3 Polinomios

MONOMIOS

- OPERACIONES

POLINOMIOS

- VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

OPERACIONES CON POLINOMIOS

- SUMA
- RESTA
- MULTIPLICACIÓN
- DIVISIÓN

IGUALDADES NOTABLES

- CUADRADO DE UNA SUMA
- CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
- PRODUCTO DE SUMA POR DIFERENCIA

El servidor del califa

Mohamed recorría nervioso las salas de la Casa de la Sabiduría buscando al sabio Al-Khwarizmi, el cual le había enseñado un método para contar y operar con cantidades desconocidas que el joven aplicaba en su trabajo como funcionario de abastos del palacio del califa.

Por fin, sentado al lado de una fuente encontró a su maestro.

–Maestro, ¿podemos repasar los cálculos de ayer?

–Me alegra tu afán de conocimiento. –Al-Khwarizmi se extrañaba de que Mohamed dedicara cada rato libre a aprender.

–La riqueza de los pobres es la bondad y el conocimiento, y como cualquier hombre, yo deseo ser rico; además, ningún ladrón puede robártela –repuso Mohamed con una sonrisa.

–¡Está bien, está bien! –contestó, y entre asombrado y divertido el sabio le propuso unos ejercicios aritméticos mientras él estudiaba el lenguaje algebraico y las ecuaciones.

En la tablilla podía leerse: «Un cuadrado y diez raíces son igual a treinta y nueve unidades…», que en lenguaje algebraico moderno es: $x^2 + 10x = 39$.

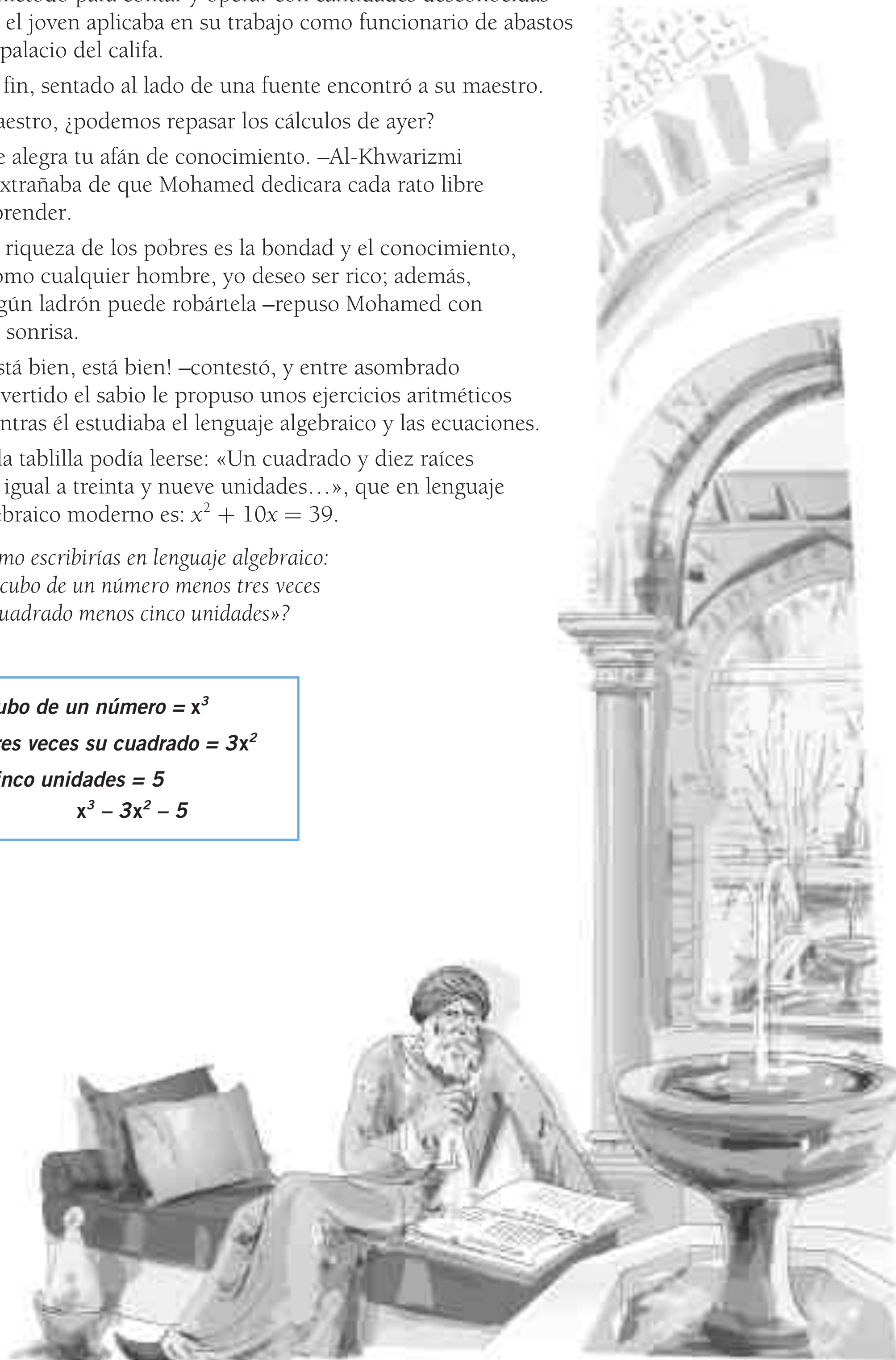
¿Cómo escribirías en lenguaje algebraico: «El cubo de un número menos tres veces su cuadrado menos cinco unidades»?

Cubo de un número = x^3

Tres veces su cuadrado = $3x^2$

Cinco unidades = 5

$x^3 - 3x^2 - 5$



Polinomios

EJERCICIOS

001 **Indica el coeficiente, parte literal y grado de estos monomios.**

a) $-3x^3y^2z^4$ **b)** $-5b^2c^3$ **c)** $x^{15}y$ **d)** $\frac{-2}{3}xy^5$

a) Coeficiente: -3 Parte literal: $x^3y^2z^4$ Grado: $3 + 2 + 4 = 9$
b) Coeficiente: -5 Parte literal: b^2c^3 Grado: $2 + 3 = 5$
c) Coeficiente: 1 Parte literal: $x^{15}y$ Grado: $15 + 1 = 16$
d) Coeficiente: $-\frac{2}{3}$ Parte literal: xy^5 Grado: $1 + 5 = 6$

002 **Determina si los monomios son semejantes o no.**

a) $\frac{1}{2}x^2y^3z^5$ **y** $-5z^5x^2y^3$
b) $6x^3y^4$ **y** $6x^4y^3$
c) xy^3 **y** $-xy^3$
d) $7x$ **y** $-x$

a) Son semejantes.
b) No son semejantes.
c) Son semejantes.
d) Son semejantes.

003 **Escribe el monomio opuesto de estos monomios.**

a) $\frac{1}{2}xy^3z^2$ **b)** $-4a^2b^3$ **c)** $-5x^9$ **d)** $9x^{11}$

a) $-\frac{1}{2}xy^3z^2$ b) $4a^2b^3$ c) $5x^9$ d) $-9x^{11}$

004 **Escribe, si se puede, un monomio:**

a) De coeficiente 2 y parte literal xy^6.
b) De coeficiente -3 y semejante a $-2x^3$.
c) De grado 7 y semejante a $-4x^2y$.
d) De parte literal x^3y^4 y opuesto a $-4x^3y$.

a) $2xy^6$
b) $-3x^3$
c) No es posible. No puede ser de grado 7 y 3 a la vez.
d) No es posible. No puede ser de grado 7 y 4 a la vez.

