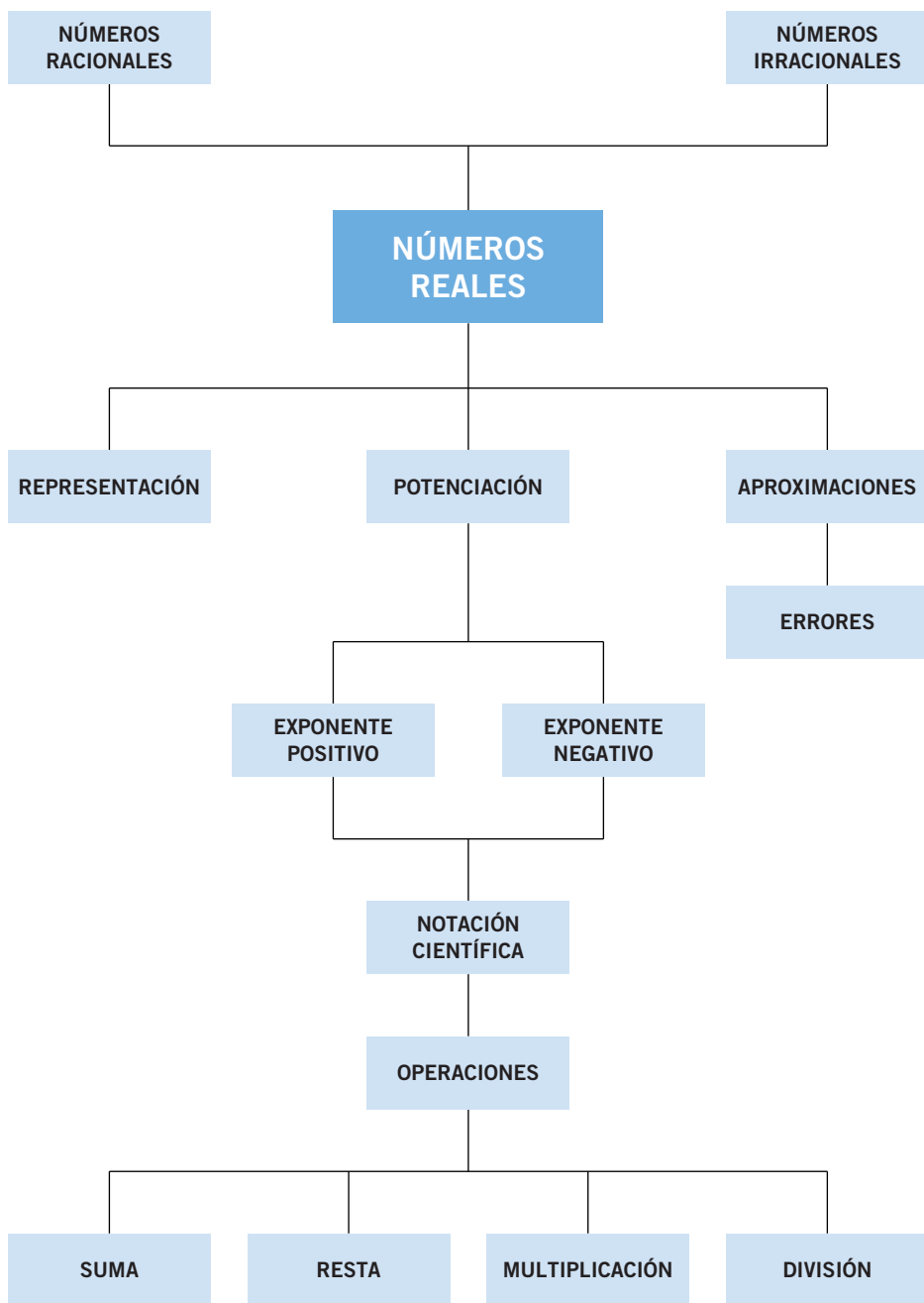


2

Números reales



La razón irracional

El gran Pitágoras, el que estudió el mundo y su relación con los números, el descubridor de la belleza racional de todas las cosas creadas, al final de su vida, en los albores del siglo V a.C., se confesaba a uno de sus discípulos amargamente:

–Escucha –le decía a Hipaso de Metaponto–: Toda mi vida he buscado la verdad en los números; la explicación de lo divino y lo humano estaba en ellos o en sus razones, todo era perfecto y explicable, todo razonable...

Hipaso miraba a su maestro con admiración, mientras asentía con la cabeza.

Mientras tanto, Pitágoras continuaba:

–Ahora que ha llegado el final de mi vida he de confesarte una horrible verdad: hace tiempo que los descubrí, hay otros.

–¿Otros? –preguntó Hipaso.

–Sí, están ahí pero son inconmensurables: cualquiera puede construir un cuadrado cuyo lado mida 1; sin embargo, será incapaz de medir su diagonal. Incluso la razón de la Pentalfa no es tal, sino uno de estos camuflado.

Si no lo crees intenta medir la diagonal de esta habitación que tiene 3 pasos de ancho y 5 de largo.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2 + 5^2} &= \sqrt{9 + 25} = \\ &= \sqrt{34} = 5,830951\dots\end{aligned}$$

Observamos que aunque el ancho y el eje largo de la habitación se pueden medir con números enteros, su diagonal es un número irracional, es decir, no es medible.



Números reales

EJERCICIOS

001 Calcula las siguientes potencias.

a) 3^2

d) $(-5)^3$

g) $(4,25)^4$

b) 7^4

e) $(-2,02)^4$

h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

c) $(-9)^2$

f) $\left(-\frac{5}{8}\right)^5$

i) $(-14,32)^8$

a) 9

d) -125

g) 326,25390625

b) 2.401

e) 16,64966416

h) $-\frac{1}{27}$

c) 81

f) $-\frac{3.125}{32.768}$

i) 8.622.994,474905370624

002 Calcula $(-0,8)^2$, $(-0,8)^3$ y $(-0,8)^4$. ¿Cuál es mayor?

$(-0,8)^2 = 0,64$

$(-0,8)^3 = -0,512$

$(-0,8)^4 = 0,4096$

El mayor es $(-0,8)^2$.

003 Expresa en forma de potencia.

a) $3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3$

b) $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

a) 3^6

b) $\left(-\frac{1}{7}\right)^3$

004 Calcula estas potencias.

a) 7^{-3}

d) $(-5)^{-2}$

g) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

j) $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-5}$

b) 7^1

e) $(-5)^0$

h) $\left(\frac{8}{5}\right)^1$

k) $\left(-\frac{8}{5}\right)^0$

c) 7^{-1}

f) $(-5)^{-1}$

i) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$

l) $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-1}$

a) $\frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

e) 1

i) $\frac{5}{8}$

b) 7

f) $\frac{1}{(-5)^1} = -\frac{1}{5}$

j) $-\frac{5^5}{8^5} = -\frac{3.125}{32.768}$

c) $\frac{1}{7}$

g) $\frac{5^4}{8^4} = \frac{625}{4.096}$

k) 1

d) $\frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

h) $\frac{8}{5}$

l) $-\frac{5}{8}$

005 Contesta si es verdadero o falso.

a) Una potencia de exponente negativo es siempre positiva.

b) Una potencia de exponente 0 es siempre positiva.

a) Falso, será siempre positiva si el exponente es par.

b) Verdadero, siempre vale 1.

