7 Progresiones

- **SUCESIONES**
  - TÉRMINO GENERAL
  - SUCESIONES RECURRENTES
- **PROGRESIÓN ARITMÉTICA**
  - TÉRMINO GENERAL
  - SUMA DE *n* TÉRMINOS
- **PROGRESIÓN GEOMÉTRICA**
  - TÉRMINO GENERAL
  - SUMA Y PRODUCTO DE *n* TÉRMINOS
  - SUMA DE INFINITOS TÉRMINOS
- **INTERÉS COMPUESTO**

La mascota de la princesa

El rey de Sicilia, Federico II, había encargado al filósofo de la Corte, Juan de Palermo, que examinara a Leonardo de Pisa con problemas matemáticos de difícil solución.

Leonardo, más conocido como Fibonacci, les presentó las soluciones y esperó a que las evaluaran. A medida que estudiaban el trabajo, sus caras reflejaban la sorpresa que les producía.

Mientras tanto, Fibonacci se había alejado un poco y charlaba con una niña que, sentada en la escalera, acariciaba a un conejito que mantenía en su regazo.

–Yo tuve una pareja de conejos –decía Fibonacci.

–¿De qué color eran? –se interesó la niña.

–Eran blancos y los tuve en casa, a ellos y sus crías, durante 12 meses, luego me trasladé con mi padre y no me los pude llevar. ¡En un año tenía 144 parejas!

–Eso es imposible –dijo la niña mientras imaginaba todo lleno de conejos.

–La primera pareja comenzó a criar al segundo mes, y de cada camada me quedaba con otra pareja, que comenzaba a procrear a su vez a los dos meses de vida –repasaba mentalmente el sabio.

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Parejas	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

La niña iba apuntando y, de repente, lo vio claro.

–El número de parejas es, cada mes, la suma de los dos meses anteriores.

¿Cuántas parejas tendría al cabo de catorce meses?
¿Y a los dos años?

Calculamos el número de parejas que tendría a los 14 meses hallando a_{14}:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	…
1	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*	*55*	*89*	*144*	*233*	***377***	…

Al cabo de dos años habrán transcurrido 24 meses, luego hay que calcular a_{24}:

…	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
…	*233*	*377*	*610*	*987*	*1.597*	*2.584*

a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	…
4.181	*6.765*	*10.946*	*17.711*	*28.657*	***46.368***	…

Progresiones

EJERCICIOS

001 **Di cuáles son los términos a_1, a_3 y a_6 de las siguientes sucesiones.**

a) 6, 7, 8, 9, 10, ...

b) 0, –2, –4, –6, –8, ...

c) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...

d) –1, –1, –1, –1, –1, ...

e) –2, –4, –8, –16, –32, ...

f) 1, 2, 3, 5, 8, ...

Determina su regla de formación.

a) $a_1 = 6$, $a_3 = 8$, $a_6 = 11$. Cada número es el anterior más 1.

b) $a_1 = 0$, $a_3 = -4$, $a_6 = -10$. Cada número es el anterior menos 2.

c) $a_1 = 1$; $a_3 = 0{,}01$; $a_6 = 0{,}00001$. Cada número es el anterior dividido entre 10.

d) $a_1 = -1$, $a_3 = -1$, $a_6 = -1$. Todos los números son -1.

e) $a_1 = -2$, $a_3 = -8$, $a_6 = -64$. Cada número es el doble del anterior.

f) $a_1 = 1$, $a_3 = 3$, $a_6 = 13$. Cada número es la suma de los dos anteriores.

002 **Construye una sucesión que cumpla que:**

a) El primer término es 5 y cada uno de los siguientes es la suma del anterior más 3.

b) El primer término es 12 y cada uno de los siguientes es el anterior multiplicado por 3.

a) 5, 8, 11, 14, 17, ...

b) 12, 36, 108, 324, 972, ...

003 **Haz una sucesión con términos $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, siendo los siguientes términos la suma de los tres anteriores.**

2, 3, 4, 9, 16, 29, ...

004 **Escribe los cuatro primeros términos de la sucesión con término general:**

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$ **b)** $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$

a) $a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ $a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$

$a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ $a_4 = 4^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6$

b) $a_1 = \dfrac{1+4}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{5}{3}$ $a_3 = \dfrac{3+4}{2 \cdot 3 + 1} = \dfrac{7}{7} = 1$

$a_2 = \dfrac{2+4}{2 \cdot 2 + 1} = \dfrac{6}{5}$ $a_4 = \dfrac{4+4}{2 \cdot 4 + 1} = \dfrac{8}{9}$

005 **Obtén los cuatro primeros términos de cada sucesión.**

a) $a_1 = -1,\ a_n = n + a_{n-1}$ **b)** $a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1}^2 - 3n$

a) $a_n = n + a_{n-1} \rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 2 + (-1) = 1,\ a_3 = 3 + 1 = 4$

$a_4 = 4 + 4 = 8$

b) $a_n = 2 \cdot a_{n-1}^2 - 3n$

$a_1 = 2,\ a_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

$a_3 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$

$a_4 = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 4 = 2 - 12 = -10$

006 **Invéntate el término general de una sucesión y calcula el valor de los términos 13, 25 y 64.**

$a_n = 2n^2 + 1$ $a_{13} = 339$ $a_{25} = 1.251$ $a_{64} = 8.193$

007 **Escribe el término general de estas sucesiones.**

a) 2, 3, 4, 5, 6, … **c) 5, 10, 15, 20, 25, …**

b) 3, 6, 9, 12, 15, … **d) 8, 11, 14, 17, 20, …**

a) $a_n = n + 1$ b) $a_n = 3n$ c) $a_n = 5n$ d) $a_n = 5 + 3n$

008 **Determina si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.**

a) 1, 0, –1, –2, … **c) 2, 4, 7, 11, 16, …** **e) 11, 10, –1, –2, …**

b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, … **d) 1, 4, 9, 16, 25, …**

a) $a_2 - a_1 = 0 - 1 = -1$ $a_3 - a_2 = -1 - 0 = -1$

$a_4 - a_3 = -2 - (-1) = -1 \rightarrow d = -1 \rightarrow$ Sí lo es.

b) $a_2 - a_1 = 5 - 4 = 1$ $a_3 - a_2 = 6 - 5 = 1$ $a_4 - a_3 = 7 - 6 = 1$

$a_5 - a_4 = 8 - 7 = 1 \rightarrow d = 1 \rightarrow$ Sí lo es.

c) $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$ $a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3 \rightarrow$ No lo es.

d) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ $a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ No lo es.

e) $a_2 - a_1 = 10 - 11 = -1$ $a_3 - a_2 = -1 - 10 = -11 \rightarrow$ No lo es.

009 **En una progresión aritmética, $a_1 = 4{,}8$ y $a_2 = 5{,}6$. Calcula.**

a) La diferencia, d. **b) El término a_8.**

a) $d = 5{,}6 - 4{,}8 = 0{,}8$ b) $a_8 = 4{,}8 + 7 \cdot 0{,}8 = 10{,}4$

010 **En una progresión aritmética, el término $a_4 = 12$ y la diferencia $d = -3$. Calcula a_1 y a_8.**

$12 = a_1 + 3 \cdot (-3) \rightarrow a_1 = 12 + 9 = 21 \rightarrow a_n = 21 + (n - 1) \cdot (-3)$

$a_8 = 21 + (8 - 1) \cdot (-3) = 21 - 21 = 0$

011 **Halla el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$ **b) 25, 22, 19, 16, ...**

a) $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$

b) $d = 22 - 25 = -3 \rightarrow a_n = 25 - (n-1) \cdot 3 = 28 - 3n$

012 **En una progresión aritmética, el primer término es 5 y la diferencia −2. Determina a_n.**

$a_1 = 5, d = -2 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 - (n-1) \cdot 2 = 7 - 2n$

013 **En una progresión aritmética, el tercer término es 9 y la diferencia 7. Halla el primer término y el término general.**

$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d \rightarrow 9 = a_1 + 2 \cdot 7 \rightarrow a_1 = -5$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -5 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 12$

014 **En una progresión aritmética, $a_6 = 17$ y $a_9 = 23$. Calcula a_1 y el término general.**

$23 = 17 + (9-6) \cdot d \rightarrow d = 6 : 3 = 2 \rightarrow 17 = a_1 + 5 \cdot 2 \rightarrow$