005 **Realiza las operaciones.**

a) $6x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2$
b) $3x^2y^2 - 2x^2y^2 + 6x^2y^2 - x^2y^2$
c) $(-5ab) \cdot (6abc)$
d) $(-8x^2y) \cdot (-4xy^2)$
e) $(15xy) : (-3x)$
f) $(2xyz) : (-2xy)$

a) $9x^2$
b) $6x^2y^2$
c) $-30a^2b^2c$
d) $32x^3y^3$
e) $-5y$
f) $-z$

006 **Simplifica las siguientes expresiones.**

a) $-2x^3 - x^2 + 5x^2 - 6x + x - 2x^2 - 6x$

b) $5x - (x^2 + 3x^3) + 3x^2 - x^3 + 2x$

c) $11x^7y^3 + 4xy^5 - 9x^7y^3 + xy^5 - x^2$

a) $-2x^3 + (-1 + 5 - 2)x^2 + (-6 + 1 - 6)x = -2x^3 + 2x^2 - 11x$

b) $(-3 - 1)x^3 + (-1 + 3)x^2 + (5 + 2)x = -4x^3 + 2x^2 + 7x$

c) $(11 - 9)x^7y^3 + (4 + 1)xy^5 - x^2 = 2x^7y^3 + 5xy^5 - x^2$

007 **Calcula:** $-x^2y - (-3x^2 \cdot 7y) + (16x^2y^3z : 4y^2z)$**.**

$-x^2y + 21x^2y + 4x^2y = 24x^2y$

008 **Determina el grado, las variables y el término independiente de estos polinomios.**

a) $P(x, y) = -2x^5 - x^2y^2 + 5x^3 - 1 + 3x^3 + 3$

b) $Q(x, y) = x^2 + 4x^3 - x - 9 + 4x^4y^3$

c) $R(x, y) = x^9 - x^7y^3 + y^{13} - 4$

d) $S(x, y, z) = 7x^2yz - 3xy^2z + 8xyz^2$

a) Grado: 5. Variables: x, y. Término independiente: $3 - 1 = 2$.

b) Grado: $3 + 4 = 7$. Variables: x, y. Término independiente: -9.

c) Grado: 13. Variables: x, y. Término independiente: -4.

d) Grado: $2 + 1 + 1 = 4$. Variables: x, y, z. Término independiente: 0.

009 **Reduce este polinomio y calcula su opuesto.**

$$R(x) = x^5 + 1 - 3 + 4x^5 - 3x - 2x$$

$R(x) = 5x^5 - 5x - 2$, y su opuesto es: $-R(x) = -5x^5 + 5x + 2$.

010 **Escribe un polinomio de dos variables, de grado 7, que tenga un término de grado 3, que sea reducido y no tenga término independiente.**

Por ejemplo: $5x^5y^2 - 3xy^2$.

011 **Calcula el valor numérico del polinomio en cada caso.**

a) $P(x) = 3x^6 + 2x^5 - 3x^4 - x^2 + 7x - 2$**, para** $x = 0$**.**

b) $P(x, y) = -x^4y - x^2y + 7xy - 2$**, para** $x = 1$**,** $y = 2$**.**

a) $P(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 0 + 7 \cdot 0 - 2 = -2$

b) $P(1, 2) = -1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 2 - 2 = 8$

012 **Dados los polinomios:**

$$\boldsymbol{P(x, y) = 3x^2y + xy - 7x + y - 2}$$
$$\boldsymbol{Q(x, y) = -xy^2 + 4y^2 - 3x}$$

halla los valores numéricos:

$\boldsymbol{P(0, 0)}$ $\quad\boldsymbol{P(1, 1)}$ $\quad\boldsymbol{Q(0, -1)}$ $\quad\boldsymbol{Q(0, 2)}$

$P(0, 0) = 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 0 - 2 = -2$

$P(1, 1) = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 1 - 2 = -4$

$Q(0, -1) = -0 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 0 = 4$

$Q(0, 2) = -0 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 0 = 16$

013 **Reduce los siguientes polinomios y calcula su valor numérico para $\boldsymbol{x = 2}$.**

a) $\boldsymbol{P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1}$

b) $\boldsymbol{Q(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x}$

a) $P(x) = -4x^2 + x + 5 \xrightarrow{x=2} P(2) = -4 \cdot 2^2 + 2 + 5 = -9$

b) $P(x) = -2x^4 - 4x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{x=2} P(2) = -2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -55$

014 **Un número es raíz de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio para dicho número es cero. Determina si los números $\boldsymbol{-4}$ y 4 son raíces de este polinomio.**

$$\boldsymbol{P(x) = x^2 - 5x + 4}$$

¿Sabrías hallar otra raíz del polinomio?

$P(-4) = (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 4 = 40 \rightarrow -4$ no es raíz.

$P(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0 \rightarrow 4$ es raíz.

Este polinomio tiene otra raíz: $x = 1$.

015 **Halla la suma, resta y producto de cada par de polinomios.**

a) $\boldsymbol{R(x) = x^4 - x + 1; \quad S(x) = x^2 + 1}$

b) $\boldsymbol{R(x) = x + 1; \quad S(x) = x^2 + x - 1}$

c) $\boldsymbol{R(x) = 5x^7 - x^8 + 1; \quad S(x) = x^2 + x^6 - 1}$

d) $\boldsymbol{R(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1; \quad S(x) = x^3 + 2x}$

e) $\boldsymbol{R(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 3; \quad S(x) = x^4 + x^2 - 8}$

f) $\boldsymbol{R(x) = x^7 + 3; \quad S(x) = x^3 + x^2 + 4x + 2}$

a) $R(x) + S(x) = (x^4 - x + 1) + (x^2 + 1) = x^4 + x^2 - x + 2$

$R(x) - S(x) = (x^4 - x + 1) - (x^2 + 1) = x^4 - x^2 - x$

$R(x) \cdot S(x) = (x^4 - x + 1) \cdot (x^2 + 1) = x^6 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

b) $R(x) + S(x) = (x + 1) + (x^2 + x - 1) = x^2 + 2x$

$R(x) - S(x) = (x + 1) - (x^2 + x - 1) = -x^2 + 2$

$R(x) \cdot S(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + x - 1) = x^3 + 2x^2 - 1$

c) $R(x) + S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) + (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 + x^6 + x^2$

$R(x) - S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) - (x^2 + x^6 - 1) = -x^8 + 5x^7 - x^6 - x^2 + 2$

$R(x) \cdot S(x) = (5x^7 - x^8 + 1) \cdot (x^2 + x^6 - 1) =$

$= -x^{14} + 5x^{13} - x^{10} + 5x^9 - 5x^7 + x^8 + x^6 + x^2 - 1$

d) $R(x) + S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) + (x^3 + 2x) =$
$= x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
$R(x) - S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) - (x^3 + 2x) = x^5 - x^4 + 1$
$R(x) \cdot S(x) = (x^5 - x^4 + x^3 + 2x + 1) \cdot (x^3 + 2x) =$
$= x^8 - x^7 + 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x$

e) $R(x) + S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) + (x^4 + x^2 - 8) =$
$= x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 11$
$R(x) - S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) - (x^4 + x^2 - 8) =$
$= -x^4 + 7x^3 + x^2 + x + 5$
$R(x) \cdot S(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 3) \cdot (x^4 + x^2 - 8) =$
$= 7x^7 + 7x^6 + 8x^5 - x^4 - 55x^3 - 11x^2 + 24$

f) $R(x) + S(x) = (x^7 + 3) + (x^3 + x^2 + 4x + 2) = x^7 + x^3 + x^2 + 4x + 5$
$R(x) - S(x) = (x^7 + 3) - (x^3 + x^2 + 4x + 2) = x^7 - x^3 - x^2 - 4x + 1$
$R(x) \cdot S(x) = (x^7 + 3) \cdot (x^3 + x^2 + 4x + 2) =$
$= x^{10} + x^9 + 4x^8 + 2x^7 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 12x + 6$

016 **Calcula $-A(x) + B(x)$ y $-A(x) - B(x)$ con los polinomios:**

$$A(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$$
$$B(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$$

$-A(x) + B(x) = -(3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) + (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= -6x^4 + 6x^3 - x^2 - 2x + 8$

$-A(x) - B(x) = -(3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) - (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= 4x^3 - x^2 + 2x + 6$

017 **Calcula el producto de los dos polinomios del ejercicio anterior, utilizando la propiedad distributiva.**