006 ¿Cómo calcularías $(0,2)^{-3}$?

$$0,2 = \frac{1}{5} \rightarrow (0,2)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$$

007 Calcula.

a) $(8 \cdot 4)^3$

d) $[6 \cdot 5]^{-2}$

b) $[(-1) \cdot (-4)]^3$

e) $[(-3) \cdot 5]^{-2}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

f) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

a) $8^3 \cdot 4^3 = 512 \cdot 64 = 32.768$

d) $\frac{1}{6^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{36 \cdot 25} = \frac{1}{900}$

b) $(-1)^3 \cdot (-4)^3 = (-1) \cdot (-64) = 64$

e) $\frac{1}{(-3)^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{9 \cdot 25} = \frac{1}{225}$

c) $\frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$

f) $\frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

008 Resuelve:

a) $\left(2 \cdot \frac{7}{3}\right)^5$

b) $\left[\frac{3}{5} \cdot (-10)\right]^{-2}$

a) $\left(\frac{14}{3}\right)^5 = \frac{14^5}{3^5} = \frac{537.824}{243}$

b) $(-6)^5 = 6^5 = 7.776$

009 Señala qué desigualdad es cierta.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{4}$

b) $[2 \cdot (-1)]^4 < \frac{1}{2}$

a) Es cierta: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

b) Es falsa: $[2 \cdot (-1)]^4 = 2^4 = 16 > \frac{1}{2}$.

Números reales

010 Expresa como una sola potencia.

a) $5^4 \cdot 5^6$

e) $[2^2]^3$

b) $(-9)^6 : (-9)^2$

f) $[(-2)^2]^3$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} : \left(\frac{5}{6}\right)^6$

g) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3$

d) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^2$

h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{4}{3}\right)^3$

a) $5^{4+6} = 5^{10}$

e) $2^{2 \cdot 3} = 2^6$

b) $(-9)^{6-2} = 9^4$

f) $(-2)^{2 \cdot 3} = 2^6$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10-6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

g) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{3+3} = \left(\frac{4}{3}\right)^6$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{4 \cdot 2} = \left(\frac{3}{5}\right)^8$

h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{3-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

011 Simplifica estas operaciones con potencias.

a) $(4^3 \cdot 4^2)^3$

d) $(7^{11} : 7^5)^2$

b) $[(-5)^3 : (-5)^2]^2$

e) $(7^2 \cdot 9^4)^2$

c) $[(4,2)^4 \cdot (4,2)^3]^4$

f) $[(-3)^5 \cdot 4^5]^2$

a) $4^{(3+2) \cdot 3} = 4^{15}$

d) $7^{(11-5) \cdot 2} = 7^{12}$

b) $(-5)^{(3-2) \cdot 2} = 5^2$

e) $7^4 \cdot 9^8$

c) $(4,2)^{(4+3) \cdot 4} = (4,2)^{28}$

f) $3^{10} \cdot 4^{10}$

012 Expresa como una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 4^3$

b) $(3^{-5} \cdot 9^3)^{-2}$

a) $2^5 \cdot 4^3 = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$

b) $(3^{-5} \cdot 9^3)^{-2} = (3^{-5} \cdot 3^6)^{-2} = 3^{-2}$

013 Escribe en notación científica.

a) 493.000.000

c) 0,0004464

e) 253

b) 315.000.000.000

d) 12,00056

f) 256,256

a) $4,93 \cdot 10^8$

c) $4,464 \cdot 10^{-4}$

e) $2,53 \cdot 10^2$

b) $3,15 \cdot 10^{11}$

d) $1,200056 \cdot 10^1$

f) $2,56256 \cdot 10^2$

014 Escribe, con todas sus cifras, los siguientes números dados en notación científica.

a) $2,51 \cdot 10^6$

b) $9,32 \cdot 10^{-8}$

c) $3,76 \cdot 10^{12}$

a) 2.510.000

b) 0,0000000932

c) 3.760.000.000.000

015 Estos números no están correctamente escritos en notación científica. Corrígelos.

- a) $0,247 \cdot 10^8$ b) $24,7 \cdot 10^8$ c) $0,247 \cdot 10^{-8}$
 a) $2,47 \cdot 10^7$ b) $2,47 \cdot 10^9$ c) $2,47 \cdot 10^{-9}$

016 Los activos financieros de una entidad bancaria son aproximadamente 52 billones de euros. Expresa esa cantidad en notación científica.

$$5,2 \cdot 10^{13}$$

017 Resuelve estas operaciones utilizando la notación científica.


- a) $7,77 \cdot 10^9 - 6,5 \cdot 10^7$ d) $(34 \cdot 10^3) \cdot (25,2 \cdot 10^{-2})$
 b) $0,05 \cdot 10^2 + 1,3 \cdot 10^3$ e) $(0,75 \cdot 10^7) : (0,3 \cdot 10^3)$
 c) $37,3 \cdot 10^{-2} + 0,01 \cdot 10^2$ f) $(8,06 \cdot 10^9) \cdot (0,65 \cdot 10^7)$

No olvides expresar el resultado en notación científica.

- a) $777 \cdot 10^7 - 6,5 \cdot 10^7 = 770,5 \cdot 10^7 = 7,705 \cdot 10^9$
 b) $0,005 \cdot 10^3 + 1,3 \cdot 10^3 = 1,305 \cdot 10^3$
 c) $0,373 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^0 = 1,373 \cdot 10^0$
 d) $3,4 \cdot 10^4 \cdot 2,52 \cdot 10^{-1} = 8,568 \cdot 10^3$
 e) $(7,5 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^2) = 2,5 \cdot 10^4$
 f) $(8,06 \cdot 10^9) \cdot (6,5 \cdot 10^6) = 52,39 \cdot 10^{15} = 5,239 \cdot 10^{16}$

018 Calcula el término que falta en cada caso.

- a) $2,5 \cdot 10^6 - \square = 8,4 \cdot 10^5$ c) $(2,5 \cdot 10^6) \cdot \square = 8,4 \cdot 10^5$
 b) $9,32 \cdot 10^{-3} + \square = 5,6 \cdot 10^{-2}$ d) $(9,52 \cdot 10^{-3}) : \square = 5,6 \cdot 10^{-2}$
 a) $\square = 1,66 \cdot 10^6$ c) $\square = 3,36 \cdot 10^1$
 b) $\square = 4,668 \cdot 10^{-2}$ d) $\square = 11,7 \cdot 10^{-1}$

019  Resuelve esta suma: $7,8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99}$. Luego utiliza la calculadora para realizarla. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que sucede esto?

$7,8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99} = 1,28 \cdot 10^{100}$. Con la calculadora sale \exists , porque el orden de magnitud es 100, que tiene 3 cifras, y la calculadora solo trabaja con 2 cifras.

020 Clasifica los siguientes números decimales en racionales o irracionales.

- a) 4,325325325...
 b) 4,330300300030000300000...
 c) 1,23233233323333233333...
 d) 3,12359474747...
 a) Racional. c) Irracional.
 b) Irracional. d) Racional.

Números reales

021 Escribe cinco números racionales y cinco irracionales.

Racionales \rightarrow $1,1\overline{6}$; $1,\overline{6}$; 8; $2,8\overline{3}$; 0,4625

Irracionales \rightarrow 2,123456789101112...; 6,111213141516171819...; 0,010010001...; π ; $\sqrt{2}$

022 ¿Puedes anotar un número irracional con un solo dígito después de la coma? ¿Y con dos dígitos?

No, ya que se necesitan infinitos dígitos después de la coma.

