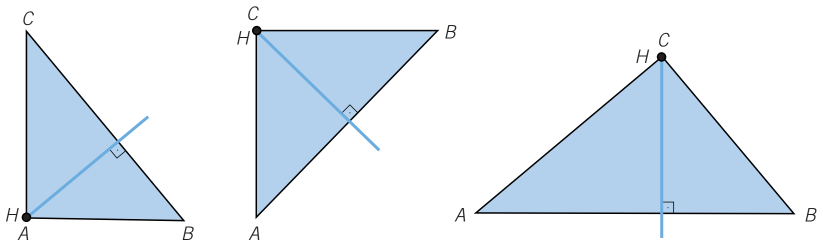
030 **Relaciona estos elementos.**

a) Baricentro	**1) Alturas**
b) Incentro	**2) Mediatrices**
c) Circuncentro	**3) Medianas**
d) Ortocentro	**4) Bisectrices**

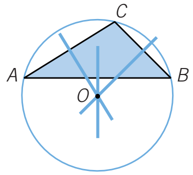
a) → 3)
b) → 4)
c) → 2)
d) → 1)

031 **Dibuja varios triángulos rectángulos y señala su ortocentro. ¿Dónde se encuentra situado?**

Se encuentra situado en el vértice del ángulo recto.

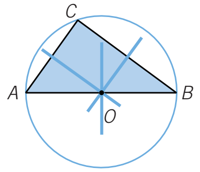


032 ●● **Dibuja tres puntos que no estén alineados y traza la circunferencia que pasa por ellos.**



Trazamos los segmentos que los unen y sus mediatrices. El punto de corte es el centro de la circunferencia.

033 ●● **Dibuja un triángulo rectángulo y traza sus mediatrices. Luego señala su circuncentro. ¿Qué observas?**



El circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa.

034 ●● **En un triángulo rectángulo e isósceles, la hipotenusa mide 10 cm. Si se traza una circunferencia circunscrita, ¿cuál es el radio?**

Como el incentro está en el punto medio de la hipotenusa, esta será el diámetro, luego el radio mide 5 cm.

035 ●● **En un triángulo equilátero de perímetro 36 cm se traza la circunferencia circunscrita. Sabiendo que la mediana mide 10,39 cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia?**

Como en un triángulo equilátero coinciden las rectas y los puntos notables, el radio es la distancia del baricentro al centro: $r = 10{,}39 \cdot 2 : 3 = 6{,}93$ cm.

036 ●● **En un triángulo rectángulo, el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro son puntos situados:**

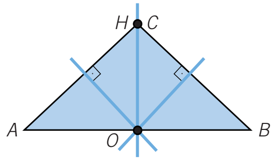
a) En el exterior del triángulo.
b) En el interior del triángulo.
c) Sobre un lado.

El incentro y el baricentro son puntos interiores, mientras que el ortocentro y el circuncentro están situados sobre un lado.

037 ●● **En un triángulo rectángulo e isósceles, señala el circuncentro y el ortocentro. El segmento que une estos dos puntos del triángulo es:**

a) Mediana **b) Mediatriz** **c) Altura** **d) Bisectriz**

¿Se verifica esto también en un triángulo rectángulo escaleno?



El segmento es coincidente con una mediana, una mediatriz, una altura y una bisectriz. Si el triángulo es escaleno, no se verifica.

038 En un triángulo rectángulo e isósceles:

a) La altura correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor que un cateto?

b) La mediana correspondiente a la hipotenusa, ¿es mayor o menor que un cateto?

a) No, ya que la altura forma dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el cateto del triángulo inicial. La hipotenusa es el lado mayor.

b) La mediana coincide con la altura y es menor, por lo indicado en el apartado a).

039 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de los catetos 6 cm. Obtén la longitud del otro cateto.**

$b = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 10{,}39$ cm

040 **Calcula la longitud del lado que falta en cada triángulo rectángulo (*a* es la hipotenusa).**

a) $a = 34$ cm, $b = 30$ cm **b) $b = 28$ cm, $c = 21$ cm**

a) $c = \sqrt{1.156 - 900} = \sqrt{256} = 16$ cm

b) $a = \sqrt{784 + 441} = \sqrt{1.225} = 35$ cm

041 **Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos se diferencian en 2 cm y que el menor mide 6 cm.**

Los catetos son 6 cm y $6 + 2 = 8$ cm, y la hipotenusa mide:

$$a = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

042 **Determina si los siguientes triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de la hipotenusa y los catetos.**

a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.

b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.

c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y $\sqrt{61}$ cm.

d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

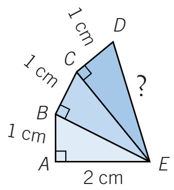
a) $13 = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} \rightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa 13 cm y catetos de 12 cm y 5 cm.

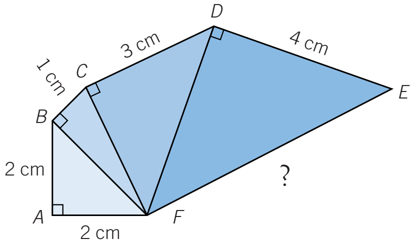
b) $12 \neq \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow$ No es rectángulo.

c) $\sqrt{61} = \sqrt{5^2 + 6^2} \rightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa $\sqrt{61}$ cm y catetos de 6 cm y 5 cm.

d) $25 = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} \rightarrow$ Rectángulo, de hipotenusa 25 cm y catetos de 24 cm y 7 cm.

043 Halla la longitud de los segmentos indicados

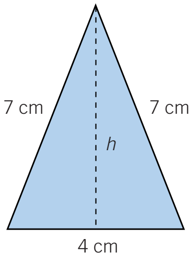




a) $EB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow EC = \sqrt{1+5} = \sqrt{6} \rightarrow ED = \sqrt{1+6} = \sqrt{7}$

b) $FB = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \rightarrow FC = \sqrt{1+8} = 3 \rightarrow FD = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \rightarrow$
$\rightarrow FE = \sqrt{18+16} = \sqrt{34}$

044 En un triángulo isósceles sabemos que los lados iguales miden 7 cm y el otro lado es de 4 cm. Calcula su altura.



$7^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 7^2 - 2^2$

$h^2 = 49 - 4$

$h = \sqrt{45}$

$h = 6{,}71$ cm

045 Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 30 cm.

El lado es: $30 : 3 = 10$ cm, la altura es: $\sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm
y el área mide: $10 \cdot 8{,}66 : 2 = 43{,}3$ cm^2.