$A(x) \cdot B(x) = (3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) \cdot (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= 3x^4 \cdot (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) - 5x^3 \cdot (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) +$
$+ x^2 \cdot (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) - 7 \cdot (-3x^4 + x^3 - 2x + 1) =$
$= (-9x^8 + 3x^7 - 6x^5 + 3x^4) + (15x^7 - 5x^6 + 10x^4 - 5x^3) +$
$+ (-3x^6 + x^5 - 2x^3 + x^2) + (21x^4 - 7x^3 + 14x - 7) =$
$= -9x^8 + 18x^7 - 8x^6 - 5x^5 + 34x^4 - 14x^3 + x^2 + 14x - 7$

018 **Calcula.**

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x) : x$
b) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x - 2)$
c) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 + x - 1)$
d) $(x^4 + x^3 - x^2 + x + 1) : (x^3 - 5)$
e) $(-6x^5 + x^3 + 2x + 2) : (4x^3 + 2x + 3)$
f) $(x^8 - 1) : (x^5 + x^3 + x + 2)$
g) $(x - 1) : x$
h) $(x^2 - 1) : (x + 1)$
i) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

a) x^2-3x+2

b)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2-5x-5 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x^3+4x^2 \qquad\qquad & 2x^2+x-3 \\ \hline x^2-5x-5 & \\ -x^2+2x \qquad & \\ \hline -3x-5 & \\ 3x-6 & \\ \hline -11 & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2+4x-3 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2+2x \qquad & 2x-5 \\ \hline -5x^2+6x-3 & \\ 5x^2+5x-5 & \\ \hline 11x-8 & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-x^2+x+1 & x^3-5 \\ \cline{2-2} -x^4 \qquad\qquad +5x \qquad & x+1 \\ \hline x^3-x^2+6x+1 & \\ -x^3 \qquad\qquad\quad +5 & \\ \hline -x^2+6x+6 & \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l} -6x^5+x^3 \qquad\qquad +2x+2 & 4x^3+2x+3 \\ \cline{2-2} 6x^5+3x^3+\dfrac{9}{2}x^2 \qquad\qquad\quad & -\dfrac{3}{2}x^2+1 \\ \hline 4x^3+\dfrac{9}{2}x^2+2x+2 & \\ -4x^3 \qquad\qquad -2x-3 & \\ \hline \dfrac{9}{2}x^2 \qquad\qquad -1 & \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r|l} x^8 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1 & x^5+x^3+x-2 \\ \cline{2-2} -x^8-x^6-x^4-2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & x^3-x \\ \hline -x^6-x^4-2x^3 \qquad\qquad -1 & \\ x^6+x^4 \qquad\qquad +x^2+2x \qquad & \\ \hline -2x^3+x^2+2x-1 & \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{r|l} x-1 & x \\ \cline{2-2} -x \quad & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{r|l} x^2 \qquad -1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x \qquad & x-1 \\ \hline -x-1 & \\ x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -5x & +6 & x-2 \\ \cline{4-4}
-x^2 & +2x & & x-3 \\ \cline{1-3}
 & -3x & +6 & \\
 & 3x & -6 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

019 **Haz las siguientes divisiones y comprueba que están bien realizadas.**

a) $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x^2 - 2)$

b) $(x^4 + x^2 + 3) : (x^3 + 3x^2 + 2x + 6)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -4x^2 & +5x & -2 & x^2-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & +2x & & x-4 \\ \cline{1-4}
 & -4x^2 & +7x & -2 & \\
 & 4x^2 & & -8 & \\ \cline{2-4}
 & & 7x & -10 &
\end{array}$$

$(x^2 - 2) \cdot (x - 4) + (7x - 10) = (x^3 - 4x^2 - 2x + 8) + (7x - 10) =$
$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +x^2 & & +3 & x^3+3x^2+2x+6 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & -2x^2 & -6x & & x-3 \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & -x^2 & -6x & +3 & \\
 & 3x^3 & +9x^2 & +6x & +18 & \\ \cline{2-5}
 & & 8x^2 & & +21 &
\end{array}$$

$(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) \cdot (x - 3) + (8x^2 + 21) = (x^4 - 7x^2 - 18) + (8x^2 + 21) =$
$= x^4 + x^2 + 3$

020 **Calcula el resto de esta división de polinomios.**

Dividendo $\rightarrow$ $\boldsymbol{P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3}$

Divisor $\longrightarrow$ $\boldsymbol{Q(x) = x^3 + x - 1}$

Cociente $\longrightarrow$ $\boldsymbol{C(x) = x^2}$

$R(x) = P(x) - Q(x) \cdot C(x) = (x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3) - (x^3 + x - 1) \cdot x^2 =$
$= (x^5 + x^3 - x^2 + 5x - 3) - (x^5 + x^3 - x^2) =$
$= 5x - 3$

021 **Saca factor común en los siguientes polinomios.**

a) $8x^2 - 4x$

b) $18x^3y^2 - 12x^2y^3$

c) $30a^2b - 15ab^2 + 5a^2b^2$

d) $-12ab^3 + 4b^2 - 6b^4$

e) $34a^4 - 14a^3b + 28ab^3$

f) $20a^4b^2c + 36a^2b - 18a^3b^2$

a) $4x \cdot (2x - 1)$

b) $6x^2y^2 \cdot (3x - 2y)$

c) $5ab \cdot (6a - 3b + ab)$

d) $2b^2 \cdot (-6ab + 2 - 3b^2)$

e) $2a \cdot (17a^3 - 7a^2b + 14b^3)$

f) $2a^2b \cdot (10a^2bc + 18 - 9ab)$

022 **Saca factor común en estos polinomios.**

a) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}$ **b)** $x \cdot (xy^2 - y) + y^2 \cdot (4xy - 3y)$ **c)** $\dfrac{x^2 - 2x}{7} - \dfrac{x^2 - x}{5}$

a) $\dfrac{x}{2} \cdot (x - 1)$

b) $y[x \cdot (xy - 1) + y^2(4x - 3)]$

c) $x\left(\dfrac{x-2}{7} - \dfrac{x-1}{5}\right)$

023 **Calcula a para que el factor común de $ax^3y + 4x^4y^2 - 6x^ay^3$ sea $2x^2y$.**

Observando el tercer término, si $a > 2$ el factor común de los tres términos tendría x elevado a 3, lo cual no es posible; y si $a < 2$ el factor común de los tres términos tendría x elevado a un número menor que 2. Por tanto, la única solución es $a = 2$.

024 **Desarrolla los siguientes cuadrados.**

a) $(x + 7)^2$
b) $(2a + 1)^2$
c) $(6 + x)^2$
d) $(3a^2 + 2b)^2$
e) $(x - 4)^2$
f) $(3a - b)^2$
g) $(5 - x)^2$
h) $(2b^2 - 5b^3)^2$

a) $x^2 + 14x + 49$
b) $4a^2 + 4a + 1$
c) $36 + 12x + x^2$
d) $9a^4 + 12a^2b + 4b^2$
e) $x^2 - 8x + 16$
f) $9a^2 - 6ab + b^2$
g) $25 - 10x + x^2$
h) $4b^4 - 20b^5 + 25b^6$

025 **Desarrolla.**

a) $(3x^3 - a^2)^2$ **b)** $(x^2 + x^3)^2$ **c)** $(2x + x^3)^2$ **d)** $(6ab^2 - 2y)^2$

a) $9x^6 - 6x^3a^2 + a^4$
b) $x^4 + 2x^5 + x^6$
c) $4x^2 + 4x^4 + x^6$
d) $36a^2b^4 - 24ab^2y - 4y^2$

026 **Expresa como cuadrado de una suma o una diferencia, según convenga.**

a) $x^2 + 6x + 9$
b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
c) $x^2 + 4xy + 4y^2$
d) $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $(x + 3)^2$
b) $(2x - 3y)^2$
c) $(x + 2y)^2$
d) $(x^2 + 1)^2$

027 **Calcula los siguientes productos.**

a) $(x + 7) \cdot (x - 7)$ **b)** $(7x + 4y) \cdot (7x - 4y)$

a) $x^2 - 49$
b) $49x^2 - 16y^2$

028 **Estudia si estas expresiones se pueden expresar como suma por diferencia.**