023 Trunca y redondea los siguientes números a las centésimas y las milésimas.

a) 1,234564668

g) $\sqrt{5}$

b) $2,\overline{7}$

h) 3,222464

c) $4,\overline{51}$

i) $\sqrt{3}$

d) 1,43643625

j) 1,6467538

e) 2,222

k) 1,1234...

f) $3,12\overline{7}$

l) $5,\overline{5}$

a) Truncamiento: 1,23 y 1,234. Redondeo: 1,23 y 1,235.

b) Truncamiento: 2,77 y 2,777. Redondeo: 2,78 y 2,778.

c) Truncamiento: 4,51 y 4,515. Redondeo: 4,52 y 4,515.

d) Truncamiento: 1,43 y 1,436. Redondeo: 1,44 y 1,436.

e) Truncamiento: 2,22 y 2,222. Redondeo: 2,22 y 2,222.

f) Truncamiento: 3,12 y 3,127. Redondeo: 3,13 y 3,128.

g) Truncamiento: 2,23 y 2,236. Redondeo: 2,24 y 2,236.

h) Truncamiento: 3,22 y 3,222. Redondeo: 3,22 y 3,222.

i) Truncamiento: 1,73 y 1,732. Redondeo: 1,73 y 1,732.

j) Truncamiento: 1,64 y 1,646. Redondeo: 1,65 y 1,647.

k) Truncamiento: 1,12 y 1,123. Redondeo: 1,12 y 1,123.

l) Truncamiento: 5,55 y 5,555. Redondeo: 5,56 y 5,556.

024  Halla el error absoluto y relativo cometido en cada uno de los casos del ejercicio anterior.

a)	Aproximación	1,23	1,234	1,235
	Error absoluto	0,004564668	0,000564668	0,000435332
	Error relativo	0,003697391	0,000457382	0,00035262

b)	Aproximación	2,77	2,777	2,78	2,778
	Error absoluto	0,007777778	0,000777778	0,002222222	0,000222222
	Error relativo	0,0028	0,00028	0,0008	0,00008

c)	Aproximación	4,51	4,515	4,52
	Error absoluto	0,005151515	0,000151515	0,004848485
	Error relativo	0,00114094	3,3557E-05	0,001073826

d)	Aproximación	1,43	1,436	1,44	
	Error absoluto	0,00643625	0,00043625	0,00356375	
	Error relativo	0,004480707	0,000303703	0,002480966	
e)	Aproximación	2,22	2,222		
	Error absoluto	0,002	0		
	Error relativo	0,00090009	0		
f)	Aproximación	3,12	3,127	3,13	3,128
	Error absoluto	0,007777778	0,000777778	0,002222222	0,000222222
	Error relativo	0,002486679	0,000248668	0,00071048	0,00007
g)	Aproximación	2,23	2,236	2,24	
	Error absoluto	0,006067977	0,000067977	0,003932023	
	Error relativo	0,002713682	0,000030400	0,001758454	
h)	Aproximación	3,22	3,222		
	Error absoluto	0,002464000	0,000464000		
	Error relativo	0,000764632	0,000143989		
i)	Aproximación	1,73	1,732		
	Error absoluto	0,002050808	0,000050808		
	Error relativo	0,001184034	0,000029334		
j)	Aproximación	1,64	1,646	1,65	1,647
	Error absoluto	0,006753800	0,000753800	0,003246200	0,000246200
	Error relativo	0,004101281	0,000457749	0,001971272	0,000149506
k)	Aproximación	1,12	1,123		
	Error absoluto	0,003456789	0,000456789		
	Error relativo	0,003076922	0,000406592		
l)	Aproximación	5,55	5,555	5,56	5,556
	Error absoluto	0,005555556	0,000555556	0,004444444	0,000444444
	Error relativo	0,001000000	0,000100000	0,000800000	0,000080000

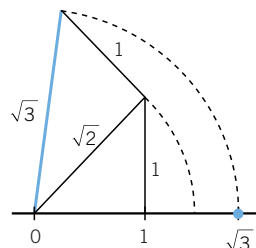
025 Al aproximar el peso de un gusano de 2,1236 g hemos cometido un error absoluto de 0,0236 g. Y al aproximar el peso de un buey de 824,36 kg hemos cometido un error de 4,36 kg. ¿En qué caso hemos cometido mayor error?

El error relativo, en el caso del gusano, es 0,01111.

El error relativo, en el caso del buey, es 0,00528.

Hemos cometido mayor error en el peso del gusano.

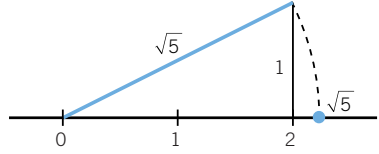
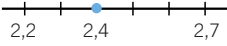
026 Representa el número $\sqrt{3}$ de forma exacta en la recta real. Hazlo construyendo un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 cm y $\sqrt{2}$ cm.



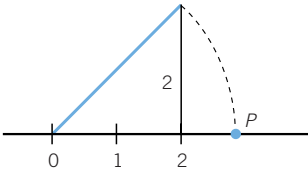
Números reales

027 Representa el número $\sqrt{5}$ de forma exacta y aproximada a las décimas. Utiliza un triángulo rectángulo de catetos 1 cm y 2 cm.

$$\sqrt{5} = 2,236067\dots$$

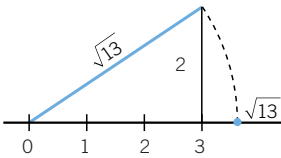


028 ¿Qué número es el representado en la figura?



$$\overline{OP}^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow \overline{OP} = \sqrt{8}$$

029 Representa de forma exacta el número $\sqrt{13}$. ¿Cómo lo haces?



Se toman 3 unidades sobre el eje horizontal y 2 sobre el vertical.

La hipotenusa medirá:

$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

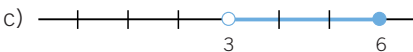
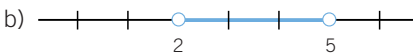
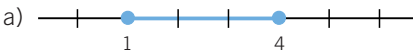
030 Representa los siguientes intervalos.

a) $[1, 4]$

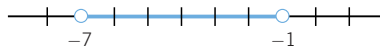
b) $(2, 5)$

c) $(3, 6]$

d) $[3, 7)$



031 ¿Qué intervalo es el representado?



Es el intervalo $(-7, -1)$.

032 ¿Qué números pertenecen al intervalo $(-1, 4]$?

a) 0

b) 3,98

c) $\sqrt{2}$

d) $-0,\overline{3}$

Todos los números pertenecen al intervalo.

- 033** ¿Cuántos puntos hay en el intervalo $[1, 2]$? ¿Y en $[1, 1; 1, 2]$?
¿Y en $[1, 1, 1; 1, 1, 2]$?

En cualquier intervalo no vacío hay infinitos puntos.

ACTIVIDADES

- 034** Escribe en forma de potencia los siguientes productos y calcula el resultado.

- a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 - b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
 - c) $\left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)$
- a) $2^4 = 16$
 b) $(-5)^6 = 15.625$
 c) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{-8}{125}$

- 035** Expresa en forma de producto y calcula el resultado.

- a) $(-3)^4$
 - b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$
 - c) 5^6
 - d) $\left(\frac{10}{3}\right)^2$
 - e) $(2,5)^3$
 - f) $(-2,3)^4$
- a) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
 b) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$
 c) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15.625$
 d) $\left(\frac{10}{3}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$
 e) $(2,5) \cdot (2,5) \cdot (2,5) = 15,625$
 f) $(-2,3) \cdot (-2,3) \cdot (-2,3) \cdot (-2,3) = 27,9841$

- 036** Escribe en forma de potencia, si es posible, estas expresiones.