046 Obtén la longitud de la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 17 cm y su altura 8 cm.

La mitad de la base forma un triángulo equilátero con la altura
y uno de los lados. Aplicando el teorema de Pitágoras,
tenemos que:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm} \rightarrow b = 30 \text{ cm}$$

047 Halla la longitud de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 42 cm y su altura 20 cm.

La mitad de la base forma un triángulo equilátero con la altura y uno de los lados. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$l = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29 \text{ cm}$$

048 Determina la longitud del lado de un triángulo equilátero cuya altura es de 6 cm.

La mitad de la base forma un triángulo equilátero con la altura y uno de los lados. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

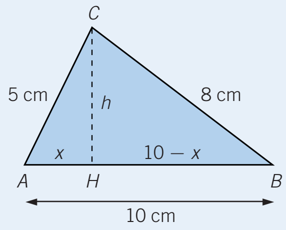
$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}l^2 \rightarrow 36 = \frac{3}{4}l^2 \rightarrow l = \sqrt{48} = 6{,}93 \text{ cm}$$

049 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.

PRIMERO. Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.



La altura divide a la base en dos partes:

- AH, cuya longitud se llama x.
- HB, cuya longitud será $10 - x$.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

En $\widehat{AHC}$: $5^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - x^2$

En $\widehat{HBC}$: $8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$

TERCERO. Se igualan ambas expresiones y se resuelve la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x)$$
$$25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x$$
$$20x = 61 \rightarrow x = 3{,}05 \text{ cm}$$

CUARTO. Se calcula h.

$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3{,}05^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

050 ●●

Calcula la altura de un triángulo cuyos lados miden:

a) $\overline{AB} = 4$ **cm** $\quad \overline{BC} = 7$ **cm** $\quad \overline{CA} = 9$ **cm**

b) $\overline{AB} = 6$ **cm** $\quad \overline{BC} = 10$ **cm** $\quad \overline{CA} = 14$ **cm**

c) $\overline{AB} = 5$ **cm** $\quad \overline{BC} = 11$ **cm** $\quad \overline{CA} = 15$ **cm**

a) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 - x^2 = 7^2 - (9 - x)^2$

$16 - x^2 = 49 - 81 + 18x - x^2$

$18x = 48 \rightarrow x = 2{,}67$ cm

$h^2 = 4^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{16 - 7{,}11} = 2{,}98$ cm

b) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 6^2 - x^2 \\ h^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 6^2 - x^2 = 10^2 - (14 - x)^2$

$36 - x^2 = 100 - 196 + 28x - x^2$

$28x = 132 \rightarrow x = 4{,}71$ cm

$h^2 = 6^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{36 - 22{,}22} = 3{,}71$ cm

c) $\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 11^2 - (15 - x)^2$

$25 - x^2 = 121 - 225 + 30x - x^2$

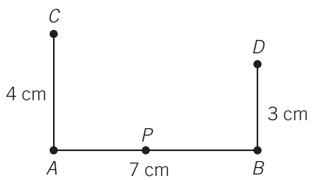
$30x = 129 \rightarrow x = 4{,}3$ cm

$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{25 - 18{,}49} = 2{,}55$ cm

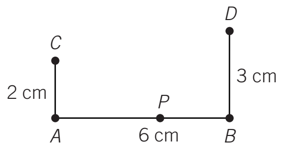
051 ●●●

Halla la distancia de un punto *P* a otro punto *A*, para que se verifique que la longitud del segmento *CP* es igual que la del segmento *DP*, en los gráficos.

a)



b)



a) Si $CP = PD = d$

$\left.\begin{array}{l} d^2 = 4^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (7 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 + x^2 = 3^2 + (7 - x)^2$

$4 + x^2 = 9 + 49 - 14x + x^2$

$14x = 54 \rightarrow x = 3{,}86$ cm

$d^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{16 + 18{,}49} = 5{,}56$ cm

b) Si $CP = PD = d$

$\left.\begin{array}{l} d^2 = 2^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (6 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2^2 + x^2 = 3^2 + (6 - x)^2$

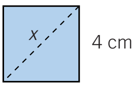
$4 + x^2 = 9 + 36 - 12x + x^2$

$12x = 41 \rightarrow x = 3{,}42$ cm

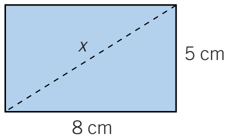
$d^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{4 + 18{,}49} = 3{,}96$ cm

052 Calcula la longitud de x en las figuras.

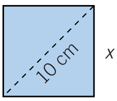
a)



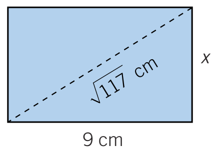
c)



b)



d)



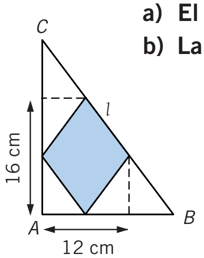
a) $x = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}66$ cm

b) $10^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x^2 = \dfrac{100}{2} \rightarrow x = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm

c) $x = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9{,}43$ cm

d) $x = \sqrt{\sqrt{117}^2 - 9^2} = \sqrt{117 - 81} = \sqrt{36} = 6$ cm

053 Observa la figura y calcula.



a) El lado del rombo.

b) La longitud del cateto AB, del cateto AC y de la hipotenusa BC.

a) $l = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm

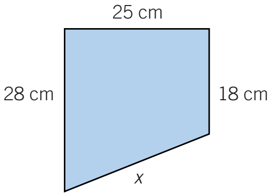
b) $AC = \dfrac{D}{2} + D = \dfrac{16}{2} + 16 = 24$ cm

$AB = \dfrac{d}{2} + d = \dfrac{12}{2} + 12 = 18$ cm

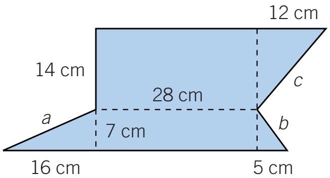
$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \rightarrow AC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ cm

054 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a)



b)



a) $x = \sqrt{25^2 + 10^2} = \sqrt{725} = 26{,}93$ cm

$P = 28 + 25 + 18 + 26{,}93 = 97{,}93$ cm

b) $a = \sqrt{16^2 + 7^2} = \sqrt{305} = 17{,}46$ cm

$b = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8{,}6$ cm

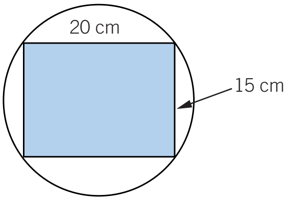
$c = \sqrt{14^2 + 12^2} = \sqrt{340} = 18{,}44$ cm

$P = 17{,}46 + 14 + 28 + 12 + 18{,}44 + 8{,}6 + 5 + 28 + 16 = 147{,}5$ cm

055 ●●

Observa la siguiente figura.