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^4 - 9$ **c)** $16 - x^2$

a) $(x + 1) \cdot (x - 1)$ b) $(x^2 + 3) \cdot (x^2 - 3)$ c) $(4 - x) \cdot (4 + x)$

029 **Expresa en forma de producto.**

a) $4x^2 - 4x + 1$ **c)** $100x^2 - 4z^6$

b) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

a) $(2x - 1)^2$ b) $(3a - 5b)^2$ c) $(10x + 2z^3) \cdot (10x - 2z^3)$

030 **Observa el ejemplo y calcula mentalmente.**

$$1.000^2 - 999^2 = (1.000 + 999) \cdot (1.000 - 999) = 1.999 \cdot 1 = 1.999$$

a) $46^2 - 45^2$ **b)** $120^2 - 119^2$ **c)** $500^2 - 499^2$

a) 91 b) 239 c) 999

031 **Simplifica las fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x^3}{xy}$ **b)** $\dfrac{5x^3y^2}{3xy}$ **c)** $\dfrac{6x^2y}{3x^2y^2}$ **d)** $\dfrac{4x^2y}{4xy}$

a) $\dfrac{x^2}{y}$ b) $\dfrac{5x^2y}{3}$ c) $\dfrac{2}{y}$ d) x

032 **Simplifica: a)** $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 9}{2x - 6}$

a) $\dfrac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2$ b) $\dfrac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{2(x - 3)} = \dfrac{x + 3}{2}$

033 **Calcula *a* para que** $\dfrac{4x^2 + 4ax + a^2}{2x + 3} = 2x + 3$.

$4x^2 + 4ax + a^2 = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \rightarrow a = 3$

ACTIVIDADES

034 **Indica si las siguientes expresiones son o no monomios.**

a) $2x^2 + yz$ **c)** $5x^5y^2$ **e)** $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3}y$

b) $\dfrac{2x^2y^{-4}}{11}$ **d)** $\sqrt{xyz}$ **f)** $3ab + 2a^2$

a) No monomio. c) Monomio. e) No monomio.

b) Monomio. d) Monomio. f) No monomio.

035 Di si los monomios son semejantes.

a) xz, $3xy$, $-6xy$
b) ab, a^2b, $7b$
c) $4c^9d$, c^7d, cd^4
d) $8xy^2$, $7xy$

En a) son semejantes: $3xy$, $-6xy$; xz no es semejante a los anteriores.

No hay ningún monomio semejante en los apartados b), c) y d).

036 Realiza estas sumas de monomios.

a) $xz + 3xz + 6xz$
b) $a^2b + 9a^2b + 27a^2b$
c) $9c^9 + c^9 + c^9$
d) $8xy + 7xy + 43xy + 23xy$

a) $10xz$ b) $37a^2b$ c) $11c^9$ d) $81xy$

037 Efectúa las siguientes restas de monomios.

a) $3xz - 6xz$
b) $9a^2b - 2a^2b$
c) $18xy - 7xy - 3xy - 3xy$
d) $5x^9 - x^9 - x^9 - x^9$

a) $-3xz$
b) $7a^2b$
c) $5xy$
d) $2x^9$

038 Realiza las operaciones e indica el grado del monomio resultante.

a) $2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + 8x^2 - x^2$
b) $5xy^3 - 2xy^3 + 7xy^3 - 3xy^3 + 12xy^3$
c) $3abc - 2abc + 6abc + 9abc - 4abc$
d) $5xz - 3xz + 15xz - 11xz + 8xz - 3xz$
e) $(2xyz) \cdot (2x^2yz^3)$
f) $(-2abc) \cdot (3a^2b^2c^2) \cdot (-bc)$
g) $7x \cdot (2xy) \cdot (-3xy^5) \cdot (xy)$
h) $(6ac^3) \cdot (-2a^2c^3) \cdot (-3ac) \cdot (-4a^3c^2)$
i) $(21x^2y^3) : (7xy^2)$
j) $(9abc) : (3bc)$
k) $(16x^4y^5a^3b^6) : (8x^2y^3a^2b^5)$
l) $(5m^3n^2g^4) : (2mng)$

a) $5x^2$ Grado 2.
b) $25xy^3$ Grado 4.
c) $12abc$ Grado 3.
d) $11xz$ Grado 2.
e) $4x^3y^2z^4$ Grado 9.
f) $6a^3b^4c^4$ Grado 11.
g) $-42x^4y^7$ Grado 11.
h) $-144a^7c^9$ Grado 16.
i) $3xy$ Grado 2.
j) $3a$ Grado 1.
k) $2x^2y^2ab$ Grado 6.
l) $\frac{5}{2}m^2ng^3$ Grado 6.

039 Haz las siguientes operaciones.

a) $-xz + 6xz + xyz - 8xz$
b) $9a^2b - 2a^2b + 8a^2b - a^2b$
c) $9c^9 - c^9 - c^9 + 10c^9$
d) $8xy + 7xy - xy + 3xy - xy$

a) $-3xz + xyz$ b) $14a^2b$ c) $17c^9$ d) $16xy$

040 Realiza estas multiplicaciones.

a) $xy \cdot 3xy \cdot (-6xy)$
b) $ab \cdot a^2b \cdot 7b \cdot ab$
c) $8xy^2 \cdot 7xy$
d) $15x^9 \cdot (-3x^9)$

a) $-18x^3y^3$ b) $7a^4b^3$ c) $4y$ d) $-45x^{18}$

041 Efectúa las siguientes divisiones de monomios.

a) $9xy : 3xy$
b) $9ab : ab$
c) $15x^8 : 5x^8$
d) $8xy^2 : 2xy^2$
e) $15x^9 : 3x^9$
f) $32x^7 : 8x^4$

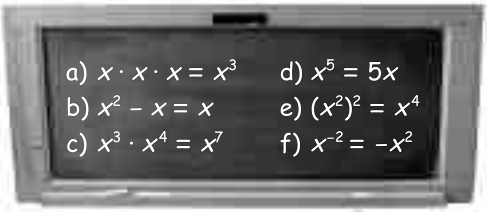
a) 3 b) 9 c) 3 d) 4 e) 5 f) $4x^3$

042 Calcula y simplifica el resultado todo lo que puedas.

a) $2x^2 - 5(-x^2) + 8x^2 - (2x) \cdot (3x)$
b) $2x \cdot (-y) + 7xy - yx + (-4x) \cdot (-5y)$
c) $3x^2 - (-x)^2 + 3(-x^2) + (-3) \cdot (-x)^2$
d) $(2xy - 3xy + 7xy) \cdot (2ab)$
e) $(x^2 - 3x^2 + 6x^2 - 2x^2) \cdot (-5zx)$

a) $2x^2 + 5x^2 + 8x^2 - 6x^2 = 9x^2$
b) $-2xy + 7xy - xy + 20xy = 24xy$
c) $3x^2 - x^2 - 3x^2 - 3x^2 = -4x^2$
d) $(6xy) \cdot (2ab) = 12xyab$
e) $(2x^2) \cdot (-5zx) = -10x^3z$

043 Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.



a) Verdadera: $x \cdot x \cdot x = x^{1+1+1} = x^3$.
b) Falsa, pues no podemos restar potencias con la misma base y distinto exponente.
c) Verdadera: $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.
d) Falsa, ya que una potencia consiste en multiplicar un determinado número de veces la base, y no sumarla.
e) Verdadera: $(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$.
f) Falsa: $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

044 Indica el grado, el término independiente y el polinomio opuesto de los polinomios.

a) $P(x) = -x^3 + x^2 - 7x - 2$

b) $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$

c) $R(x) = x + 1$

d) $S(x) = 8$

e) $T(x) = 12x - x^2 + x^4$

f) $U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}$

a) Grado 3 Término independiente: -2 Opuesto: $x^3 - x^2 + 7x + 2$

b) Grado 2 Término independiente: 6 Opuesto: $x^2 - 2x - 6$

c) Grado 1 Término independiente: 1 Opuesto: $-x - 1$

d) Grado 0 Término independiente: 8 Opuesto: -8

e) Grado 4 Término independiente: 0 Opuesto: $-x^4 + x^2 - 12x$

f) Grado 2 Término independiente: $-\frac{1}{6}$ Opuesto: $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{6}$

045 Razona si es cierto o falso.

a) Un polinomio es la suma de dos monomios.

b) El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

c) Los coeficientes de un polinomio son siempre números naturales.

d) Todo polinomio tiene un término donde aparece x^2.

a) Falso. Un polinomio es la suma o resta de dos o más monomios.

b) Verdadero.

c) Falso. Los coeficientes son cualquier tipo de número.

d) Falso. La variable no tiene por qué ser x, y no es necesario que tenga un término de grado 2.