- a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$
 - b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
 - c) $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4$
 - d) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5$
 - e) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3)$
 - f) $(6 + 6 + 6 + 6) \cdot 6$
 - g) $23 + 23 + 23 + 23$
 - h) $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
- a) 9^5
 b) No es posible.
 c) No es posible.
 d) No es posible.
 e) 6^3
 f) No es posible.
 g) No es posible.
 h) No es posible.

Números reales

037



Halla el resultado de las siguientes potencias utilizando la calculadora.

- | | | | |
|-----------|----------------------------------|---------------|--------------|
| a) 2^5 | d) $\left(\frac{1}{4}\right)^6$ | g) $(0,7)^2$ | j) $(-2)^5$ |
| b) 6^4 | e) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ | h) $(0,04)^6$ | k) $(-6)^4$ |
| c) 12^3 | f) $\left(\frac{3}{10}\right)^3$ | i) $(1,32)^8$ | l) $(-12)^3$ |
-
- | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------------|
| a) 64 | e) 5,0625 | i) 9,2170395205042176 |
| b) 1.296 | f) 0,027 | j) -32 |
| c) 1.728 | g) 0,49 | k) 1.296 |
| d) 0,000244140625 | h) 0,000000004096 | l) -1.728 |

038

Expresa cada número como potencia de un número positivo.

- a) 8 b) 27 c) 16 d) 81 e) 64 f) 125 g) 49 h) 121
- a) 2^3 b) 3^3 c) 2^4 d) 3^4 e) 2^6 f) 5^3 g) 7^2 h) 11^2

039

Escribe estos números como potencia de un número negativo.

- a) 16 c) 49 e) 121 g) -27 i) 64
- b) -125 d) -128 f) 144 h) -216
- a) $(-4)^2$ c) $(-7)^2$ e) $(-11)^2$ g) $(-3)^3$ i) $(-8)^2$
- b) $(-5)^3$ d) $(-2)^7$ f) $(-12)^2$ h) $(-6)^3$

040

Calcula las siguientes potencias.

- a) $(-2)^2$ b) $(-3)^3$ c) $-(-8^2)$ d) $-(-2)^3$
- a) 4 b) -27 c) -64 d) 8

041

Indica si son ciertas las siguientes igualdades.



- | | |
|---------------|---------------|
| a) Falsa. | d) Falsa. |
| b) Verdadera. | e) Verdadera. |
| c) Falsa. | f) Verdadera. |

042 Escribe cada número como potencia de un número entero.

- | | | |
|-------------|--------------|-------------|
| a) -81 | d) -1.000 | g) -49 |
| b) -8 | e) -25 | h) -2.187 |
| c) -16 | f) -512 | i) -7.776 |
| a) -3^4 | d) $(-10)^3$ | g) -7^2 |
| b) $(-2)^3$ | e) -5^2 | h) $(-3)^7$ |
| c) -2^4 | f) $(-2)^9$ | i) $(-6)^5$ |

043 Halla el valor de a en las siguientes igualdades.

- | | |
|----------------|------------------|
| a) $2^a = 32$ | c) $a^4 = 2.401$ |
| b) $3^a = 729$ | d) $a^3 = 216$ |
| a) $a = 5$ | c) $a = 7$ |
| b) $a = 6$ | d) $a = 6$ |

044 Calcula las siguientes potencias.

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) 2^{-3} | d) 4^{-2} | g) $(-5,02)^{-3}$ |
| b) $(1,3)^{-2}$ | e) $(-3)^{-2}$ | h) $(-2)^{-4}$ |
| c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ | f) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}$ | i) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$ |

$$a) \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$b) \frac{1}{(1,3)^2} = \frac{1}{1,69} = 0,5917159$$

$$c) 2^2 = 4$$

$$d) \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$e) \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} = 0,1\bar{1}$$

$$f) \frac{5^3}{(-3)^3} = -\frac{125}{27}$$

$$g) \frac{1}{(-5,02)^3} = \frac{1}{126,506008} = 0,0079047629$$

$$h) \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$i) (-6)^2 = 36$$

Números reales

045



Halla el resultado de las potencias utilizando la calculadora.



a) 7^{-4}

c) $(-0,07)^{-4}$

e) $(0,12)^{-7}$

b) $(-4)^{-7}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

f) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}$

a) 0,0004164931

d) 0,19753086419753

b) -0,00006103515625

e) 2.790.816,47233653

c) 41.649,312786339

f) -0,064

046



Considera las potencias 2^{-2} , 2^{-3} y 2^{-5} .

a) ¿Cuál es la mayor?

b) ¿Cómo es la potencia a medida que el exponente negativo aumenta en valor absoluto?

c) Contesta a las cuestiones anteriores para las potencias $0,7^{-3}$, $0,7^{-4}$ y $0,7^{-5}$.

a) La potencia mayor es 2^{-2} .

b) La potencia disminuye a medida que aumenta el exponente en valor absoluto.

c) La mayor es $0,7^{-5}$. La potencia aumenta a medida que lo hace el exponente en valor absoluto. La diferencia con el caso anterior es porque la base es ahora menor que la unidad.

047

Halla el valor de estas potencias.



a) $2^5 \cdot 2^3$

d) $(-4)^9 \cdot (-4)^5 \cdot (-4)$

b) $2^5 : 2^3$

e) $(-4)^9 : (-4)^5 : (-4)$

c) $3^7 \cdot 3^2 \cdot 3^4$

f) $(7 \cdot 4)^0$

a) $2^8 = 256$

d) $(-4)^{15} = -1.073.741.824$

b) $2^2 = 4$

e) $(-4)^3 = -64$

c) $3^{13} = 1.594.323$

f) 1

048



Obtén el resultado de las siguientes operaciones con potencias utilizando la calculadora.



a) $(0,03)^2 \cdot (0,03)^4$

b) $(4,1)^6 \cdot (4,1)^4$

c) $(1,2)^2 \cdot (1,2)^5 \cdot (1,2)^8$

d) $(0,6)^2 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,6)^{12}$

e) $(0,7)^6 \cdot (0,7)^{13} \cdot (0,7)^{11}$

a) $7,29 \cdot 10^{-10}$

b) 1.342.265,931

c) 15,40702157

d) $1,015599567 \cdot 10^{-4}$

e) $2,25393403 \cdot 10^{-5}$

049 Expresa el resultado como una sola potencia.

a) $(3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^8) : 3^9$

b) $(-2)^4 \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^5$

c) $(-7)^8 : (-7)^4 \cdot (-7)^2$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^6$

e) $\left[\left(-\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^3\right] : \left[\left(-\frac{1}{9}\right)^4 : \left(-\frac{1}{9}\right)\right]$

f) $(-5)^8 : [(-5)^3 : (-5)^3]$

g) $[6^9 \cdot 6^5] : [6^4 \cdot 6^2]$

a) 3^6

b) $(-2)^{15}$

c) $(-7)^6 = 7^6$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^1$

e) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2$

f) $(-5)^8$

g) 6^8

050 Aplica las propiedades de las potencias para resolver las expresiones.

a) $(7 \cdot 3)^4$

b) $[(-5) \cdot 3]^5$

c) $\left[\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{8}{6}\right)\right]^3$