$\rightarrow a_1 = 17 - 10 = 7, a_n = 7 + (n-1) \cdot 2$

015 **Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ...**

$d = 7 - 3 = 4 \rightarrow a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$

$$S_{10} = \frac{3+39}{2} \cdot 10 = 210$$

016 **Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.**

$a_{25} = 10 - 5 \cdot 25 = 10 - 125 = -115$

$a_1 = 10 - 5 \cdot 1 = 5$

$$S_{25} = \frac{5 - 115}{2} \cdot 25 = -1.375$$

017 **Quiero colocar 7 filas de macetas de tal manera que en la primera fila pondré 3 macetas, y cada una de las siguientes filas tendrá 3 macetas más que la anterior. ¿Cuántas macetas colocaré en total?**

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n$

$a_1 = 3, a_7 = 3 + 6 \cdot 3 = 21$

$$S_7 = \frac{3+21}{2} \cdot 7 = 84 \text{ macetas}$$

018 **Determina si son progresiones geométricas.**

a) 1, 5, 25, 125, 625, ...
b) 7, 14, 28, 56, 112, ...
c) –1, –2, –4, –8, –16, ...
d) 3, 9, 24, 33, ...
e) 4, 4, 4, 4, 4, ...

a) $\frac{5}{1} = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = 5 = r \rightarrow$ Sí lo es.

b) $\frac{14}{7} = \frac{28}{14} = \frac{56}{28} = \frac{112}{56} = 2 = r \rightarrow$ Sí lo es.

c) $\frac{-2}{-1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-8}{-4} = \frac{-16}{-8} = 2 = r \rightarrow$ Sí lo es.

d) $\frac{9}{3} \neq \frac{24}{9} \rightarrow$ No lo es.

e) $\frac{4}{4} = \frac{4}{4} = \frac{4}{4} = \frac{4}{4} = 1 = r \rightarrow$ Sí lo es.

019 **Halla el término general y el término a_6.**

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{45}, \ldots$
b) $3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \ldots$

a) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{5}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}$

Este caso no es una progresión pues $\frac{2}{5} \neq \frac{2}{3}$

b) $a_n = 3 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_2 = 3 \cdot r = 3\sqrt{3} \rightarrow r = \sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow a_n = 3 \cdot (\sqrt{3})^{n-1} \rightarrow a_6 = 3 \cdot (\sqrt{3})^5 = 27\sqrt{3} = 46{,}765$

020 **En una progresión geométrica, $a_2 = 2$ y $a_4 = \frac{1}{2}$. Calcula a_n y a_5.**

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r = 2 \\ a_4 = a_1 \cdot r^3 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{2.^a : 1.^a} r^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

Sustituimos $r = \frac{1}{2}$ en la 1.ª ecuación: $2 = a_1 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 4$

y comprobamos que se cumple la 2.ª ecuación: $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Si $r = -\frac{1}{2}$ en la 1.ª ecuación: $2 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow a_1 = -4$

y comprobamos que se cumple la 2.ª ecuación:

$$(-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego hay dos soluciones: $a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_n = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_5 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \text{ y } a_5 = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1} = (-4)\cdot\frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$$

021 **Dada la sucesión: 2; 3; 4,5; 6,75; 10,125; ...**

a) Comprueba que es una progresión geométrica. Halla su razón.

b) Calcula su término general.

c) Halla la suma de sus 10 primeros términos.

a) $\frac{3}{2} = \frac{4{,}5}{3} = \frac{6{,}75}{4{,}5} = \frac{10{,}125}{6{,}75} = 1{,}5 \rightarrow$ Sí lo es.

b) $a_n = 2\cdot 1{,}5^{n-1}$

c) $S_{10} = \frac{2\cdot(1{,}5^{10}-1)}{1{,}5-1} = \frac{113{,}33}{0{,}5} = 226{,}66$

022 **Halla la suma de los 7 primeros términos de la progresión: $3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \ldots$**

$a_2 = a_1\cdot r \rightarrow 3\sqrt{3} = 3\cdot r \rightarrow r = \sqrt{3} \rightarrow a_n = 3\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$

$a_7 = 3\cdot(\sqrt{3})^6 = 3\cdot 3^3 = 81$

$$S_7 = \frac{3\cdot(\sqrt{3^7}-1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\cdot(3^3\cdot\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = 187{,}55$$

023 **Una ameba se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?**

En 10 horas $= 10\cdot 60 = 600$ minutos se habrán producido: $600/5 = 120$ biparticiones. Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 2$. Por tanto: $a_{120} = 1\cdot 2^{120-1} = 6{,}646\cdot 10^{35}$.

024 **Calcula el término general y la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones geométricas.**

a) $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$ **b) $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{10}$**

a) $a_n = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow S = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\frac{1}{2}} = 10$

b) $a_n = 2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \rightarrow S = \dfrac{2}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{2}{\frac{9}{10}} = \dfrac{20}{9}$

025 **Halla, si es posible, la suma de los infinitos términos de estas progresiones.**

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{45}, \ldots$ **b)** $3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \ldots$

a) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{5} \neq \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}$

No podemos calcular la suma porque no es una progresión geométrica.

b) $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 3\sqrt{3} = 3 \cdot r \rightarrow r = \sqrt{3}$

La razón es mayor que la unidad; no podemos calcular su suma (es infinita).

026 **En una progresión geométrica, $S = 20$ y $a_1 = 5$. ¿Cuánto vale la razón?**

$$S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow 20 = \frac{5}{1-r} \rightarrow 1-r = \frac{5}{20} \rightarrow 1-r = \frac{1}{4} \rightarrow 1-\frac{1}{4} = r \rightarrow r = \frac{3}{4}$$

027 **Halla el producto de los 4 primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = 5$.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_4 = 3 \cdot 5^3 = 375 \rightarrow P_4 = \sqrt{(3 \cdot 375)^4} = (1.125)^2 = 1.265.625$$

028 **En una progresión geométrica, $a_4 = 12$ y $r = 3$. Halla el producto de los 10 primeros términos.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 12 = a_1 \cdot 3^3 \rightarrow a_1 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 \rightarrow a_{10} = \frac{4}{9} \cdot 3^9 = 4 \cdot 3^7 = 8.748$$

$$P_{10} = \sqrt{\left(\frac{4}{9} \cdot 8.748\right)^{10}} = (3.888)^5 = 8{,}884 \cdot 10^{17}$$

029 **Dada una progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, calcula P_6.**

$$a_6 = 4 \cdot 2^5 = 128 \rightarrow P_6 = \sqrt{(4 \cdot 128)^6} = 134.217.728$$

030 **Halla la razón de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $P_5 = 1.024$.**

$$P_5 = 1.024 = \sqrt{(1 \cdot a_5)^5} \xrightarrow{a_5 = r^4} 1.024 = \sqrt{r^{20}} \rightarrow r^{10} = 1.024 \rightarrow r = 2$$

031 **Calcula el capital obtenido invirtiendo 200 € al 2 % anual durante 10 años.**

$$C_{10} = 200 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} = 200 \cdot 1{,}22 = 243{,}80 \text{ €}$$

032 **Halla el capital que se obtendría al invertir 50 céntimos de euro al 5 % anual durante un siglo. ¿Cuál sería el capital si el rédito fuera del 1 %?**

$$C_{100} = 0{,}50 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{100} = 65{,}75\ €$$

033 **Obtén el capital que, con un interés compuesto del 1 % mensual, produce 3.000 € en 3 años.**

$$3.000 = C \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{36} \rightarrow 3.000 = C \cdot 1{,}43 \rightarrow C = 2.097{,}90\ €$$

034 **Determina el capital que, con un interés compuesto del 10 % anual, produce 133,10 € en 3 años.**

$$133{,}10 = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{3} \rightarrow 133{,}10 = C \cdot 1{,}331 \rightarrow C = 100\ €$$

ACTIVIDADES

035 ● **Escribe los siguientes términos de estas sucesiones.**

a) 5, 6, 7, 8, 9, …

b) 30, 20, 10, 0, –10, …

c) 7, 14, 21, 28, 35, …

d) 1, 5, 25, 125, …

¿Qué criterio de formación sigue cada una de ellas?

a) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … → Aumenta de 1 en 1.

b) 30, 20, 10, 0, –10, –20, –30, –40, … → Disminuye de 10 en 10.

c) 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, … → Aumenta de 7 en 7.

d) 1, 5, 25, 125, 625, 3.125, 15.625, … → Aumenta multiplicando por 5.