046 Reduce los siguientes polinomios.

a) $P(x) = -x^2 - x - 2 - x^3 + x^2 - x - 2$

b) $Q(x) = -x^2 + x^2 + 6 - x + x^2 - 7x - 2$

c) $R(x) = x + 1 - x + x^2$

d) $S(x) = 8 - x + 34 - x + 324$

e) $T(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$

f) $U(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6} - \frac{2}{7}x^2$

a) $P(x) = -x^3 - 2x - 4$

b) $Q(x) = x^2 - 8x + 4$

c) $R(x) = x^2 + 1$

d) $S(x) = -2x + 364$

e) $T(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$

f) $U(x) = \frac{3}{7}x^2 - x - \frac{1}{6}$

047 Calcula el valor numérico de cada polinomio para los valores de la variable.

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$
b) $B(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3$, para $x = 2$
c) $C(x) = 4x^5 - x^2 + 3$, para $x = -1$
d) $D(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$
e) $E(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$
f) $F(x) = x^4 + x^4 - x^3 + x^2 - 7x - 2$, para $x = 0$
g) $G(x) = -14$, para $x = -2$

a) $A(1) = 1 + 1 = 2$
b) $B(2) = 8 + 3 = 11$
c) $C(-1) = -4 - 1 + 3 = -2$
d) $D(1) = -9 + 7 + 5 = 3$
e) $E(-2) = -8 + 4 - 2 + 2 = -4$
f) $F(0) = -2$
g) $G(-2) = -14$

048 Halla los valores numéricos para el polinomio:

$$P(x, y) = 2x^2y + xy^2 - 3xy + 5x - 6y + 9$$

a) $P(0, 0)$ c) $P(-1, 1)$ e) $P(1, 2)$
b) $P(1, 1)$ d) $P(1, -1)$ f) $P(2, 1)$

a) $P(0, 0) = 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 0 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 9 = 9$
b) $P(1, 1) = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 9 = 8$
c) $P(-1, 1) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 + 9 = 2$
d) $P(1, -1) = 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 9 = 11$
e) $P(1, 2) = 2 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 = 4$
f) $P(2, 1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 9 = 17$

049 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL COEFICIENTE DE UN POLINOMIO CONOCIENDO UNO DE SUS VALORES NUMÉRICOS?

Calcula el valor de k en el polinomio $P(x) = x^2 - x + k$, si $P(2) = 5$.

PRIMERO. Se sustituye, en el polinomio, la variable por su valor.

$$P(x) \xrightarrow{x=2} \left.\begin{array}{l} P(2) = 2^2 - 2 + k = 2 + k \\ P(2) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow 2 + k = 5$$

SEGUNDO. Se despeja k en la ecuación resultante.

$$2 + k = 5 \rightarrow k = 5 - 2 = 3$$

050 **Calcula el valor de k en cada polinomio, sabiendo que $P(1) = 6$.**

a) $P(x) = kx^7 + x^3 + 3x + 1$

b) $P(x) = kx^4 + kx^3 + 4$

c) $P(x) = 9x^5 + kx^2 + kx - k$

d) $P(x) = kx^6 - kx^3 + kx + k$

e) $P(x) = k$

a) $k + 1 + 3 + 1 = 6 \rightarrow k = 1$

b) $k + k + 4 = 6 \rightarrow k = 1$

c) $9 + k + k - k = 6 \rightarrow k = 3$

d) $k - k + k + k = 6 \rightarrow k = 3$

e) $k = 6$

051 **Dados los polinomios:**

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \qquad R(x) = 3x^2 - x + 1$$
$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \qquad S(x) = 2x + 3$$

calcula.

a) $P(x) + Q(x)$ **c)** $P(x) - S(x)$ **e)** $P(x) + R(x)$ **g)** $Q(x) - R(x)$

b) $Q(x) + P(x)$ **d)** $Q(x) - P(x)$ **f)** $R(x) + S(x)$ **h)** $R(x) - P(x)$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) =$
$= 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7$

b) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= 2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7$

c) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (2x + 3) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x - 9$

d) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) - (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= -2x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 10x + 5$

e) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^2 - x + 1) =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + x^2 + 2x - 5$

f) $(3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 3x^2 + x + 4$

g) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) - (3x^2 - x + 1) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x - 2$

h) $(3x^2 - x + 1) - (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) =$
$= -2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 4x + 7$

052 **Suma y resta los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = -7x + 4$; $Q(x) = 2x + 5$

b) $P(x) = -3x^2 + 1$; $Q(x) = -x^2 + 2x$

c) $P(x) = -3x^2 + 1$; $Q(x) = -x^2 + 2x + 6$

d) $P(x) = -5x^3 + x^2 - 7x - 2$; $Q(x) = 5x^3 + x^2 + 4x - 2$

e) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{3}{2}y^2$; $Q(x) = x^2 - xy - y^2$

f) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - \frac{3}{2}y^2$; $Q(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2xy - \frac{2}{3}y^2$

g) $P(x) = x^2 - \frac{x}{2} - 3$; $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

h) $P(x) = x^2 - 5x - 3$; $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$

a) Suma: $-5x + 9$ Resta: $-9x - 1$

b) Suma: $-4x^2 + 2x + 1$ Resta: $-2x^2 - 2x + 1$

c) Suma: $-4x^2 + 2x + 7$ Resta: $-2x^2 - 2x - 5$

d) Suma: $2x^2 - 3x - 4$ Resta: $-10x^3 - 11x$

e) Suma: $\frac{3}{2}x^2 - 3xy - \frac{5}{2}y^2$ Resta: $-\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2$

f) Suma: $\frac{5}{6}x^2 - 4xy - \frac{13}{6}y^2$ Resta: $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}y^2$

g) Suma: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x - 4$ Resta: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - 2$

h) Suma: $\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{8}{3}$ Resta: $\frac{3}{2}x^2 - 5x - \frac{10}{3}$

053 **Dados los polinomios:**

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \qquad R(x) = 3x^2 - x + 1$$
$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \qquad S(x) = 2x + 3$$

calcula.

a) $P(x) + Q(x) + R(x) + S(x)$

b) $P(x) - R(x) + S(x) - Q(x)$

c) $[P(x) + Q(x)] - [R(x) + Q(x)]$

d) $[P(x) - Q(x)] - [R(x) - Q(x)]$

a) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) + (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) = 2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 3x - 3$

b) $(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^2 - x + 1) + (2x + 3) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) = 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 13x - 3$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= (2x^5 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) - (3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x) =$
$= -2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] + [(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] =$
$= [2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5] - [-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2] =$
$= 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 4x - 7$

054 **Halla cuál es el polinomio $Q(x)$ que hay que sumar a $P(x) = x^2 + 2x - 1$ para obtener como resultado $R(x)$.**

a) $R(x) = x - 1$

b) $R(x) = 2x^2 - x - 6$

c) $R(x) = 5x^2 - x + 1$

d) $R(x) = -7x^2 - 3x$

e) $R(x) = x^3 - x$

f) $R(x) = x^3 - x^2$

$$Q(x) = R(x) - P(x)$$

a) $Q(x) = -x^2 - x$

b) $Q(x) = x^2 - 3x - 5$

c) $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

d) $Q(x) = -8x^2 - 5x + 1$

e) $Q(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$

f) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

055 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$Q(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1$$
$$R(x) = x^2 - x + 1$$

calcula.