d) $[(-8) : 5]^3$

e) $[(0,16) : (-3)]^2$

f) $\left[\left(\frac{4}{6}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right)\right]^5$

g) $(-6)^2 \cdot (-6)^4 \cdot (-6)^{12}$

h) $(0,3)^2 \cdot (0,3)^4$

i) $(-0,5)^6 \cdot (-0,5)^{13} \cdot (-0,5)^{11}$

j) $\left(-\frac{3}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{6}\right)^2$

a) $7^4 \cdot 3^4 = 2.401 \cdot 81 = 194.481$

b) $(-5)^5 \cdot 3^5 = -3.125 \cdot 243 = -759.375$

c) $\frac{64}{27} \cdot \left(-\frac{512}{216}\right) = -\frac{4.096}{729}$

d) $(-8)^3 : 5^3 = -512 : 125$

e) $\frac{(0,16)^2}{(-3)^2} = \frac{0,0256}{9}$

f) $\left[\left(\frac{4}{6}\right)^5 : \left(-\frac{7}{3}\right)^5\right] = -\frac{4^5 \cdot 3^5}{6^5 \cdot 7^5} = -\frac{2^5}{7^5}$

g) $(-6)^{18}$

h) $(0,3)^6$

i) $(-0,5)^{30}$

j) $\left(-\frac{3}{6}\right)^5$

Números reales

051 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CON BASES OPUESTAS?

Expresa como una sola potencia: $(-3)^4 \cdot 3^2$.

PRIMERO. Se descompone la base negativa y se aplica después la propiedad de potencia de un producto.

$$(-3)^4 \cdot 3^2 = (-1 \cdot 3)^4 \cdot 3^2 = (-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2$$

SEGUNDO. Se efectúan las operaciones con potencias de la misma base y se opera.

$$(-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2 = (-1)^4 \cdot 3^{4+2} = 1 \cdot 3^6 = 3^6$$

052 Expresa el resultado de cada división como una sola potencia.



a) $3^8 : 3^4$

d) $31^{40} : (-31)^4 : (-31)$

b) $(-9)^{12} : (-9)^4$

e) $(0,5)^{30} : (0,5)^5 : (0,5)^3$

c) $(-12)^{15} : 12^3 : 12^5$

a) 3^4

d) -31^{35}

b) $(-9)^8$

e) $(0,5)^{22}$

c) -12^7

053 Completa.



a) $2^3 \cdot \square = 2^5$

d) $(-3)^{12} : \square = (-3)^6$

b) $(-4)^5 \cdot \square = (-4)^{10}$

e) $\square : 5^6 = 5$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \square = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

f) $\square : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

b) $(-4)^5 \cdot (-4)^5 = (-4)^{10}$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^1 = \left(\frac{7}{2}\right)^7$

d) $(-3)^{12} : (-3)^6 = (-3)^6$

e) $5^7 : 5^6 = 5$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3$

054 Averigua el valor de a en estas igualdades.



a) $5^a \cdot 5^3 = 5^6$

c) $(-6)^a : (-6)^8 = (-6)^0$

b) $(-2)^{5a} : (-2)^{2a} = (-2)^6$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2a} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

a) $a = 3$

c) $a = 8$

b) $a = 2$

d) $a = 3$

055 Resuelve las operaciones.

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3$

b) $(2^{-2})^3 \cdot 2^{-4}$

c) $(-3)^{-5} : (-3)^2 \cdot (-3)^4$

d) $[(-3)^{-2}]^{-4} : (-3)^5$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

a) 2^5

b) $2^{-6} \cdot 2^{-4} = 2^{-10}$

c) $(-3)^{-3}$

d) $(-3)^8 : (-3)^5 = (-3)^3$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$

f) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-6} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

g) 3^3

h) $(-5)^{11}$

i) $(-6)^{-15} \cdot (-6)^{-20} = (-6)^{-35}$

f) $\left(\frac{-1}{4}\right)^{-6} : \left[\left(\frac{-1}{4}\right)^2\right]^{-3}$

g) $3^{-6} : 3^{-7} \cdot 3^2$

h) $(-5)^8 : (-5)^{-2} : (-5)^{-1}$

i) $[(-6)^3]^{-5} \cdot [(-6)^{-5}]^4$

056 Indica y corrige los errores de estas igualdades.

a) $3^2 + 3^3 + 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

b) $3^2 \cdot 3^3 - 3^5 = 3^{2+3} - 3^5 = 3^5 - 3^5 = 3^0 = 1$

c) $4^9 : 4^2 \cdot 4^4 = 4^9 : 4^{2+4} = 4^9 : 4^6 = 4^{9-6} = 4^3$

d) $(-2)^6 \cdot (-2)^3 = [(-2) \cdot (-2)]^{6+3} = 4^9$

e) $-3^2 \cdot 3^2 = (-3)^{2+2} = (-3)^4 = 3^4$

f) $2 \cdot (-3)^2 = [2 \cdot (-3)]^2 = (-6)^2 = 6^2$

g) $8^5 \cdot 8^7 = (8 + 8)^{5+7} = 16^{12}$

h) $3^1 \cdot 3^0 = 3^{1+0} = 3^0 = 1$

a) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^5 = 3^{2+3+5} = 3^{10}$

b) $3^2 \cdot 3^3 - 3^5 = 3^{2+3} - 3^5 = 3^5 - 3^5 = 0$

c) $4^9 : 4^2 \cdot 4^4 = 4^{9-2} \cdot 4^4 = 4^7 \cdot 4^4 = 4^{7+4} = 4^{11}$

d) $(-2)^6 \cdot (-2)^3 = (-2)^{6+3} = (-2)^9$

e) $-3^2 \cdot 3^2 = -3^{2+2} = -3^4$

f) $2 \cdot (-3)^2$

g) $8^5 \cdot 8^7 = 8^{12}$

h) $3^1 \cdot 3^0 = 3^{1+0} = 3^1$

Números reales

057 Justifica si son ciertas o no las igualdades.



a) $9^{-1} = -9$

b) $(-2)^{-4} = 2^4$

c) $(-3)^{-6} = 3^{-6}$

d) $(-3)^{-3} = (-3)^{-2} \cdot 3^{-1}$

e) $4^{-3} = (-4)^{-1} \cdot (-4)^4$

f) $(2^{-5})^{-1} = 2^{-6}$

a) Falsa: $9^{-1} = \frac{1}{9}$.

b) Falsa: $(-2)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$.

c) Verdadera: $(-3)^{-6} = \frac{1}{(-3)^6} = \frac{1}{3^6} = 3^{-6}$.

d) Falsa: $(-3)^3 = (-3)^2 \cdot (-3)^{-1} \neq (-3)^2 \cdot 3^{-1}$.

e) Falsa: $(-4)^{-1} \cdot (-4)^4 = (-4)^3 \neq 4^{-3}$.

f) Falsa: $(2^{-5})^{-1} = 2^5$.