Si los lados del rectángulo son 15 cm y 20 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?



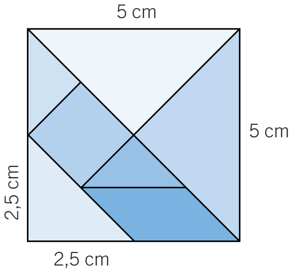
El radio es la mitad de la diagonal:

$$r = \frac{\sqrt{400 + 225}}{2} = \frac{\sqrt{625}}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$$

056 ●●●

Considera las siete piezas del *tangram* chino.

Calcula el área de cada una de las piezas de este *tangram*.



Hallamos primero la diagonal del cuadrado:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2} \rightarrow d = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Triángulo mayor}} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = \frac{25 \cdot 2}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo mediano}} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo menor}} = \frac{\frac{d}{4} \cdot \frac{d}{4}}{2} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{100 \cdot 2}{16 \cdot 2} = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}} = \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{100 \cdot 2}{16} = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Romboide}} = b \cdot h = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \rightarrow A_{\text{Romboide}} = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

Comprobamos que la suma de las áreas de todas las piezas es igual al área total del cuadrado, 10^2 cm^2:

$$2 \cdot 25 + 12{,}5 + 2 \cdot 6{,}25 + 12{,}5 + 12{,}5 =$$
$$= 50 + 12{,}5 + 12{,}5 + 12{,}5 + 12{,}5 = 100 \text{ cm}^2$$

057 ●

Elige la respuesta correcta en cada caso.

a) El área de un rombo de diagonales 2 cm y 4 cm, es:

I) 4 cm^2 **III) 6 cm^2**
II) 2 cm^2 **IV) 12 cm^2**

b) El área de un trapecio de bases 10 cm y 8 cm y altura 6 cm, es:

I) 240 cm^2 **III) 108 cm^2**
II) 54 cm^2 **IV) 60 cm^2**

c) El área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm, es:

I) 86,6 cm^2 **III) 43,3 cm^2**
II) 50 cm^2 **IV) 100 cm^2**

a) → I) 4 cm^2 b) → II) 54 cm^2 c) → I) 86,6 cm^2

058 **El área de un triángulo isósceles es 24 m² y el lado desigual mide 6 m. Halla la longitud de los otros lados.**

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow 24 = \frac{6 \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{24 \cdot 2}{6} = 8 \text{ m}$$

$$l^2 = 3^2 + 8^2 \rightarrow l^2 = 9 + 64 \rightarrow l = \sqrt{73} = 8{,}54 \text{ m}$$

059 **El área de un triángulo rectángulo es 12 cm² y uno de los catetos mide 6 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.**

El otro cateto mide: $12 \cdot 2 : 6 = 4$ cm

y la hipotenusa es: $\sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7{,}21$ cm.

060 **Obtén el área de un triángulo equilátero de perímetro 90 cm.**

El lado es: $90 : 3 = 30$ cm

y la altura mide: $\sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98$ cm.

$$\text{Área} = \frac{25{,}98 \cdot 30}{2} = 789{,}7 \text{ cm}^2$$

061 **Si el área de un triángulo equilátero es 30 cm², halla la longitud de su lado.**

Si el lado es x, la altura será: $h = \sqrt{x - \frac{x}{2}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Área} = 30 = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow x = 8{,}32 \text{ cm}$$

062 **Obtén el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa 13 cm, siendo uno de los catetos 5 cm.**

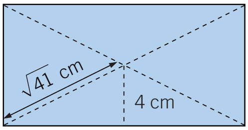
El otro cateto es: $\sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm

y el área es: $(5 \cdot 12) : 2 = 30$ cm².

063 **Halla el área de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 7,07 cm.**

Si consideramos el cuadrado como un rombo,
el área mide: $(7{,}07 \cdot 7{,}07) : 2 = 25$ cm².

064 **Halla el área de este rectángulo.**



La mitad de la base es: $\sqrt{41 - 16} = 5$ cm,
por lo que el área mide: $10 \cdot 8 = 80$ cm².

065 **Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal $\sqrt{116}$ cm.**

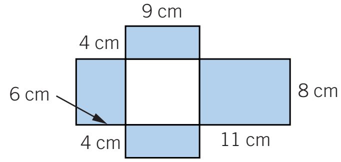
La altura es: $\sqrt{116 - 100} = 4$ cm y el área mide: $10 \cdot 4 = 40$ cm².

066 Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.

$7 + 7 + 2h = 24 \rightarrow 2h = 10 \rightarrow h = 5$ cm

Área $= 5 \cdot 7 = 35$ cm^2

067 Calcula el área de la zona sombreada.

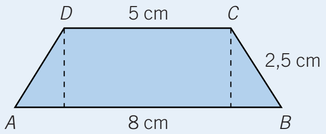


$A = 6 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 11 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = 48 + 36 + 88 + 36 = 208$ cm^2

068 **HAZLO ASÍ**

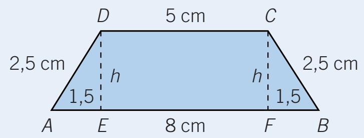
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

Calcula el área de este trapecio isósceles.



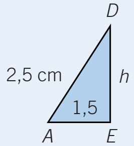
PRIMERO. Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

Por ser el trapecio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases son la mitad de la diferencia de las bases del trapecio.



$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8-5}{2} = 1,5 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que determina la altura.



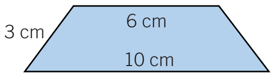
$$1,5^2 + h^2 = 2,5^2$$
$$h^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4$$
$$h = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

TERCERO. Se halla el área del trapecio.