036 ●● **Dada la sucesión: 1, 8, 27, 64, …**

a) ¿Cuál es su sexto término?

b) ¿Y su criterio de formación?

a) $6^3 = 216$

b) $a_n = n^3$

037 ●● **La sucesión 1, 4, 9, 16, 25, … tiene por término general $a_n = n^2$. Obtén el término general de las sucesiones.**

a) 2, 8, 18, 32, 50, …

b) 3, 6, 11, 18, 27, …

c) 4, 9, 16, 25, …

d) 16, 25, 36, 49, …

a) $a_n = 2n^2$

b) $a_n = n^2 + 2$

c) $a_n = (n + 1)^2$

d) $a_n = (n + 3)^2$

038 **La sucesión 2, 4, 6, 8, 10, … tiene por término general $a_n = 2n$. Determina el término general de las sucesiones.**

a) −1, 1, 3, 5, 7, …

b) 6, 8, 10, 12, …

c) −2, −4, −6, −8, …

d) 6, 12, 18, 24, 30, …

a) $a_n = 2n - 3$

b) $a_n = 2n + 4$

c) $a_n = -2n$

d) $a_n = 6n$

039 **Halla los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es:**

a) $a_n = 2^n$

b) $a_n = (-3)^{n+2}$

c) $a_n = 5 - 3n$

d) $a_n = 2 + 4(n + 1)$

e) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

f) $a_n = n^2 + 3n - 2$

g) $a_n = \frac{n+3}{n^2}$

a) $a_n = 2^n \rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

b) $a_n = (-3)^{n+2} \rightarrow (-3)^3, (-3)^4, (-3)^5, (-3)^6, (-3)^7, \dots =$
$= -27, 81, -243, 729, -2.187, \dots$

c) $a_n = 5 - 3n \rightarrow 2, -1, -4, -7, -10, \dots$

d) $a_n = 2 + 4 \cdot (n + 1) \rightarrow 10, 14, 18, 22, 26, \dots$

e) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$

f) $a_n = n^2 + 3n - 2 \rightarrow 2, 8, 16, 26, 38, \dots$

g) $a_n = \frac{n+3}{n^2} \rightarrow 4, \frac{5}{4}, \frac{6}{9}, \frac{7}{16}, \frac{8}{25}, \dots$

040 **Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a) El primer término es 5 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

b) El primer término es 2 y cada uno de los siguientes se obtiene multiplicando el anterior por $\frac{1}{2}$.

c) El primer término es 3, el segundo 4 y los siguientes son la suma de los dos anteriores.

d) El primer término es 8 y los siguientes son cada uno la mitad del anterior.

a) 5, 7, 9, 11, 13

b) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

c) 3, 4, 7, 11, 18

d) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$

041 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA EL TÉRMINO GENERAL DE ALGUNAS SUCESIONES DE FRACCIONES?

Halla el término general de la siguiente sucesión.

$$\frac{4}{1}, \frac{9}{3}, \frac{16}{5}, \frac{25}{7}, \dots$$

PRIMERO. Se busca el criterio de formación de los numeradores y se determina su término general.

4, 9, 16, 25, … $\longrightarrow$ El primer término es el cuadrado de 2.
El segundo es el cuadrado de 3.
El tercero, el cuadrado de 4…

Término general $\longrightarrow$ $(n+1)^2$

SEGUNDO. Se busca el criterio de formación de los denominadores y se determina su término general.

1, 3, 5, 7, … $\longrightarrow$ Sucesión de números impares.

Término general $\longrightarrow$ $2n-1$

TERCERO. El término general de la sucesión será el cociente entre los dos términos generales.

Término general $\longrightarrow$ $\dfrac{(n+1)^2}{2n-1}$

042 ●●

La sucesión 1, 2, 3, 4, 5, … tiene por término general $a_n = n$.
La sucesión 2, 4, 8, 16, … tiene por término general $a_n = 2^n$.
Halla el término general de estas sucesiones.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

b) $4, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \dots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$ c) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ d) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

043 ●

Obtén los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

c) $c_1 = -1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1,\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-3}$

d) $d_1 = 2,\ d_n = d_{n-1} + n$

a) 1, 3, −2, 5, −7

b) $2, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

c) −1, 0, 1, 0, 1

d) 2, 4, 7, 11, 16

044 Halla la regla de formación de estas sucesiones recurrentes.

a) 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 3, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1, …

c) 1, 2, 3, 6, 11, 20, …

d) –5, 1, 6, 5, –1, –6, …

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

c) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = -5$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

045 Halla la diferencia y el término general de estas progresiones aritméticas.

a) 10, 7, 4, 1, …

b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, …

c) 7, 2, –3, –8, …

d) 16, 8, 0, –8, …

a) $d = 7 - 10 = -3 \rightarrow a_n = 10 - 3 \cdot (n - 1) = 13 - 3n$

b) $d = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \rightarrow a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (n - 1) = \sqrt{2}n$

c) $d = 2 - 7 = -5 \rightarrow a_n = 7 - 5 \cdot (n - 1) = 12 - 5n$

d) $d = 8 - 16 = -8 \rightarrow a_n = 16 - 8 \cdot (n - 1) = 24 - 8n$

046 Con los datos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 13$ y $a_2 = 5$, calcula d, a_8 y a_n.

b) $b_1 = 4{,}5$ y $b_2 = 6$, calcula d, b_{10} y b_n.

c) $c_2 = 13$ y $d = -5$, calcula c_1, c_8 y c_n.

d) $h_1 = 8$ y $h_3 = 3$, calcula d, h_{10} y h_n.

a) $5 = 13 + (2 - 1) \cdot d \rightarrow d = -8 \rightarrow a_8 = 13 + (8 - 1) \cdot (-8) = -43$
$a_n = 13 + (n - 1) \cdot (-8)$

b) $6 = 4{,}5 + (2 - 1) \cdot d \rightarrow d = 1{,}5 \rightarrow b_{10} = 4{,}5 + (10 - 1) \cdot 1{,}5 = 18$
$b_n = 4{,}5 + (n - 1) \cdot 1{,}5$

c) $13 = c_1 + (2 - 1) \cdot (-5) \rightarrow c_1 = 18 \rightarrow c_8 = 18 + (8 - 1) \cdot (-5) = -17$
$c_n = 18 + (n - 1) \cdot (-5)$

d) $3 = 8 + (3 - 1) \cdot d \rightarrow d = -2{,}5 \rightarrow h_{10} = 8 + (10 - 1) \cdot (-2{,}5) = -14{,}5$
$h_n = 8 + (n - 1) \cdot (-2{,}5)$

047 Considera la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, …

a) ¿Es una progresión aritmética?

b) Halla su término general.

c) Calcula el término 30.

a) Sí, es una progresión aritmética; $d = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2$.

b) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$

c) $a_{30} = 2 \cdot 30 = 60$

048 Dada la sucesión $\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0, \ldots$:

a) Comprueba que es una progresión aritmética.

b) Halla su término general.

a) $\frac{4}{3} - \frac{5}{3} = 1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = d$

b) $a_n = \frac{5}{3} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5-(n-1)}{3} = \frac{6-n}{3}$

049 Sabiendo que los términos de una progresión aritmética se pueden obtener con la calculadora, mediante el sumando constante:

$$d \; \boxed{+} \; \boxed{+} \; a_1 \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \boxed{=} \; \ldots$$

obtén los 10 primeros términos de las progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 8$ y $d = 5$

b) $b_1 = 3$ y $d = -5$

c) $c_1 = -10$ y $d = 3$

d) $h_1 = -12$ y $d = -8$

a) 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53

b) 3, −2, −7, −12, −17, −22, −27, −32, −37, −42

c) −10, −7, −4, −1, 2, 5, 8, 11, 14, 17

d) −12, −20, −28, −36, −44, −52, −60, −68, −76, −84

050 En una progresión aritmética, $a_{10} = 32$ y $d = 5$. Averigua el valor del término a_{25}.

$a_{25} = a_{10} + (25 - 10) \cdot d \rightarrow a_{25} = 32 + 15 \cdot 5 = 32 + 75 = 107$

051 En una progresión aritmética, $a_3 = \frac{1}{2}$ y $a_4 = \frac{5}{6}$.

a) Obtén a_1 y d.

b) Determina el término general.

a) $d = a_4 - a_3 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow a_1 = a_3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$

b) $a_n = -\frac{1}{6} + (n-1) \cdot \frac{1}{3}$

052 En una progresión aritmética, $a_8 = 12$ y $a_{12} = 32$. Calcula la diferencia y el término general.

$a_{12} = a_8 + 4d \rightarrow d = \frac{a_{12} - a_8}{4} = \frac{32 - 12}{4} = 5$