058 Expresa como potencia única.



a) $(2^3)^4$

b) $[(-3)^3]^2$

c) $[-6^4]^3$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{14}$

e) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3\right]^{15}$

f) $[-5^2]^4$

a) 2^{12}

c) -6^{12}

e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{15}$

b) $(-3)^6$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^8$

f) 5^8

059 Calcula el valor de estas potencias.



a) $[(-3)^2]^2 \cdot [(-3)^3]^3$

b) $[(5)^8]^2 : [(-5)^4]^3$

a) $(-3)^4 \cdot (-3)^9 = (-3)^{13} = 1.594.323$

b) $5^{16} : (-5)^{12} = 5^{16} : 5^{12} = 5^4 = 625$

060 Resuelve.

- a) $(-2)^{-4} \cdot [(-2)^2]^3$ e) $-2^{-3} \cdot (-2^{-4})$
 b) $3^4 \cdot [(-3)^2]^{-2}$ f) $(-2^6) \cdot (-2^{-6})$
 c) $(-8)^3 \cdot 2^{-4}$ g) $(-3)^4 \cdot (-3^4)$
 d) $(-2)^{-3} \cdot 2^{-3}$ h) $4^{-3} \cdot 2^{-2}$
- a) $(-2)^{-4} \cdot (-2)^6 = (-2)^2$ e) 2^{-7}
 b) $3^4 \cdot 3^{-4} = 3^0 = 1$ f) $2^0 = 1$
 c) $(-2)^9 \cdot 2^{-4} = (-2)^5$ g) -3^8
 d) $-2^{-3} \cdot 2^{-3} = -2^{-6}$ h) $2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-8}$

061 Completa las siguientes igualdades.

- a) $[(-5)^3]^\square : (-5)^7 = (-5)^5$ c) $[7^3]^5 : 7^\square = 1$
 b) $[\square^2]^5 \cdot \square^4 = (-3)^{14}$ d) $11^9 \cdot [11^2]^3 = 11^\square$
- a) $[(-5)^3]^4 : (-5)^7 = (-5)^5$
 b) $[(-3)^2]^5 \cdot (-3)^4 = (-3)^{14}$
 c) $[7^3]^5 : 7^{15} = 1$
 d) $11^9 \cdot [11^2]^3 = 11^{15}$

062 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CUANDO LAS BASES TIENEN LOS MISMOS FACTORES?

Resuelve $16^2 \cdot 32^{-2}$.

PRIMERO. Se descomponen en factores primos.

$$16^2 \cdot 32^{-2} = (2^4)^2 \cdot (2^5)^{-2}$$

SEGUNDO. Se efectúan las operaciones: potencia de potencia y producto de potencias con la misma base.

$$(2^4)^2 \cdot (2^5)^{-2} = 2^8 \cdot 2^{-10} = 2^{(8-10)} = 2^{-2}$$

063 Simplifica estos productos de potencias.

- a) $5^4 \cdot 25^3$ e) $-12^3 \cdot 18^5$
 b) $8^4 \cdot 16^2$ f) $(-63)^5 \cdot 21^2$
 c) $6^3 \cdot 12^5$ g) $-72^3 \cdot (-4)^7$
 d) $4^7 \cdot 32$ h) $32^2 \cdot (-24)^3$
- a) $5^4 \cdot 5^6 = 5^{10}$ e) $-2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = -2^{11} \cdot 3^{13}$
 b) $2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$ f) $-3^{10} \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = -3^{12} \cdot 7^7$
 c) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 = 2^{13} \cdot 3^8$ g) $-3^6 \cdot 2^9 \cdot (-2^{14}) = 3^6 \cdot 2^{23}$
 d) $2^{14} \cdot 2^5 = 2^{19}$ h) $2^{10} \cdot (-2)^9 \cdot 3^3 = (-2)^{19} \cdot 3^3$

Números reales

064

Calcula, expresando el resultado como una sola potencia.

- a) $(5^2 \cdot 25^2)^3$ c) $((-2)^{12})^3 \cdot 8^5$ e) $((3)^{12})^3 \cdot ((-27)^5)^2$
b) $(9^2 : (-27)^4)^4$ d) $(6^3 \cdot 36^2)^6$ f) $(16^2 : 64^3)^5 \cdot 4^4$
- a) $(5^6)^3 = 5^{18}$ d) $(6^7)^6 = 6^{42}$
b) $(-3^4 : 3^{12})^4 = 3^{-32}$ e) $3^{36} \cdot 3^{30} = 3^{66}$
c) $2^{36} \cdot 2^{15} = 2^{41}$ f) $(4^4 : 4^9)^5 \cdot 4^4 = 4^{-25} \cdot 4^4 = 4^{-21}$

065

Efectúa las siguientes operaciones entre potencias, simplificando el resultado todo lo que puedas.

- a) $40^{12} : ((-4)^6)^{-6}$
b) $(-45)^{15} \cdot ((-15)^3)^{-6}$
c) $(9^2 : 27^4)^{-4} \cdot (6^{-3} \cdot 36^{-2})$
d) $\left[\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \right)^{-3} : \left(\frac{3}{2} \cdot (-4) \right) \right]^{-1}$
- a) $5^{12} \cdot 2^{36} : 2^{-72} = 5^{12} \cdot 2^{108}$
b) $-3^{30} \cdot 5^{15} \cdot 3^{-18} \cdot 5^{-18} = -3^{12} \cdot 5^{-3}$
c) $(3^{-8})^{-4} \cdot (2^{-7} \cdot 3^{-7}) = 2^{-7} \cdot 3^{-39}$
d) $[1^{-3} : (-2 \cdot 3)]^{-1} = -2 \cdot 3$

066

Expresa como potencia de base 10 el resultado de las siguientes operaciones.

- a) $0,000000001 \cdot 1.000.000$ c) $0,00000000001 : 1.000.000.000$
b) $0,0000000010 \cdot 10.000.000$ d) $0,000001 : 1.000$
- a) 10^{-3} b) 10^{-2} c) 10^{-20} d) 10^{-9}

067

Escribe en notación científica.

- a) Tres billones y medio. c) Diez millonésimas.
b) Doscientas milésimas. d) Cien mil millones y medio.
- a) $3,5 \cdot 10^{12}$ b) $2 \cdot 10^{-1}$ c) $1 \cdot 10^{-5}$ d) $1,000005 \cdot 10^{11}$

068

Escribe, con todas sus cifras, los siguientes números escritos en notación científica.

- a) $3,432 \cdot 10^4$ c) $3,124 \cdot 10^{-7}$
b) $1,3232 \cdot 10^{-3}$ d) $5,3732 \cdot 10^7$
- a) 34.320 c) 0,0000003124
b) 0,0013232 d) 53.732.000

069

Sin hacer las operaciones previamente, ¿sabrías decir cuál es el orden de magnitud del resultado de estas operaciones?

- a) $6,3 \cdot 10^2 + 4,5 \cdot 10^2$ c) $(2,6 \cdot 10^3) \cdot (3,1 \cdot 10^4)$
b) $7,7 \cdot 10^4 - 7,2 \cdot 10^4$ d) $(5 \cdot 10^7) : (2,5 \cdot 10^6)$
- a) 3 b) 3 c) 7 d) 1

070 Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en notación científica.