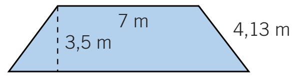
$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(8+5) \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

069 Halla el área de estos trapecios isósceles.

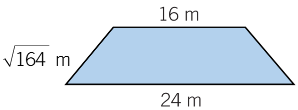
a)



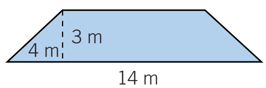
c)

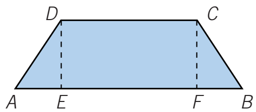


b)



d)





a) $h = DE = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{10-6}{2}\right)^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ cm

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(10+6)\cdot 2{,}24}{2} = 17{,}92\ \text{cm}^2$

b) $h = DE = \sqrt{\left(\sqrt{164}\right)^2 - \left(\dfrac{24-16}{2}\right)^2} = \sqrt{148} = 12{,}17$ m

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(24+16)\cdot 12{,}17}{2} = 243{,}4\ \text{m}^2$

c) $AE = \sqrt{4{,}13^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{4{,}81} = 2{,}19$ m

$B = AB = 7 + 2 \cdot 2{,}19 = 11{,}38$ m

$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(11{,}38+7)\cdot 4{,}13}{2} = 37{,}95\ \text{m}^2$

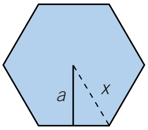
d) $b = 14 - 2 \cdot 4 = 6$ m

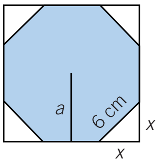
$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(14+6)\cdot 3}{2} = 30\ \text{m}^2$

070 Calcula el área de:

a) Un hexágono regular de lado 2 cm.

b) Un octógono regular de perímetro 48 cm.





a) La apotema es:

$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1{,}73$ cm

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38\ \text{cm}^2$

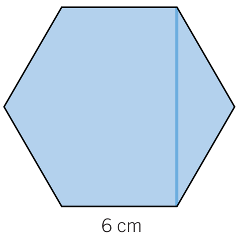
b) El lado mide 6 cm.

$6^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{18} = 4{,}24$ cm

$a = 4{,}24 + \dfrac{6}{2} = 7{,}24$ cm

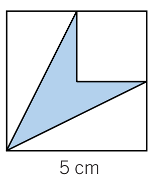
$A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{48 \cdot 7{,}24}{2} = 173{,}76\ \text{cm}^2$

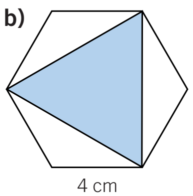
071 ●●● **Halla la longitud del segmento rojo de esta figura.**

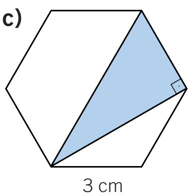


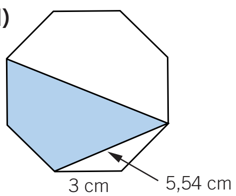
Si trazamos la mediatriz del segmento, la distancia al vértice es la mitad del radio, 3 cm, y forma un triángulo equilátero con un lado del hexágono y la mitad del segmento. Por tanto, la mitad del segmento es: $\sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm, y el segmento mide 10,4 cm.

072 ●● **Determina el área de las superficies coloreadas.**

a)


b)


c)


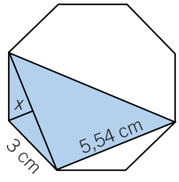
d)


a) Cuadrado mayor − Cuadrado menor − 2 · Triángulos

$$A = 5^2 - 2{,}5^2 - 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 2{,}5}{2}\right) = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

b) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es la mitad de cada triángulo, por lo que será la mitad del área del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 3,46 cm, su área es 41,57 cm^2 y el área coloreada mide 20,78 cm^2.

c) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es un triángulo entero y la mitad de otros dos, luego equivale a dos triángulos, es decir, la tercera parte del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 2,6 cm, su área es 23,4 cm^2 y el área coloreada mide 7,8 cm^2.

d)


El área total es el área de los triángulos:
$x = \sqrt{9 - 7{,}67} = \sqrt{1{,}33} = 1{,}15$ cm.
A = Triángulo mayor + Triángulo menor =
$= 5{,}54 \cdot 5{,}54 : 2 + 5{,}54 \cdot 1{,}15 : 2 = 18{,}53 \text{ cm}^2$

073 ●● **Calcula el área de un círculo circunscrito a un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm.**

La hipotenusa es 10 cm y coincide con el diámetro, el radio es 5 cm y el área mide $25\pi = 78{,}5$ cm^2.

074 ●● **Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un cuadrado de lado 8 cm.**

El radio de la circunferencia interior es la mitad del lado: 4 cm, y la exterior es la mitad de la diagonal ($\sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 11{,}31$ cm): 5,66 cm.
Área $= \pi \cdot (32 - 16) = 50{,}24$ cm^2

075 ●●

Calcula el área de un sector circular de amplitud 60°, y radio, el de una circunferencia de longitud 12π cm.

Si la circunferencia es 12π cm, el radio mide 6 cm. Como el sector es una sexta parte del círculo, su área mide: $\frac{36\pi}{6} = 18{,}84$ cm^2.

076 ●●

Obtén el área de un círculo cuyo diámetro es igual que el perímetro de un cuadrado de lado 7 cm.

El diámetro es 28 cm, el radio es 14 cm y el área mide: $196\pi = 615{,}44$ cm^2.

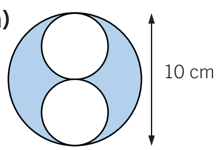
077 ●●

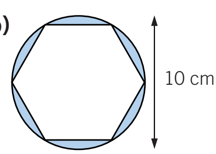
En una circunferencia de radio 5 cm se inscribe un triángulo rectángulo isósceles. Calcula el área comprendida entre el círculo y el triángulo.

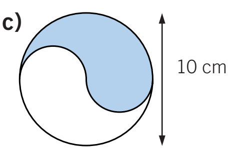
La base del triángulo coincide con el diámetro y la altura con el radio, por lo que su área es: $10 \cdot 5 : 2 = 25$ cm^2. El área comprendida es: $25\pi - 25 = 53{,}5$ cm^2.

078 ●●

Halla el área de la zona coloreada sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 10 cm.

a)


b)


c)


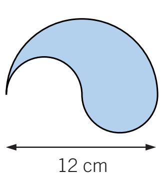
a) $25\pi - 2 \cdot 6{,}25\pi = 39{,}25$ cm^2

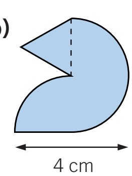
b) Es la mitad del círculo: $25\pi : 2 = 39{,}25$ cm^2.

c) El área del hexágono de lado 5 cm es: $\frac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95$ cm^2, y el área comprendida mide: $25\pi - 64{,}95 = 13{,}55$ cm^2.