$a_1 = a_8 - 7 \cdot d = 12 - 35 = -23$

$a_n = -23 + 5 \cdot (n-1) = -28 + 5n$

053 **En una progresión aritmética, $a_1 = 7$ y $d = 6$. Averigua el lugar que ocupa un término que vale 79.**

$$a_1 = 7,\ d = 6 \rightarrow a_n = 7 + (n-1)\cdot 6 \rightarrow 79 = 7 + 6\cdot(n-1) \rightarrow$$
$$\rightarrow 72 = 6\cdot(n-1) \rightarrow 12 = n-1 \rightarrow n = 13$$

054 **Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) **1,73; 1,77; 1,81; 1,85, ...**

b) **5, 2, –1, –4, –7, ...**

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

d) $\frac{1}{a}, \frac{3}{a}, \frac{5}{a}, \frac{7}{a}, \ldots$

a) $a_1 = 1{,}73;\ d = 0{,}04 \rightarrow a_n = 1{,}73 + (n-1)\cdot 0{,}04 = 1{,}69 + 0{,}04n$

b) $a_1 = 5,\ d = -3 \rightarrow a_n = 5 - 3\cdot(n-1) = 8 - 3n$

c) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-1) = \frac{1}{2}n$

d) $a_1 = \frac{1}{a},\ d = \frac{2}{a} \rightarrow a_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}\cdot(n-1) = -\frac{1}{a} + \frac{2n}{a}$

055 **Halla el término general de una progresión aritmética en la que $a_4 = 13$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**

$a_4 = a_2 + 2d = 13 \rightarrow a_2 = 13 - 2d$

Sustituimos para hallar d:

$$a_2 + a_{11} = 41 \rightarrow a_2 + a_2 + (11-2)\cdot d = 41 \rightarrow 2a_2 + 9d = 41 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2\cdot(13-2d) + 9d = 41 \rightarrow 26 - 4d + 9d = 41 \rightarrow$$
$$\rightarrow 5d = 41 - 26 = 15 \rightarrow d = 3$$

Y sustituyendo tenemos que:

$$a_2 = 13 - 2d \rightarrow a_2 = 13 - 2\cdot 3 = 13 - 6 = 7$$

Como $a_2 = a_1 + d \rightarrow 7 = a_1 + 3 \rightarrow a_1 = 4$.

El término general será: $a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 = 1 + 3n$.

056 **En una progresión aritmética de 8 términos, el primero y el último suman 21. El tercer término es 6. Escribe la progresión.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_8 = 21 \\ a_3 = a_1 + 2d = 6 \end{array}\right\} \rightarrow a_1 = 6 - 2d$$

$$a_1 + a_8 = 21 \rightarrow a_1 + a_1 + (8-1)\cdot d = 21 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2a_1 + 7d = 21 \rightarrow 2\cdot(6-2d) + 7d = 21 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 4d + 7d = 21 \rightarrow 3d = 21 - 12 \rightarrow 3d = 9 \rightarrow d = 3$$

Y despejando: $a_1 = 6 - 2d = 6 - 2\cdot 3 = 0$.

Luego $a_n = (n-1)\cdot 3 = 3n - 3 \rightarrow 0, 3, 6, 9, \ldots$

057 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE INTERPOLAN TÉRMINOS QUE FORMEN UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA?

Interpola tres términos entre 1 y 9 para que formen una progresión aritmética.

PRIMERO. Se calcula a_1 y d.

La progresión que se quiere construir será de la forma: 1, a_2, a_3, a_4, 9.

Por tanto: $a_1 = 1$ y $a_5 = 9$.

Como tiene que ser una progresión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{n=5} 9 = 1 + (5-1)d$$

$$9 = 1 + 4d \rightarrow d = \frac{8}{4} = 2$$

SEGUNDO. Se hallan los términos intermedios.

$$a_2 = 1 + (2-1)\cdot 2 = 3$$
$$a_3 = 1 + (3-1)\cdot 2 = 5$$
$$a_4 = 1 + (4-1)\cdot 2 = 7$$

Los tres términos que hay que interpolar serán 3, 5 y 7.

058 **Interpola 6 términos entre 1 y 3 para que formen una progresión aritmética.**

$$a_1 = 1,\ a_8 = 3,\ d = (3-1) : (8-1) = \frac{2}{7}$$

Los 6 términos son: $\frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}, \frac{19}{7}$.

059 **Interpola 5 términos entre los números $-\frac{7}{2}$ y $\frac{7}{2}$ para que formen una progresión aritmética.**

$$a_1 = -\frac{7}{2},\ a_7 = \frac{7}{2},\ d = \frac{\frac{7}{2} + \frac{2}{7}}{7-1} = \frac{53}{84}$$

Los 5 términos son: $\frac{29}{84}, \frac{41}{42}, \frac{135}{84}, \frac{47}{21}, \frac{241}{84}$.

060 **Sabiendo que estas sucesiones son progresiones aritméticas, completa los términos que faltan.**

a) $\square, \frac{1}{2}, \square, \frac{5}{6}, \square, \square$

b) $\square$; 1,5; $\square$; 2,5; $\square$

c) $\square, \frac{1}{4}, \square, \square, \frac{1}{2}, \square$

d) $\square, \square, \square, \frac{5}{3}, \square, \frac{8}{3}$

a) $d = \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{4-2} = \dfrac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}$

b) $d = (2{,}5 - 1{,}5) : (4 - 2) = 0{,}5 \rightarrow 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3$

c) $d = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}}{5 - 2} = \dfrac{1}{12} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{12}$

d) $d = \dfrac{\dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3}}{6 - 4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{8}{3}$

061 ● **Sea $a_n = 4n + 1$ el término general de una progresión aritmética. Calcula a_{25} y la suma de los 20 primeros términos.**

$a_{25} = 4 \cdot 25 + 1 = 101 \rightarrow a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{5 + 81}{2} \cdot 20 = 860$$

062 ● **En una progresión aritmética, $a_8 = 40$ y $d = 7$. Halla el primer término y la suma de los 10 primeros términos.**

$a_8 = a_1 + 7 \cdot d \rightarrow 40 = a_1 + 7 \cdot 7 \rightarrow a_1 = -9$

$a_{10} = a_1 + 9d \rightarrow a_{10} = -9 + 9 \cdot 7 = 54$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \rightarrow S_{10} = \frac{-9 + 54}{2} \cdot 10 = 225$$

063 ● **Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética si el tercer término es 24 y el décimo es 66.**

$a_3 = 24,\ a_{10} = a_3 + 7d \rightarrow 66 = 24 + 7d \rightarrow 42 = 7d \rightarrow d = 6$

$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow 24 = a_1 + 2 \cdot 6 \rightarrow a_1 = 12$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n = \frac{12 + 66}{2} \cdot 10 = 390$$

064 ● **Halla la suma de los 100 primeros números pares.**

$a_1 = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 2 + 2 \cdot (n - 1) = 2n \rightarrow$

$\rightarrow a_{100} = 2 + 2 \cdot 99 = 200$

$$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot n = \frac{2 + 200}{2} \cdot 100 = 10.100$$

065 ●● **Calcula la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 200 y 301.**

$a_1 = 201,\ a_n = 300 \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow 300 = 201 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{300 - 201}{3} = n - 1 \rightarrow n - 1 = 33 \rightarrow n = 34$

$$S_{34} = \frac{a_1 + a_{34}}{2} \cdot n = \frac{201 + 300}{2} \cdot 34 = 8.517$$

066 Halla la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$.

$$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 40 = 7 + 3d \rightarrow d = 11$$

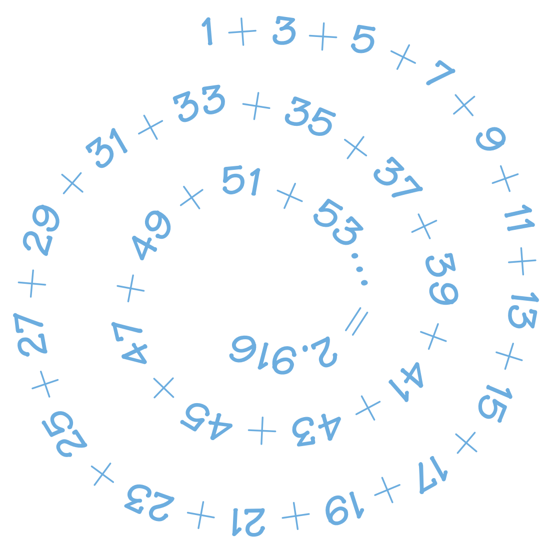
$$a_{15} = a_1 + 14d \rightarrow a_{15} = 7 + 14 \cdot 11 = 161$$

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot n \rightarrow S_{15} = \frac{7 + 161}{2} \cdot 15 = 1.260$$

067 Halla la suma de los n primeros números naturales.

$$a_n = n \rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n^2 + n}{2}$$

068 ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 2.916?