- a) $113,5 \cdot 10^{-6} + 0,0001 \cdot 10^4$
 - b) $7.693,57 \cdot 10^{-2} + 0,7861 \cdot 10^6$
 - c) $3.023.500 \cdot 10 - 0,0317 \cdot 10^{12}$
 - d) $4.023 \cdot 10^4 - 1.234,57 \cdot 10^{11}$
 - e) $(20.100 \cdot 10^3) : (2,7 \cdot 10^5)$
 - f) $0,35 \cdot (1,24 \cdot 10^{-8})$
 - g) $(1.435 \cdot 10^3) \cdot (6,7 \cdot 10^7)$
 - h) $(32,130 \cdot 10^{-6}) : (3,7 \cdot 10^7)$
 - i) $(54,3 \cdot 10^{-7}) : (6,7 \cdot 10^5)$
- a) $1,0001135 \cdot 10^0$ d) $-1,2345695977 \cdot 10^{14}$ g) $9,6145 \cdot 10^{13}$
 b) $7,861769357 \cdot 10^5$ e) $7,444444444 \cdot 10^1$ h) $8,683783784 \cdot 10^{-13}$
 c) $-3,1669765 \cdot 10^{10}$ f) $4,34 \cdot 10^{-9}$ i) $8,104477612 \cdot 10^{-12}$

071 Calcula el término que falta en cada caso.

- a) $15 \cdot 10^4 + \square = 13 \cdot 10^3$
 - b) $4,6 \cdot 10^{11} + \square = 2,1 \cdot 10^4$
 - c) $(32,15 \cdot 10^4) \cdot \square = 65,53 \cdot 10^4$
 - d) $(3,6 \cdot 10^2) : \square = 6,12 \cdot 10^{12}$
- a) $1,37 \cdot 10^5$ c) $2,038258165 \cdot 10^0$
 b) $-4,59999979 \cdot 10^{11}$ d) $5,882352941 \cdot 10^{-11}$

072 Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número o expresión.

- a) $7,65444\dots$ e) $\pi - e$ i) $\sqrt{99}e$
 - b) $-11,2$ f) $1,010222\dots$ j) 1
 - c) 999 g) $300,301302\dots$ k) $6,585959\dots$
 - d) $9,88777\dots$ h) $\sqrt{169}$ l) $1,00111\dots$
- a) $7,65\overline{4} \rightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto \mathbb{Q} .
 b) $-11,2 \rightarrow$ Decimal exacto; conjunto \mathbb{Q} .
 c) $999 \rightarrow$ Natural; conjunto \mathbb{N} .
 d) $9,88\overline{7} \rightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto \mathbb{Q} .
 e) $\pi - e \rightarrow$ Irracional; conjunto \mathbb{I} .
 f) $1,010\overline{2} \rightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto \mathbb{Q} .
 g) $300,301302\dots \rightarrow$ Irracional; conjunto \mathbb{I} .
 h) $\sqrt{169} = 13 \rightarrow$ Natural; conjunto \mathbb{N} .
 i) $\sqrt{99}e = 9,94987\dots \rightarrow$ Irracional; conjunto \mathbb{I} .
 j) $1 \rightarrow$ Natural; conjunto \mathbb{N} .
 k) $6,58\overline{59} \rightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto \mathbb{Q} .
 l) $1,00\overline{1} \rightarrow$ Decimal periódico mixto; conjunto \mathbb{Q} .

Números reales

073 Ordena, de mayor a menor, estos números.

a) $-\sqrt{3}$; $-\frac{7}{5}$; $-1,7333\dots$; $-1,73206$

b) 1 ; $1,00111\dots$; $\frac{10}{9}$; $1,111\dots$; $1,08999\dots$

a) $-\sqrt{3} = -1,7320508\dots$; $-\frac{7}{5} = -1,4$
 $-1,7\widehat{3} < -1,73206 < -1,7320508\dots < -1,4$
 $-1,7\widehat{3} < -1,73206 < -\sqrt{3} < -\frac{7}{5}$

b) $\frac{10}{9} = 1,1\overline{1} \rightarrow 1 < 1,00\overline{1} < 1,08\overline{9} < 1,1\overline{1} = \frac{10}{9}$

074 Averigua cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.

a) $0,444444\dots$ c) $0,151155111555\dots$

b) $0,323232\dots$ d) $0,234432234432\dots$

Determina, cuando sea posible, la expresión fraccionaria del número.

a) Racional, $\frac{4}{9}$. c) Irracional.

b) Racional, $\frac{32}{99}$. d) Racional, $\frac{234.432}{999.999} = \frac{2.368}{10.101}$.

075 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REPRESENTAN RAÍCES CUYO RADICANDO NO ES SUMA DE CUADRADOS PERFECTOS?

Utilizando la regla y el compás, dibuja el número $\sqrt{3}$ en la recta real.

PRIMERO. Se descompone el radicando en suma de cuadrados, hasta que todos sean cuadrados perfectos.

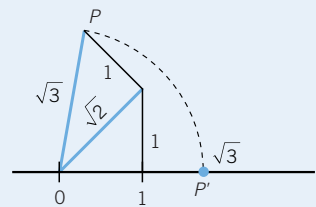
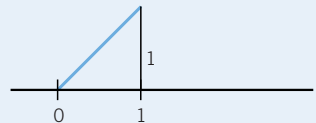
$$3 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{1^2 + 1^2})^2$$

SEGUNDO. En orden inverso, se dibujan triángulos rectángulos que expresen las relaciones calculadas.

La primera relación es $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$.

TERCERO. Se construyen triángulos rectángulos, cada uno sobre la hipotenusa del anterior. Después, con centro en O y radio la hipotenusa del último triángulo, se traza un arco que corta a la recta en el punto P', el cual tiene por abscisa la raíz buscada.

Se construye otro triángulo que expresa la relación $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = (\sqrt{3})^2$.



076 Utilizando los procedimientos anteriores, representa los siguientes números reales.

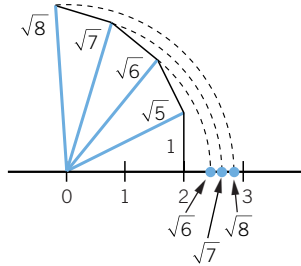
a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{7}$

d) $\sqrt{11}$

a), b) y c)



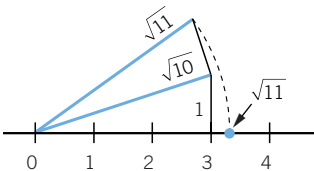
$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + 1^2$$

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1$$

$$(\sqrt{7})^2 = (\sqrt{6})^2 + 1$$

$$(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{7})^2 + 1$$

d)



$$(\sqrt{10})^2 = 3^2 + 1^2$$

$$(\sqrt{11})^2 = (\sqrt{10})^2 + 1^2$$

077 Representa, con regla y compás, estos números reales.

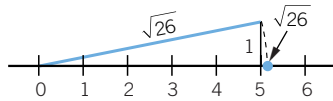
a) $\sqrt{26}$

b) $\sqrt{40}$

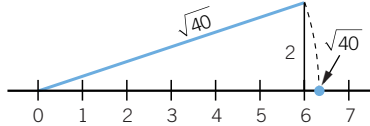
c) $\sqrt{161}$

d) $\sqrt{187}$

a) $26 = 5^2 + 1^2$

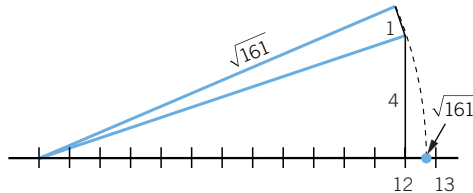


b) $40 = 6^2 + 2^2$



c) $161 = 12^2 + 17$

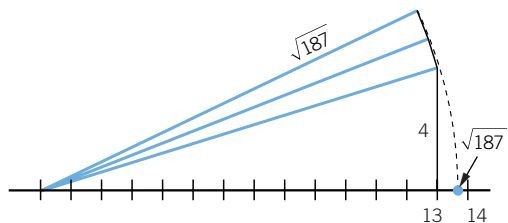
$17 = 4^2 + 1^2$



d) $187 = 13^2 + 18$

$18 = 4^2 + 2$

$2 = 1^2 + 1^2$



Números reales

078

Explica razonadamente la forma de representar los siguientes números reales.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

a) Representamos $\sqrt{2}$ a partir de la diagonal de un cuadrado 1×1 , trazamos la mediatriz y tenemos el punto medio del segmento: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Trazamos dos rectas que se corten en 0. Representamos $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ sobre una de las rectas y 1 sobre la otra. Trazamos la recta que une $\sqrt{2}$ y 1, y luego trazamos la paralela que pasa por $\sqrt{3}$. El punto de corte sobre la segunda recta es $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