a) $P(x) \cdot Q(x)$ **b)** $Q(x) \cdot R(x)$ **c)** $P(x) \cdot R(x)$ **d)** $R(x) \cdot R(x)$

a) $(2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1) =$
$= 6x^{11} - 25x^9 + 8x^8 + 6x^7 - 10x^6 + 10x^5 + x^4 + 3x^3 + 1$

b) $(3x^5 - 2x^3 + x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) =$
$= 3x^7 - 3x^6 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 1$

c) $(2x^6 - 7x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) =$
$= 2x^8 - 2x^7 - 5x^6 + 9x^5 - 11x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

056 Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \qquad R(x) = 3x^2 - x + 1$$
$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \qquad S(x) = 2x + 3$$

calcula.

a) $[P(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ **c)** $[P(x) + Q(x) + R(x)] \cdot S(x)$

b) $[R(x) - Q(x)] \cdot S(x)$ **d)** $[P(x) + Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

a) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 10x - 5) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 - 6x^5 + 13x^3 - x^2 + 20x - 15$

b) $[(3x^2 - x + 1) - (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)] \cdot (2x + 3) =$
$= (-3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x + 3) =$
$= -6x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 22x + 6$

c) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) +$
$+ (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 + 6x^2 - 5x - 6) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 27x^3 + 8x^2 - 27x - 18$

d) $[(2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1) -$
$- (3x^2 - x + 1)] \cdot (2x + 3) = (2x^5 + 5x^3 - 3x - 8) \cdot (2x + 3) =$
$= 4x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 15x^3 - 6x^2 - 25x - 24$

057 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x\right) - \left(\frac{5}{4}x + 7\right) + \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 3\right)$

b) $\left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + x - 7\right) \cdot \left(\frac{5}{2}x^2 - 3x\right)$

c) $\frac{2}{5}x^2 \cdot (x^3 - 3x^2 + x - 1) - x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}\right)$

d) $\frac{5}{6}x \cdot (x^5 - x^2 + 3x - 1) - x^5 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}\right)x^2-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}-\dfrac{9}{4}\right)x+(-7+3)=4x^2-\dfrac{11}{4}x-4$

b) $\dfrac{25}{6}x^5-6x^4+\dfrac{37}{10}x^3-\dfrac{41}{2}x^2+21x$

c) $\left(\dfrac{2}{5}x^5-\dfrac{6}{5}x^4+\dfrac{2}{5}x^3-\dfrac{2}{5}x^2\right)-\left(\dfrac{1}{2}x^5-x^4+\dfrac{2}{3}x^3\right)=$

$$=-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{15}x^3-\frac{2}{5}x^2$$

d) $\left(\dfrac{5}{6}x^6-\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x\right)-\left(-\dfrac{5}{2}x^6+\dfrac{4}{3}x^5\right)=$

$$=-\frac{1}{3}x^7+\frac{10}{3}x^6-\frac{4}{3}x^5-\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{6}x$$

058 **Divide.**

a) $(4x^4+3x^3-5x^2+x+7):(x-1)$

b) $(4x^4-2x^3+3x^2-2x+5):(x+1)$

c) $(7x^5+4x^4+3x^3-5x^2+2x-1):(x^2+x)$

d) $(x^4-2x^3+x^2-x+3):(x^2+x+1)$

e) $(4x^4-2x^3+7x^2-2x+3):(x^2-x-2)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +x & +7 & x-1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3+7x^2+2x+3 \\ \cline{1-5}
 & 7x^3 & -5x^2 & +x & +7 & \\
 & -7x^3 & +7x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & +x & +7 & \\
 & & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & +7 & \\
 & & & -3x & +3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 10 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & x+1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & -4x^3 & & & & 4x^3-6x^2+9x-11 \\ \cline{1-5}
 & -6x^3 & +3x^2 & -2x & +5 & \\
 & 6x^3 & +6x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 9x^2 & -2x & +5 & \\
 & & -9x^2 & -9x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -11x & +5 & \\
 & & & 11x & +11 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 16 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
7x^5 & +4x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & x^2+x \\ \cline{7-7}
-7x^5 & -7x^4 & & & & & 7x^3-3x^2+6x-11 \\ \cline{1-6}
 & -3x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & \\
 & 3x^4 & +3x^3 & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 6x^3 & -5x^2 & +2x & -1 & \\
 & & -6x^3 & -6x^2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -11x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & 11x^2 & +11x & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 13x & -1 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & +x^2 & -x & +3 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2-3x+3 \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & & -x & +3 & \\
 & 3x^3 & +3x^2 & +3x & & \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & +2x & +3 & \\
 & & -3x^2 & -3x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & &
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -2x^3 & +7x^2 & -2x & +3 & x^2-x-2 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & +8x^2 & & & 4x^2+2x+17 \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & +15x^2 & -2x & +3 & \\
 & -2x^3 & +2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-5}
 & & 17x^2 & +2x & +3 & \\
 & & -17x^2 & +17x & +34 & \\ \cline{3-5}
 & & & 19x & +37 &
\end{array}$$

059 ● **Desarrolla.**

a) $(3x+2)^2$

b) $(3x-2)^2$

c) $(3x^2-2x)^2$

d) $(7x^3+4x^2)^2$

e) $(2x+7)\cdot(2x-7)$

f) $(2x^2+3x)\cdot(2x^2-3x)$

g) $(x^4+3x^5)\cdot(x^4-3x^5)$

h) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

a) $9x^2+12x+4$

b) $9x^2-12x+4$

c) $9x^4-12x^3+4x^2$

d) $49x^6+56x^5+16x^4$

e) $4x^2-49$

f) $4x^4-9x^2$

g) x^8-9x^{10}

h) $4x^2-2x+\dfrac{1}{4}$

060 ●● **Desarrolla estos cuadrados.**

a) $(x+5)^2$

b) $(2y-7)^2$

c) $(-y-8)^2$

d) $(xy-6x)^2$

e) $(-x-y)^2$

f) $(x+2xy)^2$

a) $x^2+10x+25$

b) $4y^2-28y+49$

c) $y^2+16y+64$

d) $x^2y^2-12x^2y+36x^2$

e) $x^2+2xy+y^2$

f) $x^2+2x^2y+4x^2y^2$

061 Completa las siguientes igualdades.

a) $(2x+3)^2 = \square + 12x + \square$ **c)** $(9+7x)\cdot(9-7x) = \square - \square$

b) $(5-3x)^2 = 25 - \square + \square\, x^2$ **d)** $(\square + \square)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$

a) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) $(5-3x)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

c) $(9+7x)\cdot(9-7x) = 9^2 - (7x)^2 = 81 - 49x^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot x + x^2 = (x^2+x)^2$

062 **HAZLO ASÍ**

Realiza la siguiente operación.

$$(2x-3)^2 - (2+x)^2$$

PRIMERO. Se desarrolla el polinomio aplicando los resultados de las igualdades notables.

$$(2x-3)^2 - (2+x)^2 = (4x^2 - 12x + 9) - (4 + 4x + x^2)$$

SEGUNDO. Se quitan los paréntesis, teniendo en cuenta los signos.

$$(4x^2 - 12x + 9) - (4 + 4x + x^2) = 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 4x - x^2$$

TERCERO. Se reduce el polinomio.

$$4x^2 - 12x + 9 - 4 - 4x - x^2 = 3x^2 - 16x + 5$$

Por tanto: $(2x-3)^2 - (2+x)^2 = 3x^2 - 16x + 5$.