Los números impares forman una sucesión cuyo término general es $a_n = 2n - 1$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 2.916 = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n \rightarrow 2.916 = n^2 \rightarrow n = 54$$

Luego se trata de los 54 primeros números impares.

069 Calcula la suma y el último término de una progresión aritmética de diferencia 4, sabiendo que tiene 12 términos y el primero vale 7.

$$a_{12} = 7 + (12 - 1) \cdot 4 = 51,\ S_{12} = \frac{(7 + 51) \cdot 12}{2} = 348$$

070 ●●● **Halla la suma de los términos de una progresión aritmética limitada cuyo primer término es 4, el último 40 y la diferencia 3.**

$$40 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow n = 13,\ S_{13} = \frac{(4 + 40) \cdot 13}{2} = 286$$

071 ●●● **La suma de los 5 primeros términos de una progresión aritmética es 2,5. La suma de los 8 primeros términos es 5,2. Escribe la progresión.**

$$\left.\begin{array}{l} S_5 = \dfrac{a_1 + a_5}{2} \cdot n = 2{,}5 \rightarrow (a_1 + a_5) \cdot 5 = 5 \\ S_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot n = 5{,}2 \rightarrow (a_1 + a_8) \cdot 8 = 10{,}4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_5 = 1 \\ a_1 + a_8 = 1{,}3 \end{array}\right\} \rightarrow a_8 - a_5 = 3d = 0{,}3 \rightarrow d = 0{,}1$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$a_1 + a_5 = 1 \rightarrow 2a_1 + 4d = 1 \rightarrow 2a_1 + 0{,}4 = 1 \rightarrow 2a_1 = 0{,}6 \rightarrow a_1 = 0{,}3$$

La progresión es 0,3; 0,4; 0,5; 0,6, …

072 ● **Calcula la diferencia o la razón de las siguientes progresiones y halla su término general.**

a) 3, 6, 12, 24, …
b) 10, 7, 4, 1, …
c) 1, 1, 1, 1, …
d) 16, 8, 4, 2, 1, …
e) 16, 8, 0, –8, …
f) 3, 9, 15, 21, …

a) $r = 6 : 3 = 2;\ a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $d = 7 - 10 = -3;\ a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3)$

c) $r = 1;\ a_n = 1$

d) $r = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5;\ a_n = 16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$

e) $d = 8 - 16 = -8;\ a_n = 16 + (n - 1) \cdot (-8) = (n - 3) \cdot (-8)$

f) $d = 9 - 3 = 6;\ a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$

073 ● **En una progresión geométrica, $a_1 = 4$ y $a_2 = 3$. Obtén el término general y a_{20}.**

$$3 = 4r \rightarrow r = \frac{3}{4} \rightarrow a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad a_{20} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$$

074 ● **En una progresión geométrica, $a_1 = 6$ y $a_3 = 30$. Halla a_4 y el término general.**

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 30 = 6r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{5}$$

Hay dos soluciones: $a_n = 6 \cdot (\pm\sqrt{5})^{n-1} \rightarrow a_4 = 6 \cdot (\pm\sqrt{5})^3 = \pm 30\sqrt{5}$

075 Calcula.

a) El término general de una progresión geométrica en la que $a_1 = 3$ y $r = 5$.

b) El término 7.

a) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

b) $a_7 = 3 \cdot 5^6 = 46.875$

076 **Dada la sucesión $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$**

a) Comprueba que es una progresión geométrica.

b) Calcula el término 10.

a) $\frac{2}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{27} : \frac{2}{9} = \frac{2}{81} : \frac{2}{27} = \frac{1}{3} = r$

b) $a_{10} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{2}{3^{10}} = \frac{2}{59.049}$

077 **Halla los términos que faltan en los huecos de las siguientes progresiones geométricas.**

a) 1; 0,1; □; 0,001; □

b) □, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, □, $\frac{1}{54}$, □

c) □, $\frac{1}{3}$, □, $\frac{1}{12}$, □

d) □, $\frac{3}{2}$, □, □, $\frac{81}{4}$

a) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001

b) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \frac{27}{2 \cdot \sqrt[3]{4}}, \frac{81}{4}$

078 **El término general de la progresión 3, 6, 12, 24, ... es:**

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3$

b) $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) No se puede calcular.

c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

079 En una progresión geométrica de términos positivos, $a_2 = 60$ y $a_4 = 2.400$. Obtén:

a) Los 5 primeros términos.
b) El término general.
c) Los 10 primeros términos.

$$2.400 = 60 \cdot r^2 \rightarrow r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

a) $3\sqrt{10}, 60, 120\sqrt{10}, 2.400, 2.800\sqrt{10}$

b) $a_n = 3\sqrt{10} \cdot (2\sqrt{10})^{n-1}$

c) $3\sqrt{10}, 60, 120\sqrt{10}, 2.400, 2.800\sqrt{10}, 96.000,$
$192.000\sqrt{10}, 3.840.000, 7.680.000\sqrt{10}, 153.600.000$

080 En una progresión geométrica, $a_2 = 10$ y $a_5 = 10.000$. Calcula r y los 10 primeros términos de la progresión. ¿Cuál es el término general?

$10.000 = 10 \cdot r^3 \rightarrow r = 10,\ a_n = 10^{n-1}$

Los 10 términos son: 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000, 10.000.000, 100.000.000, 1.000.000.000.

081 Cierto término de una progresión geométrica vale 3.720.087. Si el primer término es 7 y la razón es 3, ¿de qué término estamos hablando?

$3.720.087 = 7 \cdot 3^{n-1} \rightarrow 3^{n-1} = 531.441 \rightarrow n - 1 = 12 \rightarrow n = 13$

082 Dos términos consecutivos de una progresión geométrica valen 3 y 4. Averigua qué lugar ocupan si $a_1 = \dfrac{27}{16}$.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \ \cdot r^{n-1} = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{27}{16} \cdot r^n = 4 \end{array}\right\} \text{Dividiendo obtenemos: } \frac{4}{3} = r.$$

Y sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$3 = \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{48}{27} = \frac{16}{9} \underset{(:\,3)}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow n - 1 = 2 \rightarrow n = 3$$

Se trata de los términos 3.º y 4.º.

083 En una progresión geométrica, el primer término es 5 y la razón es 3. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$a_1 = 5,\ r = 3$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_8 = \frac{5 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 16.400$$

084 En una progresión geométrica, el segundo término es 2 y el cuarto es $\frac{1}{2}$. Halla la suma de los 6 primeros términos.

$$a_2 = 2,\ a_4 = \frac{1}{2} \rightarrow a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{2} = 2 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\pm\frac{1}{2}\right) \rightarrow a_1 = \pm 4$$

$$S_6 = \frac{4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{63}{8} \quad \text{o} \quad S_6 = \frac{(-4) \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)} = -\frac{21}{8}$$

085 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA SUMA DE LOS INFINITOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA?

Calcula la suma de los infinitos términos de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3$ **y** $r = 2$

b) $b_1 = -1$ **y** $r = 2$

c) $c_1 = -2$ **y** $r = \frac{1}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}$ **y** $r = -2$

PRIMERO. Se calcula la razón de la progresión.

SEGUNDO. Se analizan los distintos casos.

- Si $r > 1$, la suma siempre es $+\infty$ o $-\infty$.

  a) $r = 2 > 1$. La sucesión es:

  $$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

  La suma de todos los términos es $+\infty$.

  b) $r = 2 > 1$. La sucesión es:

  $$-1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, \ldots$$

  La suma de todos los términos es $-\infty$.

- Si $-1 < r < 1$, se aplica la fórmula $S = \frac{a_1}{1 - r}$.

  c) $-1 < r = \frac{1}{3} < 1$. Se aplica la fórmula:

  $$S = \frac{c_1}{1 - r} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = -3$$

- Si $r < -1$, no se puede hallar.

  d) $r = -2 < -1$. La sucesión es:

  $$\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, -16, 32, \ldots$$

  No se puede calcular la suma de los infinitos términos.