079 ●●●

Calcula el área de las siguientes figuras.

a)


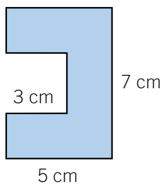
b)


a) Es un semicírculo al que le quitamos y le sumamos la misma superficie, luego será equivalente al área del semicírculo: $A = 36\pi = 113{,}04$ cm^2.

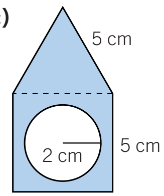
b) Es un semicírculo más un cuarto de círculo, es decir, tres cuartos de círculo más un triángulo equilátero.
$A = 0{,}75 \cdot 4\pi + 2 \cdot 1{,}73 : 2 = 11{,}15$ cm^2

080 Determina el área de las figuras.

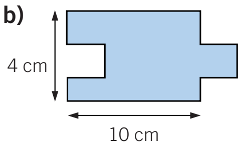
a)



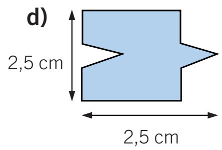
c)



b)



d)



a) La figura es un rectángulo menos un cuadrado: $A = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 26$ cm^2.

b) A la figura base se le suma y se le quita la misma superficie, por lo que el área es la de la superficie base: $A = 10 \cdot 4 = 40$ cm^2.

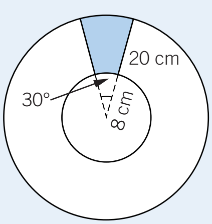
c) La figura es un cuadrado más un triángulo equilátero menos un círculo:
$h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \rightarrow A = 5 \cdot 5 + (5 \cdot 4{,}33) : 2 - 4\pi = 23{,}27$ cm^2.

d) A la figura base se le suma y se le quita la misma superficie, por lo que el área es la de la superficie base: $A = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$ cm^2.

081 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR?

Calcula el área de esta parte de corona circular limitada por dos radios (trapecio circular).



PRIMERO. Se halla el área de los sectores circulares.

En este caso tienen una amplitud de 30°, y sus radios miden 20 y 8 cm, respectivamente.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 30}{360} = 104{,}67 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 30}{360} = 16{,}75 \text{ cm}^2$$

SEGUNDO. Se restan las áreas de los dos sectores.

$$A_1 - A_2 = 104{,}67 - 16{,}75 = 87{,}92 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio circular es 87,92 cm^2, aproximadamente.

082 ●● **Calcula el área del trapecio circular generado por la corona circular de la actividad anterior y de amplitud 120°.**

Aplicando una regla de tres, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 30° \rightarrow 87{,}92 \\ 120° \rightarrow A \end{array}\right\} \rightarrow A = 87{,}92 \cdot 4 = 351{,}68\ \text{cm}^2$$

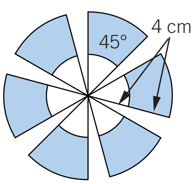
083 ●● **Halla el área de un trapecio circular de radios 12 cm y 6 cm y amplitud 270°.**

$$A_{\text{Sector mayor}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 270}{360} = 339{,}12\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Sector menor}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 270}{360} = 84{,}78\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{Trapecio}} = 339{,}12 - 84{,}78 = 254{,}34\ \text{cm}^2$$

084 ●● **Observa la margarita y calcula el área de cada pétalo de la parte amarilla, de la blanca y su área total.**



El área de cada sector de la parte blanca será:

$$A = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 45}{360} = 6{,}28\ \text{cm}^2$$

El área de cada sector de la parte amarilla será:

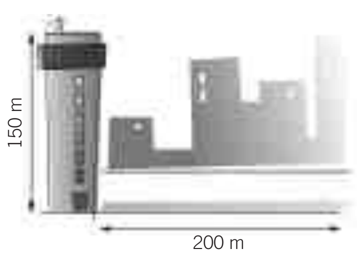
$$A' = \frac{\pi \cdot (8^2 - 4^2) \cdot 45}{360} = \frac{3{,}14 \cdot (64 - 16) \cdot 45}{360} = 18{,}84\ \text{cm}^2$$

El área total será:

$$A_T = 6 \cdot (A + A') = 6 \cdot (6{,}28 + 18{,}84) = 6 \cdot 25{,}12 = 150{,}72\ \text{cm}^2$$

085 ●● **Observa esta torre y su sombra.**

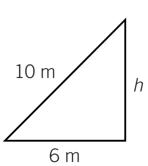
¿Qué distancia hay desde el punto más alto de la torre hasta el extremo de la sombra?

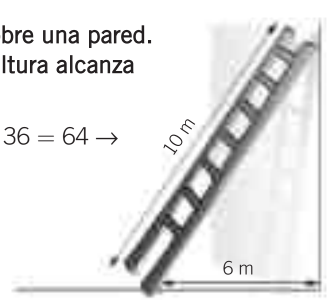


$$d^2 = 150^2 + 200^2 \rightarrow d^2 = 62.500 \rightarrow$$
$$\rightarrow d = 250\ \text{m}$$

086 ●● **Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 6 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?**

$$10^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow$$
$$\rightarrow h = 8\ \text{m}$$





087 ●●

En los lados de un campo cuadrangular se han plantado 32 árboles, separados 5 m entre sí. ¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide el lado?

Al haber 32 árboles y completarse el perímetro del cuadrado, habrá 32 separaciones de 5 m, es decir:

$$P = 32 \cdot 5 = 160 \text{ m} \rightarrow 4l = 160 \rightarrow l = 40 \text{ m}$$

El área es: $A = l^2 \rightarrow A = 40^2 = 1.600 \text{ m}^2$.

088 ●●

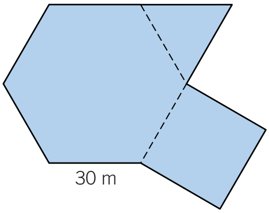
Esta señal de tráfico indica la obligatoriedad de parar. Halla su área si su altura es 90 cm y su lado mide 37 cm.

Su apotema es la mitad de la altura: 45 cm, y su perímetro es: $37 \cdot 8 = 296$ cm.

$$A = \frac{296 \cdot 45}{2} = 6.660 \text{ cm}^2$$

089 ●●●

Cada uno de los 50 pisos de un edificio tiene la planta de esta figura, siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m², calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.



La apotema es: $a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 26$ m.