063 Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones.

a) $5x^2 + (2x^2+1)^2 - 2x^4 - (x-1)^2$

b) $(x-1)^2 - (x^2+x+1)$

c) $(5x+5)^2 - (5x-5)^2$

d) $(2x^3 - 3x^2)^2 - (2x+2)\cdot(2x-2)$

e) $(x+6)^2 - (x-6)^2 - (x-5)\cdot(x+5)$

f) $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + (2x+1)\cdot(3x+2)$

a) $5x^2 + (2x^2+1)^2 - 2x^4 - (x-1)^2 = 5x^2 + 4x^4 + 4x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 + {}$
$+ 2x - 1 = 2x^4 + 8x^2 + 2x$

b) $(x-1)^2 - (x^2+x+1) = x^2 - 2x + 1 - x^2 - x - 1 = -3x$

c) $(5x+5)^2 - (5x-5)^2 = [(5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 5 + 5^2] -$
$- [(5x)^2 - 2\cdot 5x\cdot 5 + 5^2] = 25x^2 + 50x + 25 - 25x^2 + 50x - 25 = 100x$

d) $(2x^3 - 3x^2)^2 - (2x+2)\cdot(2x-2) = (2x^3)^2 - 2\cdot 2x^3\cdot 3x^2 + (3x^2)^2 -$
$- [(2x)^2 - 2^2] = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^2 + 4$

e) $(x+6)^2 - (x-6)^2 - (x-5)\cdot(x+5) =$
$= x^2 + 12x + 36 - x^2 + 12x - 36 - x^2 + 25 = -x^2 + 24x + 25$

f) $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + (2x+1)\cdot(3x+2) =$
$= (2x)^2 + 2\cdot 2x + 1 - ((2x)^2 - 2\cdot 2x + 1) + 6x^2 + 4x + 3x + 2 =$
$= 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 + 6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 15x + 2$

064 ●●

Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o diferencia.

a) $9x^2 + 18x + 9$

b) $16x^2 - 16x + 4$

c) $x^2 + 16x + 64$

d) $4x^2 + 4x + 1$

a) $3^2x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3x + 3^2 = (3x + 3)^2$

b) $4^2x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2^2 = (4x - 2)^2$

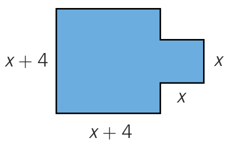
c) $1^2x^2 + 2 \cdot 1 \cdot 8x + 8^2 = (x + 8)^2$

d) $2^2x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1x + 1^2 = (2x + 1)^2$

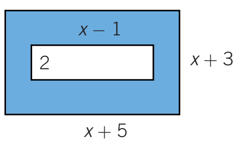
065 ●●

Expresa el área de cada figura mediante un polinomio. Simplifica su expresión.

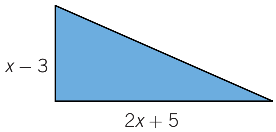
a)



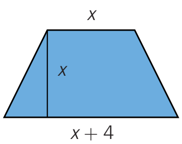
c)



b)



d)



a) $(x + 4)^2 + x^2 = 2x^2 + 8x + 16$

b) $\dfrac{(x - 3) \cdot (2x + 5)}{2} = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{15}{2}$

c) $(x + 5) \cdot (x + 3) - 2(x - 1) = x^2 + 8x + 15 - 2x + 2 = x^2 + 6x + 17$

d) $\dfrac{x + (x + 4)}{2} \cdot x = x^2 + 2x$

066 ●●

Escribe los polinomios como producto de dos factores.

a) $x^2 - 16$

b) $x^4 - 36$

c) $4x^2 - 25$

d) $x^2 - 4x + 4$

e) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

f) $16x^4 + 24x^2 + 9$

a) $(x + 4) \cdot (x - 4)$

b) $(x^2 + 6) \cdot (x^2 - 6)$

c) $(2x + 5) \cdot (2x - 5)$

d) $(x - 2)^2$

e) $(4x - 3y)^2$

f) $(4x^2 + 3)^2$

067 ●●

Fíjate en el ejemplo resuelto y completa.

$$[(x + 2) + 3] \cdot [(x + 2) - 3] = (x + 2)^2 - 9$$

a) $[(3x - y) + 4] \cdot [(3x - y) - 4]$

b) $[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c]$

a) $(3x - y)^2 - 16$

b) $(a + b)^2 - c^2$

068 Extrae factor común en estas expresiones.

a) $3x^2 - 4x$

b) $(x + 1) + 3(x + 1)$

c) $xy - 6xyz - 5xyzt$

d) $3x - 4x^2 - 6x^3$

a) $x(3x - 4)$

b) $(x + 1) \cdot (1 + 3) = 4(x + 1)$

c) $xy(1 - 6z - 5zt)$

d) $x(3 - 4x - 6x^2)$

069 Simplifica estas expresiones aplicando las igualdades notables y extrayendo factor común.

a) $7x^2 - 14x + 7$

b) $16x^2 + 64x + 64$

c) $x^3 - 2x^2 + x$

d) $18x^4 - 12x^2 + 2$

e) $(2x + 4) \cdot (x - 2)$

f) $(x - 5) \cdot (x^2 + 5x)$

g) $(-x - 7) \cdot (x - 7)$

h) $(-x^2 + 5) \cdot (-x^2 - 5)$

a) $7(x^2 - 2x + 1) = 7(x - 1)^2$

b) $16(x^2 + 4x + 4) = 16(x + 2)^2$

c) $x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

d) $2(9x^4 - 6x^2 + 1) = 2(3x^2 - 1)^2$

e) $2(x + 2) \cdot (x - 2) = 2(x^2 - 4)$

f) $x\,(x - 5) \cdot (x + 5) = x(x^2 - 25)$

g) $-(x + 7) \cdot (x - 7) = -(x^2 - 49) = 49 - x^2$

h) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5) = x^4 - 25$

070 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE SIMPLIFICAN FRACCIONES ALGEBRAICAS?

Simplifica. $\dfrac{(y^4 - y^3) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)}$

PRIMERO. Se descomponen el numerador y el denominador en tantos factores como sea posible.

$$\frac{(y^4 - y^3) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} = \frac{y^3(y - 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{xy^2(x - 1)} =$$

Se saca factor común a y^3: $y^4 - y^3 = y^3 \cdot (y - 1)$

Cuadrado de una diferencia: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

$$= \frac{y^3(y - 1) \cdot (x - 1)^2}{xy^2(x - 1)}$$

SEGUNDO. Se dividen el numerador y el denominador entre los factores comunes a ambos.

$$\frac{y^{\cancel{3}} \cdot (y - 1) \cdot (x - 1)^{\cancel{2}}}{x \cdot \cancel{y^2} \cdot \cancel{(x - 1)}} = \frac{y(y - 1)(x - 1)}{x}$$

071 Simplifica las fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}$ c) $\dfrac{y^2(x^2-4x+4)}{x(x-2)}$

b) $\dfrac{x^2(x^2-4)}{x(x-2)}$ d) $\dfrac{(x^2-9)(y^2-16)}{xy(2x-6)(y+4)^2}$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)}=\dfrac{(x+1)}{x}$

b) $\dfrac{x^2(x+2)\cdot(x-2)}{x(x-2)}=x(x+2)$

c) $\dfrac{y^2(x-2)^2}{x(x-2)}=\dfrac{y^2(x-2)}{x}$

d) $\dfrac{(x+3)\cdot(x-3)\cdot(y+4)\cdot(y-4)}{2xy(x-3)\cdot(y+4)^2}=\dfrac{(x+3)\cdot(y-4)}{2xy(y+4)}$

072 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3(x^2-16)}{x(x+4)}$ d) $\dfrac{(3x-2)^2}{9x^2-4}$

b) $\dfrac{x(2x^2-16x+32)}{(x^2-16)}$ e) $\dfrac{(6x+8)^2}{27x^2-48}$

c) $\dfrac{18x^4-36x^2+18}{9x^2(x-1)^2}$ f) $\dfrac{(3x+12)(x-4)}{2x^2-32}$

a) $\dfrac{x^2(x-4)\cdot(x+4)}{x(x+4)}=x(x-4)$

b) $\dfrac{2x(x-4)^2}{(x-4)\cdot(x+4)}=\dfrac{2x(x-4)}{(x+4)}$

c) $\dfrac{18(x^2-1)^2}{9x^2(x-1)^2}=\dfrac{18(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{9x^2(x-1)^2}=\dfrac{2(x+1)^2}{x^2}$

d) $\dfrac{(3x+2)^2}{(3x+2)\cdot(3x-2)}=\dfrac{(3x+2)}{(3x-2)}$

e) $\dfrac{4(3x+4)^2}{3(3x+4)\cdot(3x-4)}=\dfrac{4(3x+4)}{3(3x-4)}$

f) $\dfrac{3(x+4)\cdot(x-4)}{2(x+4)\cdot(x-4)}=\dfrac{3}{2}$

073 Si $P(x)$ tiene grado 5 y $Q(x)$ tiene grado 2, determina, cuando sea posible, los grados de los polinomios:

a) $P(x)+Q(x)$ c) $P(x)\cdot Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$ d) El cociente y el resto de $P(x):Q(x)$.