086 **Dada una progresión geométrica en la que $a_1 = 2$ y $r = 0,1$, calcula.**

a) La suma de los 6 primeros términos.

b) La suma de los infinitos términos.

a) $S_6 = \dfrac{2 \cdot (0,1^6 - 1)}{0,1 - 1} = \dfrac{-1,999998}{-0,9} = 2,22222$

b) $S = \dfrac{2}{1 - 0,1} = \dfrac{2}{0,9} = 2,\widehat{2}$

087 **En una progresión geométrica, $a_1 = -1$ y $r = 7$. Calcula.**

a) La suma de los 10 primeros términos.

b) La suma de los infinitos términos.

a) $S_{10} = \dfrac{-1 \cdot (7^{10} - 1)}{7 - 1} = \dfrac{282.475.248}{6} = 47.079.208$

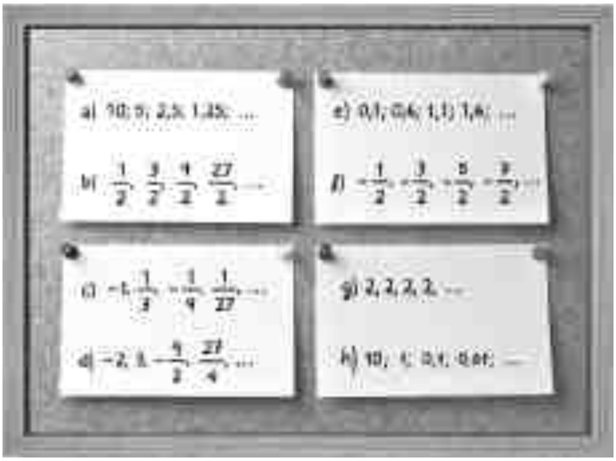
b) La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón mayor que 1 es infinito.

088 **Halla la suma de los infinitos términos de la progresión 16, 12, 9, $\dfrac{27}{4}$, ...**

$a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow 12 = 16 \cdot r \rightarrow r = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

$S = \dfrac{a_1}{1 - r} \rightarrow S = \dfrac{16}{1 - 3/4} = 64$

089 **Dadas las siguientes sucesiones, calcula, en los casos en que sea posible, la suma de sus infinitos términos.**



a) $r = \dfrac{1}{2} \rightarrow S = \dfrac{10}{1 - \dfrac{1}{2}} = 20$

b) $r = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow$ No es posible, pues $3 > 1$.

c) $r = -\dfrac{1}{3} \rightarrow S = \dfrac{-1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\dfrac{3}{4}$

d) $r = \dfrac{-3}{2} < -1 \rightarrow$ No es posible.

e) No es posible, es una sucesión aritmética y no geométrica.

f) No es posible, es una sucesión aritmética y no geométrica.

g) $r = 1$, por lo que no es posible.

h) $r = \dfrac{1}{10} \rightarrow S = \dfrac{10}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9}$

090 ●●● **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es $\dfrac{15}{4}$ y la razón es $\dfrac{1}{5}$. Halla los 4 primeros términos de la sucesión.**

$$S = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{5}} \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{5a_1}{4} \rightarrow 15 = 5a_1 \rightarrow a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5},\ a_3 = \frac{3}{25},\ a_4 = \frac{3}{125}$$

091 ●● **El sexto término de una progresión geométrica vale 18 y el cuarto es 6.**

a) Obtén el término general.

b) Halla el producto de los 10 primeros términos.

a) $a_6 = a_4 \cdot r^2 \rightarrow 18 = 6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Para $r = +\sqrt{3} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow 6 = a_1 \cdot (\sqrt{3})^3 \rightarrow a_1 = \dfrac{6}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$a_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \dfrac{2}{3} \cdot (\sqrt{3})^n$

Para $r = -\sqrt{3} \rightarrow 6 = a_1 \cdot (-\sqrt{3})^3 \rightarrow a_1 = \dfrac{6}{-3\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

$a_n = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{3})^{n-1}$

b) $a_{10} = \dfrac{2}{3} \cdot (\pm\sqrt{3})^{10} = \dfrac{2}{3} \cdot 3^5 = 2 \cdot 3^4 = 162$

$P_{10} = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \left(\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 162\right)^5 = (\pm 187{,}06)^5 = \pm 2{,}29 \cdot 10^{11}$

092 **El octavo término de una progresión geométrica es 1.458 y la razón es 3.**

a) Obtén el término general.

b) Calcula el producto de los 8 primeros términos de la progresión.

a) $a_8 = a_1 \cdot r^7 \rightarrow 1.458 = a_1 \cdot 3^7 \rightarrow a_1 = \frac{1.458}{2.187} \underset{(:\,729)}{=} \frac{2}{3} \rightarrow a_n = \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1}$

b) $P_8 = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} \rightarrow P_8 = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot 1.458\right)^8} = 972^4 = 8{,}926 \cdot 10^{11}$

093 **El quinto término de una progresión geométrica es 160 y el segundo es 20.**

a) Halla el séptimo término.

b) Obtén el producto de los 7 primeros términos de esta progresión.

a) $a_5 = a_2 \cdot r^3 \rightarrow 160 = 20 \cdot r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2$

$a_2 = a_1 \cdot r \longrightarrow 20 = a_1 \cdot 2 \rightarrow a_1 = 10$

$a_7 = a_1 \cdot r^6 \rightarrow a_7 = 10 \cdot 2^6 = 640$

b) $P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{(10 \cdot 640)^7} = 80^7 = 2{,}097 \cdot 10^{13}$

094 **El número de usuarios de un polideportivo los fines de semana comenzó siendo de 150 personas y aumentó en 30 personas cada fin de semana a partir de entonces.**

a) ¿Cuántos usuarios hubo en la semana 12?

b) ¿Y en las 10 primeras semanas?

Es una progresión aritmética, con $d = 30$.

a) $a_{12} = 150 + 11 \cdot 30 = 480$ usuarios

b) $S_{10} = \frac{(150 + 420) \cdot 10}{2} = 2.850$ usuarios

095 **Teresa ha comprado un caballo y quiere herrarlo. Para ello tienen que ponerle 20 clavos, el primero de los cuales cuesta 1 céntimo de euro y cada uno de los restantes vale 1 céntimo más que el anterior. ¿Cuánto paga en total por herrarlo?**

Se trata de una progresión aritmética, con $a_1 = 1$ y $d = 1$.

$a_{20} = 1 + 19 \cdot 1 = 20$ céntimos

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{1 + 20}{2} \cdot 20 =$

$= 210$ céntimos $= 2{,}10$ €

096 ¿Cuánto pagaría Teresa si el precio del primer clavo fuese el mismo, pero cada uno de los siguientes costara el doble que el anterior?

Se trata de una progresión geométrica, de razón $r = 2$ y $a_1 = 1$.

$$S_{20} = \frac{a_1 \cdot (r^{20} - 1)}{r - 1} \rightarrow S_{20} = \frac{1 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 1.048.575 \text{ céntimos} = 10.485,75 \text{ €}$$

097 En un aparcamiento cobran 0,25 € por la primera hora de estacionamiento y, por cada hora siguiente, el doble de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto pagaremos por estar aparcados durante 8 horas?

Es la suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica con $r = 2$ y $a_1 = 0,25 \rightarrow S_8 = \dfrac{0,25 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 63,75$ €

098 Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,2 cada año. Si al comenzar el año medía 0,75 cm, ¿qué altura tendrá dentro de 10 años? ¿Cuánto crecerá en esos 10 años?

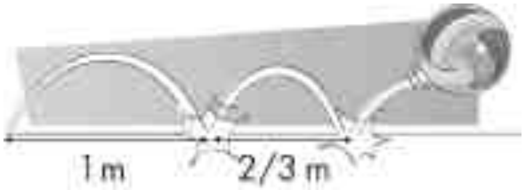
Es una progresión geométrica, con $r = 1,2$ y $a_1 = 0,75$.

$a_{10} = 0,75 \cdot 1,2^9 = 3,87$ m medirá a los 10 años, por lo que habrá crecido: $3,87 - 0,75 = 3,12$ m.

099 Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada uno de los botes que da sube a una altura igual a la mitad del bote anterior. ¿A qué altura llegará en el quinto bote?

Es una progresión geométrica, con $r = 0,5$ y $a_1 = 1$. El quinto bote es el término 6.º de la progresión: $a_6 = 1 \cdot 0,5^5 = 0,03125$ m.

100 Lanzamos un balón que da botes a lo largo de un pasillo, como se ve en la figura.



Si al séptimo bote choca con la pared y se para, ¿qué distancia habrá recorrido?