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \frac{6 \cdot 30 \cdot 26}{2} = 2.340 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}} = 30^2 = 900 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 390 \text{ m}^2$$

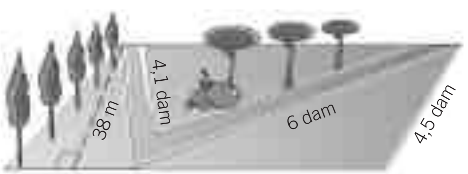
El área de un piso mide: $2.340 + 900 + 390 = 3.630 \text{ m}^2$.

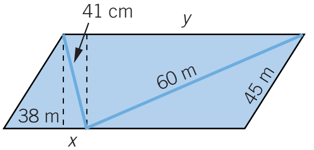
La moqueta de un piso cuesta: $3.630 \cdot 20 = 72.600$ €.

Y la moqueta de todo el edificio costará: $50 \cdot 72.600 = 3.630.000$ €.

090 ●●●

Mario tiene un jardín en forma de romboide. Uno de sus lados mide 45 m y hay un camino, del que también conocemos sus medidas. Calcula el perímetro del jardín y su área.





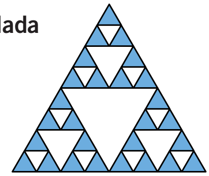
$x = \sqrt{41^2 - 38^2} = 15,4$ m

$y = \sqrt{60^2 - 38^2} = 46,4$ m

Perímetro: $P = 2 \cdot (x + y) + 2 \cdot 45 =$
$= 2 \cdot (15,4 + 46,4) + 2 \cdot 45 = 213,6$ m

Área: $A = b \cdot a = (x + y) \cdot 38 =$
$= (15,4 + 46,4) \cdot 38 = 2.348,4 \text{ m}^2$

091 **Hemos colocado una vidriera triangular. Calcula el área acristalada en color rojo, sabiendo que la ventana es un triángulo equilátero de lado 1 m.**



Cada triángulo rojo tiene 1/8 m de lado y es equilátero; por tanto, su altura será:

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0{,}11 \text{ m}$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1/8 \cdot 0{,}11}{2} = 0{,}007 \text{ m}^2$$

Como hay 27 triángulos rojos, su área total será:

$$A = 27 \cdot 0{,}007 = 0{,}189 \text{ m}^2$$

092 **En una pista circular se echan 15 kg de arena por metro cuadrado. ¿Qué radio tiene la pista si se han echado 4.710 kg de arena en total?**

Hallamos, en primer lugar, el número de metros cuadrados que tiene la pista:

$$4.710 : 15 = 314 \text{ m}^2$$

$$A = \pi r^2 \rightarrow 314 = \pi r^2 \rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10 \text{ m}$$

093 **En otra pista circular de 30 m de diámetro se quieren echar 30 kg de arena por metro cuadrado.**

a) ¿Cuántas toneladas de arena se necesitan?

b) Si una carretilla mecánica carga 157 sacos de 5 kg cada uno, ¿cuántos desplazamientos tendrá que realizar?

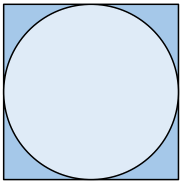
$D = 30 \text{ m} \rightarrow r = 15 \text{ m} \rightarrow A = \pi \cdot 15^2 = 706{,}5 \text{ m}^2$

a) $30 \text{ kg/m}^2 \cdot 706{,}5 \text{ m}^2 = 21.195 \text{ kg} \cong 21{,}2$ t de arena se necesitan.

b) En cada viaje transporta: $5 \cdot 157 = 785$ kg.

Luego tendrá que hacer: $\dfrac{21.195}{785} = 27$ viajes.

094 **Se desea hacer un círculo con losas en un jardín cuadrado, como indica la figura.**



a) ¿Cuánto mide el área enlosada?

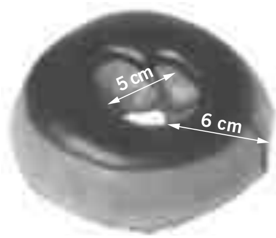
b) ¿Qué área ha quedado con césped?

a) $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 \rightarrow A = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ m}^2$

b) $A_{\text{Cuadrado}} = 10^2 = 100 \text{ m}^2$

$A_{\text{Césped}} = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \text{ m}^2$

095 ●●● **Un repostero ha cubierto de azúcar la parte superior de 200 rosquillas como la de la figura. Si ha utilizado 5 kg de azúcar, ¿cuántos gramos de azúcar se necesitan para cubrir cada cm² de rosquilla?**



Hallamos el área de la parte superior (plana) de cada rosquilla:

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \rightarrow A = \pi \cdot (8{,}5^2 - 2{,}5^2) = 66\pi = 207{,}24 \text{ cm}^2$

Como son 200 rosquillas, el área total que hay que cubrir es:

$$200 \cdot 207{,}24 = 41.448 \text{ cm}^2$$

Si se han gastado 5 kg de azúcar, por cada cm² se necesitan:

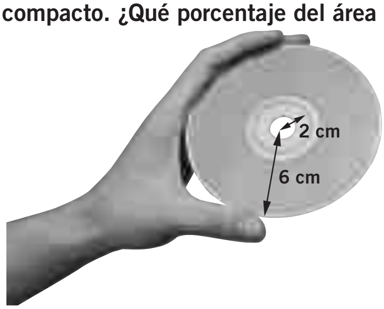
$$5.000 \text{ g} : 41.448 \text{ cm}^2 = 0{,}12 \text{ g}$$

096 ●● **Construimos la montura de un monóculo con 10 cm de alambre. ¿Cuál es el área de la lente que encaja en la montura?**

$L = 2\pi r \rightarrow 10 = 2\pi r \rightarrow r = 1{,}6 \text{ cm}$

$A = \pi r^2 \rightarrow A = \pi \cdot 1{,}6^2 = 8 \text{ cm}^2$

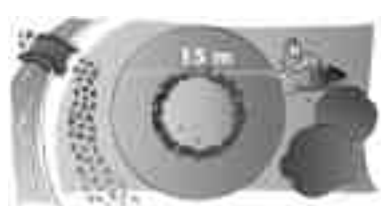
097 ●● **Calcula el área que puede grabarse (en color azul en la fotografía) de un disco compacto. ¿Qué porcentaje del área total del disco se aprovecha para grabar?**

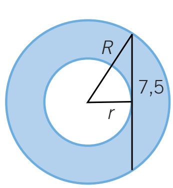


$A = \pi \cdot (6^2 - 2^2) = \pi \cdot 32 = 100{,}5 \text{ cm}^2$

Área aprovechada $= \dfrac{100{,}5}{113} \cdot 100 = 88{,}9\,\%$

098 ●●● **Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m. ¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?**





El área que se pide es la de la corona circular:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Como el segmento mide 15 cm, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 - r^2 = 7{,}5^2$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 7{,}5^2 = 176{,}63 \text{ m}^2$$

099 ●●

Esta es la bandera de Brasil. Mide y calcula qué porcentaje del área total supone el área de cada color.