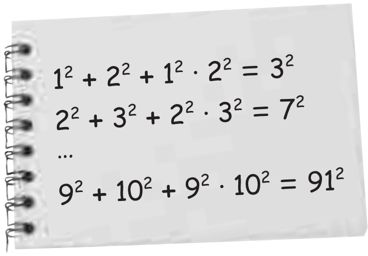
Haz lo mismo si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen grado 5.

a) Grado 5.
b) Grado 5.
c) Grado $7 = 5 + 2$.
d) Cociente $\rightarrow$ Grado $3 = 5 - 2$.
Resto $\longrightarrow$ Grado menor que 2.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen grado 5:

a) No se puede saber, porque puede ocurrir que algunos de los términos se anulen en la suma, si los coeficientes son opuestos.
b) No se puede saber, porque quizá alguno de los términos se anulen en la resta, si los coeficientes son opuestos.
c) Grado $10 = 5 + 5$.
d) Cociente $\rightarrow$ Grado $0 = 5 - 5$.
Resto $\longrightarrow$ Grado menor que 5.

074 **Las sumas siguientes son cuadrados perfectos.**



A la vista de estos resultados, ¿sabrías determinar a qué cuadrado es igual la siguiente expresión?

$$x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2$$

Comprueba que tu igualdad es correcta.

$$x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2 = [x\,(x + 1) + 1]^2$$

Para demostrar esta fórmula, partimos del segundo miembro:

$$\begin{aligned}[x(x + 1) + 1]^2 &= [x(x + 1)]^2 + 2x(x + 1) + 1 = x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + 1 = \\ &= x^2(x + 1)^2 + 2x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^2(x + 1)^2 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = \\ &= x^2 + (x + 1)^2 + x^2(x + 1)^2\end{aligned}$$

075 **Comprueba con algunos ejemplos que el producto de tres números enteros consecutivos sumado con el número del medio, es siempre un cubo perfecto.**

Demuéstralo para cualesquiera tres números enteros consecutivos: $x - 1$, x y $x + 1$.

Ejemplos: $2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 = 27 = 3^3$
$4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 = 125 = 5^3$
$9 \cdot 10 \cdot 11 + 10 = 1.000 = 10^3$

$$(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) + x = (x^3 - x) + x = x^3$$

076 ●●● **Siguiendo el método aplicado para hallar el desarrollo de las igualdades notables, averigua los desarrollos de:**

a) $(a+b)^3$ **c)** $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$

b) $(a-b)^3$ **d)** $(a-b)^4$

a) $(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2+2ab+b^2) \cdot (a+b) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3$

b) $(a-b)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2-2ab+b^2) \cdot (a-b) =$
$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

c) $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2 = ((a+b) \cdot (a-b)) \cdot ((a+b) \cdot (a-b)) = (a^2-b^2)^2 =$
$= ((a^2)^2 - 2(a^2) \cdot (b^2) + (b^2)^2) = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

d) $(a-b)^4 = (a-b)^3 \cdot (a-b) = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \cdot (a-b) =$
$= a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 - a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 =$
$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

EN LA VIDA COTIDIANA

077 ●●● **Una fábrica produce mesas elaboradas a mano. El dueño de la fábrica ha observado que los costes de fabricación por unidad varían excesivamente dependiendo del número de mesas producidas.**

Además, ha llegado a la conclusión de que el coste total (en euros) de la producción de *x* mesas viene dado por la fórmula:

$$C(x) = x^3 + 5x + 16.000$$

Según todo lo anterior:

a) ¿Cuál es el coste de producción de 40 mesas? ¿Cuánto cuesta producir cada unidad? ¿Y de 20 mesas? ¿Cuánto cuesta producir cada unidad en este caso?

Me han hecho un pedido de 18 mesas y tengo dos opciones:

- Fabricar 18 mesas y venderlas al precio de catálogo: 1.700 € por mesa.
- Ofrecer a mi cliente una oferta de 20 mesas a 1.640 € cada una.

b) ¿Cuál es la diferencia en los beneficios del fabricante en cada caso? ¿Qué opción le reportará mayor beneficio?

a) El coste de fabricación de 40 mesas es: $C(40) = 40^3 + 5 \cdot 40 + 16.000 =$
$= 80.200$ €

La unidad cuesta producirla: 80.200 : 40 = 2.005 €.

Fabricar 20 mesas cuesta: $C(20) = 20^3 + 5 \cdot 20 + 16.000 = 24.100$ € y la unidad cuesta producirla: 24.100 : 20 = 1.205 €.

b) Fabricar 18 mesas cuesta: $C(18) = 18^3 + 5 \cdot 18 + 16.000 = 21.922$ €.
Los ingresos son: $1.700 \cdot 18 = 30.600$ €.
Las ganancias son: $30.600 - 21.922 = 8.678$ €.

Fabricar de 20 mesas cuesta: $C(20) = 20^3 + 5 \cdot 20 + 16.000 = 24.100$ €
Los ingresos son: $1.640 \cdot 20 = 32.800$ €.
Las ganancias son: $32.800 - 24.100 = 7.300$ €.

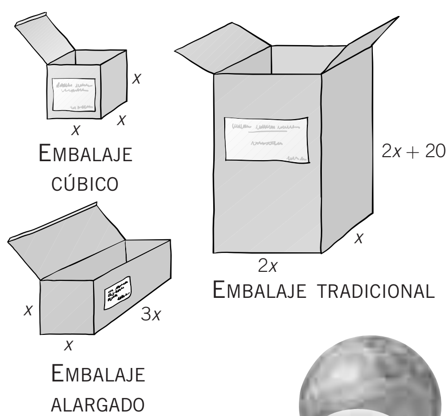
La diferencia entre los beneficios es: $8.678 - 7.300 = 1.378$ € al vender 18 mesas, que es la opción más beneficiosa para el fabricante.

078 ●●●

Embalajes Cartilla fabrica cajas de cartón para embalar.

Tienen tres tipos diferentes de cajas y cada cliente puede elegir el formato y las dimensiones según sus necesidades.

Todas las medidas están expresadas en centímetros y, por exigencias de producción y de resistencia del cartón, los valores de la variable tienen algunas restricciones según el modelo. Además, deben ser mayores que 10 cm y menores que 50 cm.



a) Expresa en forma de polinomio la cantidad de cartón necesaria para fabricar cada embalaje.

b) Si el precio del cartón es 0,02 €/m², ¿cuál será el precio del cartón necesario para fabricar 200 cajas de embalaje tradicional de 30 × 60 × 80 cm?

c) ¿Qué tipo de cajas necesitaremos para embalar estas esferas?

a) La medida del diámetro de la esfera no debe exceder de 50 cm.
Si queremos que el embalaje sea individual, lo haremos en tres cajas cúbicas.
Si queremos embalar las tres esferas juntas, sin que sobre espacio, usaremos el embalaje alargado.
Si queremos embalar las tres esferas juntas, y que sobre espacio, utilizaremos el embalaje tradicional.

b) Embalaje cúbico: 6 caras de superficie $x^2 \rightarrow S(x) = 6x^2$
Embalaje alargado: 2 caras de superficie x^2 y 4 caras de superficie:

$$3x^2 \rightarrow S(x) = 14x^2$$

Embalaje tradicional: 2 caras de superficie $2x^2$, 2 caras de superficie $2x^2 + 20$ y 2 caras de superficie $4x^2 + 40x \rightarrow S(x) = 2(8x^2 + 60x) = 16x^2 + 120x$

c) $x = 30 \rightarrow$ La superficie de cada caja es:
$S(30) = 16 \cdot 30^2 + 120 \cdot 30 = 18.000\ \text{cm}^2 \rightarrow 18.000\ \text{cm}^2 = 1{,}8\ \text{m}^2$
200 cajas tienen una superficie de $200 \cdot 1{,}8 = 360\ \text{m}^2$ y un coste de $360 \cdot 2 = 720$ céntimos de euro = 7,20 €.