Es una progresión geométrica, con $r = \dfrac{2}{3}$ y $a_1 = 1$.

La suma de los 7 primeros términos es: $S_7 = \dfrac{1 \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^8 - 1\right)}{\dfrac{2}{3} - 1} = 2,883$ m.

101 Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se han pagado 20 €, y por la de cada uno de los restantes, se pagan 5 € más que en el anterior, siendo el coste total de 1.350 €.

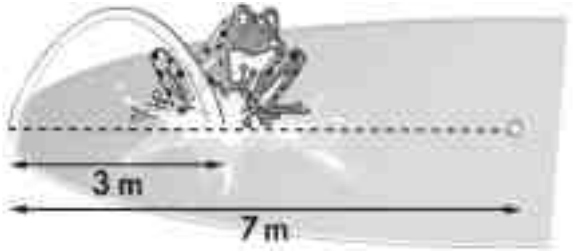
Es una progresión aritmética, con $d = 5$ y $a_1 = 20$.

$$1.350 = S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d)\cdot n}{2} = \frac{(20 + 20 + (n-1)\cdot 5)\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{5n^2 + 35n}{2} \rightarrow 5n^2 + 35n - 2.700 = 0 \rightarrow n = 20 \text{ m}$$

La solución negativa de n no la contemplamos, por no ser posible una medida de longitud negativa.

102 Una rana está en el borde de una charca circular de 7 metros de radio y quiere llegar al centro saltando. Da un primer salto de 3 metros y, después, avanza en cada uno la mitad que en el salto anterior. ¿Logrará llegar al centro?



Es una progresión geométrica, con $r = 0{,}5$ y $a_1 = 3$. La distancia máxima que recorrerá será la suma infinita de los términos.

$$S = \frac{3}{1 - 0{,}5} = 6 \text{ m},$$ por lo que no llegará al centro del estanque.

103 Durante los cuatro primeros meses de vida, un bebé ha ido ganando cada mes un 20 % de peso. Si al nacer pesaba 2.900 gramos, ¿cuál ha sido su peso al final del cuarto mes?

Es una progresión geométrica, de razón $r = 1{,}2$ y $a_1 = 2.900$.

$a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_4 = 2.900 \cdot (1{,}2)^3 = 5.011{,}2$ gramos

104 Una escalera tiene todos los peldaños iguales menos el primero, que mide 20 cm. Al subir 100 escalones, la altura ascendida es de 1.505 cm. ¿Qué altura tiene cada peldaño?

h = altura de uno de los 99 peldaños iguales

$$1.505 - 20 = 99 \cdot h \rightarrow h = \frac{1.485}{99} = 15 \text{ cm}$$

Se podría considerar que los 99 escalones forman una progresión aritmética de diferencia $d = 0$.

105 ●●● **Una bióloga está estudiando la evolución de una población de moscas.**

a) Si el número inicial de moscas es de 50 y, cada 10 días, la población de moscas se cuadruplica, halla el término general de la progresión formada por el número de moscas cada 10 días.

b) ¿Cuántas moscas habrá a los 50 días?

c) Si el precio del alimento para las moscas el primer día es de 1 €, y cada día aumenta 2 céntimos más, halla el término general de la progresión.

d) Determina el valor del alimento el día 20.

e) Calcula el valor del alimento en los 40 primeros días.

a) Es una progresión geométrica, con $r = 4$ y $a_1 = 50$, por lo que $a_n = 50 \cdot 4^{n-1}$.

b) $a_5 = 50 \cdot 4^4 = 12.800$ moscas

c) Es una progresión aritmética, con $d = 0{,}02$ y $a_1 = 1$, siendo $a_n = 1 + (n-1) \cdot 0{,}02$.

d) $a_{20} = 1 + (20-1) \cdot 0{,}02 = 1{,}38$ €

e) $S_{40} = \dfrac{(1 + 1{,}78) \cdot 40}{2} = 55{,}60$ €

106 ●● **Se depositan 5.000 € al 4 % anual el 31 de diciembre en una empresa financiera. Si no retiramos el dinero durante 6 años, ¿qué capital tendremos al finalizar cada año?**

Primer año: $C_1 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 5.200$ €

Segundo año: $C_2 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^2 = 5.408$ €

Tercer año: $C_3 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^3 = 5.624{,}32$ €

Cuarto año: $C_4 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^4 = 5.849{,}29$ €

Quinto año: $C_5 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^5 = 6.083{,}26$ €

Sexto año: $C_6 = 5.000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^6 = 6.326{,}60$ €

107 Calcula el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce en 4 años un capital final de 1.500 €.

$$1.500 = C \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 \rightarrow C = \frac{1.500}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^4} = 1.234{,}05\ €$$

108 Si un capital de 5.000 € se convierte en 6.000 € en una situación de interés compuesto al cabo de 2 años, ¿cuál es el interés al que ha estado invertido el capital inicial?

$$6.000 = 5.000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} = 1 + \frac{r}{100} \rightarrow \frac{r}{100} = \sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}095 \rightarrow \text{El interés será del } 9{,}5\ \%.$$

109 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA DE INTERÉS COMPUESTO CON AUMENTOS DE CAPITAL?

Una familia hace un plan de ahorros durante 4 años ingresando, al principio de cada año, 3.000 € a un 5 % anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero obtendrá al finalizar el plan?

PRIMERO. Se calcula el interés de cada aportación.

– El primer año ingresa 3.000 €, que permanecerán 4 años en el banco, obteniendo:

$$3.000 \cdot 1{,}05^4\ €$$

– El segundo año ingresa 3.000 €, que permanecerán 3 años en el banco, obteniendo:

$$3.000 \cdot 1{,}05^3\ €$$

– El tercer año ingresa 3.000 €, que permanecerán 2 años en el banco, obteniendo:

$$3.000 \cdot 1{,}05^2\ €$$

– El cuarto año ingresa 3.000 €, que permanecerán 1 año en el banco, obteniendo:

$$3.000 \cdot 1{,}05\ €$$

SEGUNDO. Se suman las cantidades obtenidas.

$$3.000 \cdot 1{,}05 + 3.000 \cdot 1{,}05^2 + 3.000 \cdot 1{,}05^3 + 3.000 \cdot 1{,}05^4$$

Así, se obtiene la suma de los términos de una progresión geométrica, en la que:

$$a_1 = 3.000 \cdot 1{,}05 \qquad a_4 = 3.000 \cdot 1{,}05^4 \qquad r = 1{,}05$$

$$S = \frac{a_4 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3.000 \cdot 1{,}05^5 - 3.000 \cdot 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 13.576{,}90\ €$$

110 ●●● **Rosa recibe una gratificación al principio de cada trimestre de 1.000 €. Si el dinero lo deposita en una entidad bancaria al 4 % de interés compuesto, ¿cuánto tendrá al acabar un año?**

Suponiendo que la gratificación la recibe al comienzo del trimestre, lo correspondiente al primer trimestre se convierte en $1.000 \cdot 1{,}04$, el segundo $1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{3}{4}}$, el tercero $1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{2}{4}}$ y el cuarto $1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}$.

Se calcula la suma de los términos de una progresión geométrica, con $a_1 = 1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}$ y $r = 1{,}04^{\frac{1}{4}}$.

$$S_4 = \frac{1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{5}{4}} - 1.000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}}}{1{,}04^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{1.050{,}25 - 1.009{,}85}{0{,}0099} = 4.080{,}21\ €$$

111 ●●● **En un examen las preguntas estaban ordenadas según su dificultad. La primera valía 2 puntos y cada una de las restantes valía 3 puntos más que la anterior. Si en total cuentan 40 puntos, ¿cuántas preguntas tenía el examen?**

Es una progresión aritmética, con $d = 3$ y $a_1 = 2$.

$$40 = S_n = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot 1) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2 + (n-1) \cdot 3) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{3n^2 + n}{2} \rightarrow 3n^2 + n - 80 = 0 \rightarrow n = 5 \text{ preguntas}$$

La solución negativa de n no la contemplamos, por no ser posible un número negativo de preguntas.

112 ●● **¿Puede ser el número 0 el primer término de una progresión geométrica? ¿Y de una progresión aritmética?**

Si el primer término de una progresión geométrica es 0, todos los términos serán 0, ya que los demás términos se calculan multiplicando el primero por la razón elevada a una cierta potencia. Por otra parte, no hay ningún inconveniente para que el primer término de una progresión aritmética sea 0.