$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot 6^2 = 113\ \text{mm}^2$

$A_{\text{Rombo}} = D \cdot d = 27 \cdot 18 = 486\ \text{mm}^2$

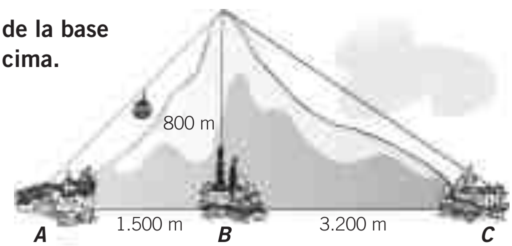
$A_{\text{Rectángulo}} = 37 \cdot 24 = 888\ \text{mm}^2$

$\text{Azul} = \dfrac{113}{888} \cdot 100 = 12{,}7\ \%$ $\text{Amarillo} = \dfrac{486 - 113}{888} \cdot 100 = 42\ \%$

$\text{Verde} = \dfrac{888 - 486}{888} \cdot 100 = 45{,}3\ \%$

100 ●●

El teleférico de la ciudad *A* sale de la base de una montaña y llega hasta la cima. Desde ese punto se dirige a la ciudad *B* o a la ciudad *C*.



a) ¿Qué distancia recorre el teleférico desde la ciudad *A* hasta *C*?

b) ¿Y desde *A* hasta *B*?

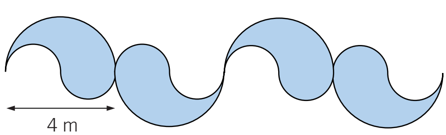
a) Distancia (A-Cima) $= \sqrt{2.250.000 + 640.000} = \sqrt{2.890.000} = 1.700$ m

Distancia (Cima-C) $= \sqrt{10.240.000 + 640.000} = \sqrt{10.880.000} =$
$= 3.298{,}48$ m

Distancia (A-C) $= 1.700 + 3.298{,}48 = 4.998{,}48$ m

101 ●●●

Un pintor decora una valla con una de estas figuras. Si cobra el metro cuadrado de valla pintada a 32 €, ¿cuánto cobrará por cada una?



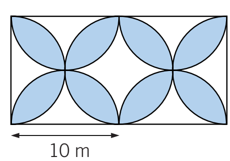


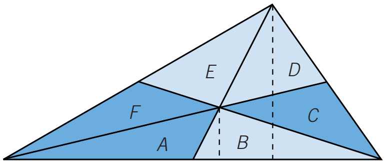
Figura 1: La figura que forma la valla se repite cuatro veces, y su área coincide con la del semicírculo de radio 2 m, que es: $A = \pi \cdot 4 : 2 = 6{,}28\ \text{m}^2$.
Como son 4 figuras, el área mide $25{,}12\ \text{m}^2$ y el precio será:

$$\frac{25{,}12}{10.000} \cdot 32 = 0{,}08\ € = 8\ \text{céntimos}$$

Figura 2: Son 8 pétalos que podemos inscribir en un cuadrado de lado 5 m, siendo simétricos por la diagonal del cuadrado. El área de cada mitad es la de un sector circular de 90° y radio 5 m, a la que se resta el área de un triángulo de base y altura 5 m: $\dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{5 \cdot 5}{2} = 7{,}125\ \text{m}^2$.

El área del pétalo es $14{,}25\ \text{m}^2$ y la unión de los 8 pétalos mide $114\ \text{m}^2$, con un coste de $\dfrac{114}{10.000} \cdot 32 = 0{,}36\ € = 36$ céntimos.

102 **En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.**

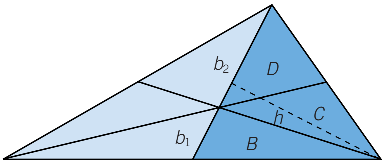


Las bases de los triángulos A y B miden lo mismo (por la definición de mediana), y como su altura es igual, sus áreas coinciden.
Es decir, $S_A = S_B$, $S_C = S_D$, $S_E = S_F$.

Considerando el triángulo total y, por el mismo razonamiento:
$S_A + S_B + S_C = S_D + S_E + S_F$.

Como $S_C = S_D \rightarrow S_A + S_B = S_E + S_F \xrightarrow{S_A = S_B;\ S_E = S_F} 2S_A = 2S_E \rightarrow S_A = S_E$.

Por tanto, $S_A = S_B = S_E = S_F$, y repitiendo el razonamiento con cualquier mediana, obtenemos que son iguales a S_C y S_D:
$S_A = S_B = S_C = S_D = S_E = S_F$.

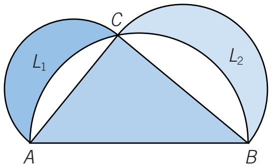


Como $S_B = \dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ y $S_C + S_D = \dfrac{b_2 \cdot h}{2}$ y, además, $S_B = S_C = S_D$, deducimos que:

$$2\left(\frac{b_1 \cdot h}{2}\right) = \frac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow \cancel{2}\left(\frac{b_1 \cdot h}{\cancel{2}}\right) = \frac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow b_1 = \frac{b_2 \cdot \cancel{h}}{2 \cdot \cancel{h}} = \frac{b_2}{2}$$

103 **¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de L_1 y L_2?**

(Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo.)



Si A_1 y A_2 fuesen las áreas de los semicírculos completos correspondientes a L_1 y L_2, las áreas de los tres semicírculos serían:

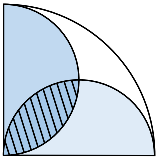
$$A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2} \qquad A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} \qquad A_3 = \frac{\pi r_3^2}{2}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{\pi r_3^2}{2} = A_3$$

Como el área que le falta al triángulo para ser igual que el semicírculo mayor es la que le falta a L_1 y L_2, las áreas de L_1 y L_2 serán iguales a la del triángulo.

104 **Compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.**

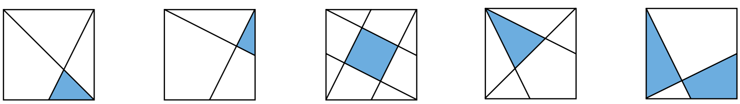


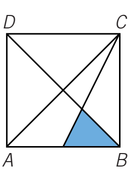
Si r es el radio del cuarto de círculo mayor,
$r/2$ es el de los dos semicírculos menores, y sus áreas son:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \quad A_2 = A_3 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} \rightarrow A_2 + A_3 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = A_1$$

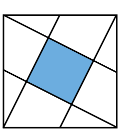
Como el área del cuarto de círculo es la misma que la suma de las áreas de los semicírculos, su intersección, que es la zona rayada, es igual a la zona blanca, que es exterior a los semicírculos.

105 **Los segmentos trazados en estos cuadrados son diagonales o unen vértices del cuadrado con puntos medios de lados opuestos. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?**

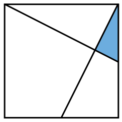




Tomando el triángulo $\widehat{ABC}$, el área coloreada es uno de los 6 triángulos que se forman al cortar sus medianas. Como ya se vio en la actividad 102, son iguales, siendo una sexta parte de la mitad del cuadrado, y su fracción es $\frac{1}{12}$.

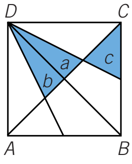


Se forman 4 triángulos iguales, 4 trapecios iguales y 1 cuadrado. Por semejanza de triángulos, el cateto mayor de los triángulos coincide con el lado del cuadrado, y el cateto menor de los triángulos coincide con la base mayor de los trapecios. Por tanto, si unimos un trapecio con un triángulo formamos un cuadrado idéntico al coloreado, por lo que el cuadrado total equivale a 5 cuadrados como el coloreado, y la fracción es $\frac{1}{5}$.



Por lo expuesto en el apartado anterior, el triángulo es la tercera parte del trapecio y la cuarta del cuadrado, por lo que su fracción es $\frac{1}{20}$.

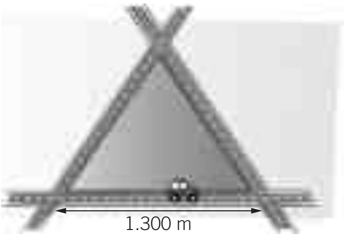
Como en la segunda solución, tenemos el equivalente a 2 cuadrados centrales y la fracción es $\frac{2}{5}$.



Como en la primera solución, el área c y el área a son triángulos formados por la unión de las medianas, por lo que su área es $\frac{1}{12}$ del total, y la superficie azul es el doble que el área a, siendo su fracción $\frac{1}{6}$.

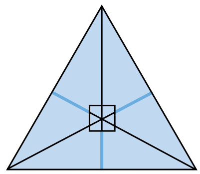
EN LA VIDA COTIDIANA

106 **Este es el plano de una parcela en la que se construirá un edificio de oficinas. La parcela tiene forma de triángulo equilátero de 1.300 m de lado y está bordeada por tres carreteras.**



El contratista de la obra y el arquitecto han coincidido en la ubicación del edificio.

Considerando que el edificio que se va a construir será de forma cuadrada, con una superficie de 484 m^2, y que cada metro lineal de la vía de salida costará 1.150 €, ¿cuál será el coste de las tres vías que se tienen que construir?

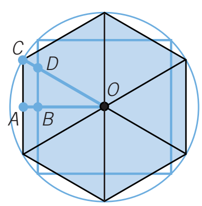


Dibujamos el cuadrado inscrito en un círculo, con centro en el incentro, y dibujamos el hexágono que forman las rectas al cortar al círculo.

El radio del círculo es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$l = \sqrt{484} = 22 \text{ m}$$

$$r = \frac{\sqrt{484 + 484}}{2} = 15{,}56 \text{ m}$$



La apotema del hexágono es:

$$OA = \sqrt{242 - 60{,}5} = 13{,}47 \text{ m}$$

Por semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA} \rightarrow OD = \frac{11 \cdot 15{,}56}{13{,}47} = 12{,}71 \text{ m}$$

La distancia del cuadrado al lateral es la distancia que hay del baricentro al lateral menos *OD*.

La distancia del baricentro al lateral es la tercera parte de la altura.

$$h = \sqrt{1.300^2 - 650^2} = 1.125{,}83 \text{ m}$$

$$\text{Distancia lateral} = \frac{1.125{,}83}{3} - 12{,}71 = 362{,}57 \text{ m}$$

La distancia del cuadrado a la base es la tercera parte de la altura menos la mitad del lado del cuadrado:

$$\frac{1.125{,}83}{3} - \frac{22}{2} = 364{,}28 \text{ m.}$$

La suma de las distancias es:

$$2 \cdot 362{,}57 + 364{,}28 = 1.089{,}42 \text{ m.}$$

Por tanto, su coste será:

$$1.089{,}42 \cdot 1.150 = 1.252.833 \text{ €.}$$

107 ●●● **Se quiere colocar un repetidor en la cima de una montaña para asegurar las comunicaciones de cuatro localidades que hay en la zona.**

Las cuatro localidades están situadas en los vértices de un rectángulo, siendo sus distancias:

Argante - Berno	100 km
Berno - Cabrellas	60 km

Como ves en el mapa, las distancias entre la montaña y los pueblos de Argante y Berno son fáciles de medir, y estas son sus distancias:

Argante - Pico de Buey	50 km
Berno - Pico de Buey	80 km

Sin embargo, las distancias de Pico de Buey a los otros dos pueblos no se pueden medir fácilmente porque existe un lago en medio.

Se sabe, por las mediciones que se han hecho de otros repetidores similares, que la señal es aceptable hasta una distancia no superior a 90 km del repetidor.

¿Será aceptable la señal en los pueblos de Cabrellas y Dederos?

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= 50^2 - x^2 \\ h^2 &= 80^2 - (100 - x)^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow 50^2 - x^2 = 80^2 - (100 - x)^2$$

$$2.500 - x^2 = 6.400 - 10.000 + 200x - x^2$$
$$200x = 6.100 \rightarrow x = 30{,}5 \text{ km}$$

$$h^2 = 50^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{2.500 - 930{,}25} = 39{,}62 \text{ km}$$

$$PC = \sqrt{(60 - 39{,}62)^2 + (100 - 30{,}5)^2} = 72{,}42 \text{ km}$$

$$PD = \sqrt{(60 - 39{,}62)^2 + 30{,}5^2} = 36{,}68 \text{ km}$$

Como las distancias son menores de 90 km, la señal será aceptable.