113 **Consideramos una progresión geométrica con $a_1 \neq 0$ y $r \neq 0$, y una progresión aritmética con $a_1 = 0$. Sumando, término a término, estas dos progresiones obtenemos la sucesión: 1, 1, 2, ... ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos?**

La sucesión geométrica es a_n y la aritmética es b_n (con $b_1 = 0$).

La suma es $a_n + b_n$.

$a_1 + b_1 = 1$, y como $b_1 = 0$, entonces $a_1 = 1$.

Por tanto, tenemos que: $a_n = r^{n-1}$ y $b_n = (n-1) \cdot d$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 = r + d = 1 \\ a_2 + b_2 = r^2 + 2d = 2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} d = 1 - r \\ \end{array}\right\} r^2 + 2 \cdot (1 - r) = 2 \to$$

$$\to r^2 - 2r = 0 \to r = 0 \text{ y } r = 2$$

Como r no puede ser 0, $r = 2$ y $d = -1$.

La suma de los 10 primeros términos es la suma de los 10 términos de cada una de las sucesiones.

$$\left.\begin{array}{l} S'_{10} = \dfrac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 511 \\ S''_{10} = \dfrac{(0 + (-1)) \cdot 10}{2} = 5 \end{array}\right\} \to S_{10} = S'_{10} + S''_{10} = 516$$

114 **La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética ($n > 1$) es 153 y la diferencia de la progresión es 2. Si a_1 es un número entero, ¿qué valores puede tomar n?**

La diferencia es $d = 2$.

$$\text{La suma es } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{(2a_1 + 2 \cdot (n-1)) \cdot n}{2} = (a_1 + n - 1) \cdot n = 153$$

El valor de n debe ser entero y, por tanto, será divisor de 153.

Div (153) $= \{1, 3, 9, 17, 51, 153\}$

Hallamos qué valores sirven como solución.

- $n = 3 \to a_1 + 3 - 1 = 51 \to a_1 = 49$, $a_2 = 51$, $a_3 = 53$ y la suma hasta a_3 es 153.
- $n = 9 \to a_1 + 9 - 1 = 17 \to a_1 = 9$, $a_2 = 11$, $a_3 = 13$… y la suma hasta a_9 es 153.
- $n = 17 \to a_1 + 17 - 1 = 9 \to a_1 = -7$, $a_2 = -5$, $a_3 = -3$… y la suma hasta a_{17} es 153.
- $n = 51 \to a_1 + 51 - 1 = 3 \to a_1 = -47$, $a_2 = -45$, $a_3 = -43$… y la suma hasta a_{51} es 153.
- $n = 153 \to a_1 + 153 - 1 = 1 \to a_1 = -151$, $a_2 = -149$, $a_3 = -147$… y la suma hasta a_{153} es 153.

115 **Expresa de forma fraccionaria el número periódico $0,\widehat{5}$; para ello, escríbelo de la forma: $0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots$ y halla la suma de la progresión.**

Es una progresión geométrica, de término general:

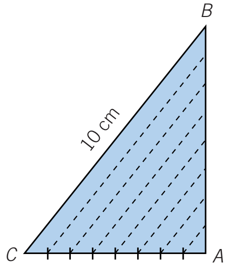
$$a_n = 0,5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \rightarrow 0,\widehat{5} = S = \frac{0,5}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

116 **Obtén la fracción generatriz de $2,\widehat{8}$ utilizando la suma de una progresión.**

$$\text{Como } 2,\widehat{8} = 2,8888\dots = 2 + \underbrace{0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008\dots}_{\substack{\text{Suma de una progresión geométrica} \\ \text{cuyo primer término es } a_1 = 0,8 \text{ y } r = 0,1}}$$

$$2,\widehat{8} = 2 + \frac{0,8}{1 - 0,1} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}.$$

117 **Dividimos el lado *AC* de un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ en 8 partes iguales, levantando desde los puntos de división paralelas al lado *BC*. Si *BC* mide 10 cm, calcula la suma de las longitudes de los otros 7 segmentos.**



La distancia de A a cada división n de AC es $\dfrac{n}{8}\overline{AC}$ y, por semejanza de triángulos, el lado paralelo a BC que pasa por esa división será:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{n}{8}\overline{AC} \rightarrow \overline{AC} \\ x \rightarrow 10 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{10n}{8} = \frac{5n}{4},$$

por lo que forman una progresión aritmética de diferencia

$$d = \frac{5}{4} \text{ y } a_1 = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Luego la suma es: } S_{10} = \frac{\left(\dfrac{5}{4} + 10\right) \cdot 10}{2} = \left(\frac{5}{4} + 10\right) \cdot 5 = \frac{225}{4}.$$

EN LA VIDA COTIDIANA

118 **A Julián Gasol, dueño de la gasolinera de Villapueblo, se le ha ocurrido una idea para premiar la fidelidad de los camioneros que habitualmente repostan en su gasolinera.**

Estos puntos se podrán canjear por menús en una cafetería o por un magnífico crucero.

Mariano tiene un camión de tipo medio con un depósito de 350 litros, y lo suele llenar cada semana. Como el litro de gasoil suele costar algo menos de 1 €, el repostaje semanal le cuesta unos 350 €.

Si continúa con el mismo gasto, ¿podría obtener un menú gratis? ¿Y el crucero?

Su amigo Antonio, que tiene un camión mayor que el suyo, le dice que cree que no tendrá problemas en conseguir el crucero. Si la frecuencia con la que reposta es una vez por semana, ¿cuántos litros de gasoil tendrá que echar semanalmente?

Suponiendo que no se dan fracciones de puntos, los puntos obtenidos forman una progresión aritmética de término general $a_n = 3n$.

La suma de los puntos en n repostajes es: $S_n = \dfrac{(3 + 3n) \cdot n}{2} = \dfrac{3n^2 + 3n}{2}$.

Si reposta cuatro veces al mes, $S_4 = \dfrac{3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4}{2} = 30$ puntos, por lo que no conseguirá el menú ni el crucero.

Para conseguir los 1.000 puntos del crucero:

$$1.000 = S_n = \frac{3n^2 + 3n}{2} \rightarrow 3n^2 + 3n - 1.000 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12.000}}{6} = \frac{-3 \pm 109{,}58}{6} \rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{106{,}58}{6} = 17{,}76 \\ n = -\dfrac{112{,}58}{6} = -118{,}76 \end{cases}$$

Por tanto, Mariano necesita repostar 18 veces.

Su amigo Antonio sigue una progresión aritmética, con $a_n = xn$.
Siendo x los litros (en centenares) que reposta:

$$S_n = \frac{(x + xn) \cdot n}{2} = \frac{xn^2 + xn}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1.000 = S_4 = \frac{x \cdot 4^2 + x \cdot 4}{2} = 10x \rightarrow x = 100$$

Antonio necesita repostar cada vez 10.000 litros de combustible.

119 ●●●

Según un informe de una revista económica, el mejor plan de pensiones existente en el mercado es el de Bancoverde.

En un plan de pensiones se hacen ingresos periódicos de dinero: mensualmente, trimestralmente, anualmente… El dinero inicial que se ingresa y el que se va añadiendo cada año rentan un 4,45 % anual, y el único problema es que, también anualmente, cobran un 0,99 % de comisión de gestión.

Si tengo 40 años y decido ingresar 2.000 € al año, ¿cuánto dinero recibiré cuando cumpla los 65 años?

PLAN DE PENSIONES BANCOVERDE

- Con las comisiones más bajas del mercado

0 %	Comisión de suscripción
0 %	Comisión de reembolso
0 %	Comisión de depósito
0,99 %	Comisión de gestión

- Alto potencial de rentabilidad

4,45 % Anual asegurado

Por un año le corresponde:

$$2.000 + 2.000 \cdot \frac{4,45}{100} - \left(2.000 + 2.000 \cdot \frac{4,45}{100}\right) \cdot \frac{0,99}{100} =$$

$$= 2.000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)$$

Por dos años le corresponde: $2.000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^2$

Y en esta progresión geométrica, por t años le corresponde:

$$2.000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^t \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^t$$

Por tanto, la suma de las aportaciones de los 24 años que le faltan para jubilarse es:

$$S_{24} = \frac{2.000 \cdot \left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right) \cdot \left(\left(1 + \frac{4,45}{100}\right)^{24} \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right)^{24} - 1\right)}{\left(1 + \frac{4,45}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,99}{100}\right) - 1} =$$

$$= \frac{2.478,47455989}{0,03415945} = 72.556,04 \text{ €}$$