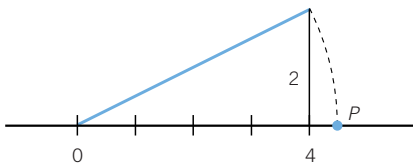
c) Representamos $\sqrt{2}$ a partir de la diagonal de un cuadrado 1×1 . Representamos $\sqrt{3}$ a partir de la diagonal de un cuadrado $1 \times \sqrt{2}$, trazamos la mediatriz y tenemos el punto medio del segmento: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Representamos $\sqrt{2}$ a partir de la diagonal de un cuadrado 1×1 . Representamos $\sqrt{3}$ a partir de la diagonal de un cuadrado $1 \times \sqrt{2}$ y trasladamos la longitud de $\sqrt{2}$ a continuación de $\sqrt{3}$.

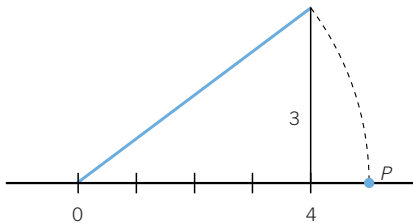
079

¿Qué número es el representado por el punto P en cada caso?

a)



b)



a) $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$. Por tanto, P representa el número $\sqrt{20}$.

b) $\sqrt{16 + 9} = 5$. Por tanto, P representa el número 5.

080 El número $1 + \sqrt{2}$:

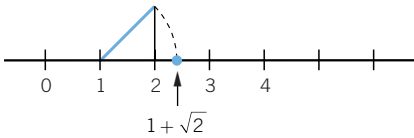


a) ¿Es racional o irracional?

b) Representalo de forma exacta sobre la recta real.

a) Irracional.

b)



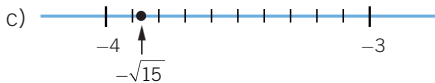
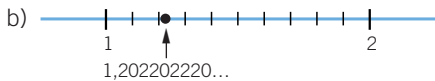
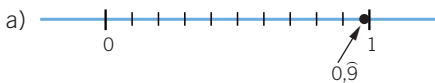
081 Representa de forma aproximada en la recta real estos números.



a) $0,\widehat{9}$

b) $1,202202220\dots$

c) $-\sqrt{15}$



082 Escribe tres números irracionales, utilizando los dígitos 0 y 1 en su parte decimal. Razona el proceso de construcción de cada uno.



Comenzamos la parte decimal por 1 y entre dos dígitos 1 consecutivos añadimos un 0 más que entre los anteriores: $1,1101001000100001\dots$

Comenzamos por un 1 y un 0, a continuación dos 1 y dos 0:
 $1,10110011100011110000\dots$

En las posiciones correspondientes a números primos ponemos 1 y en el resto 0: $1,01101010001010001000001\dots$

083 Escribe dos números reales y dos irracionales comprendidos entre:



a) $7,1$ y $7,11$

b) $\frac{8}{9}$ y 1

c) $0,6\widehat{3}$ y $0,636633666333\dots$

d) π y $\sqrt{10}$

a) Reales: $7,102$ y $7,109$. Irracionales: $\sqrt{50,5}$ y $7,10110111011110\dots$

b) Reales: $0,\widehat{9}$ y $0,95$. Irracionales: $\sqrt{0,9}$ y $0,919293949596\dots$

c) Reales: $0,634$ y $0,635$. Irracionales: $0,636465666768\dots$ y $0,636261605958\dots$

d) Reales: $3,15$ y $3,16$. Irracionales: $3,15012384\dots$ y $3,162122334489\dots$

Números reales

084 Redondea y trunca los siguientes números a las milésimas, y calcula el error absoluto cometido.

- a) $1,24\widehat{68}$ d) $0,6\widehat{7}$ g) $\sqrt{19}$
b) $5,\widehat{3}$ e) $3,2\widehat{8}$ h) $9,\widehat{12}$
c) $21,96\widehat{73}$ f) $\sqrt{17}$ i) $6,5\widehat{4}$

- a) Redondeo: 1,247. Error: 0,0002.
Truncamiento: 1,246. Error: 0,0008.
b) Redondeo: 5,333. Error: 0,000 $\widehat{3}$.
Truncamiento: 5,333. Error: 0,000 $\widehat{3}$.
c) Redondeo: 21,967. Error: 0,0003.
Truncamiento: 21,967. Error: 0,0003.
d) Redondeo: 0,677. Error: 0,0003 $\widehat{2}$.
Truncamiento: 0,0676. Error: 0,0007 $\widehat{6}$.
e) Redondeo: 3,283. Error: 0,0001 $\widehat{7}$.
Truncamiento: 3,282. Error: 0,0008 $\widehat{2}$.
f) Redondeo: 4,123. Error: 0,000105626...
Truncamiento: 4,123. Error: 0,000105626...
g) Redondeo: 4,359. Error: 0,000101056...
Truncamiento: 4,358. Error: 0,000898944...
h) Redondeo: 9,121. Error: 0,0002 $\widehat{1}$.
Truncamiento: 9,121. Error: 0,0002 $\widehat{1}$.
i) Redondeo: 6,545. Error: 0,0004 $\widehat{5}$.
Truncamiento: 6,545. Error: 0,0004 $\widehat{5}$.

085 Calcula el mayor error que se puede cometer al aproximar los siguientes números a las décimas.

- a) $5,69\widehat{7}$ b) $0,2\widehat{8}$ c) $\sqrt{21}$

¿Qué resultado has obtenido? ¿Depende del número que has aproximado?

- a) 0,097 b) 0,088888 c) 0,0852575695...

En los tres casos, el error se comete cuando se truncan los números, ya que su segundo decimal es mayor que 5.

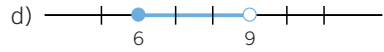
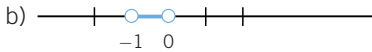
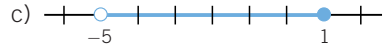
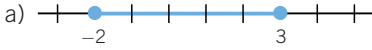
086 Escribe un número tal que:

- a) Al redondearlo y truncarlo a las décimas, dé el mismo resultado.
b) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 5,87.
c) Al redondearlo a las centésimas, dé como resultado 11,56 y el error absoluto cometido sea 0,003.
d) Al truncarlo a las décimas, dé como resultado 0,7 y el error absoluto cometido sea 0,025.

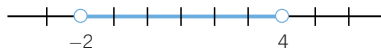
- a) 1,23 b) 5,8685 c) 11,563 d) 0,675

087 Representa los siguientes intervalos.

- a) $[-2, 3]$ c) $(-5, 1]$
 b) $(-1, 0)$ d) $[6, 9)$



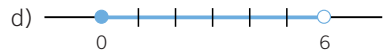
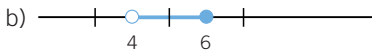
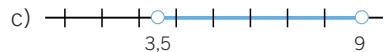
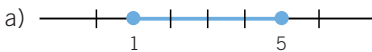
088 ¿Qué intervalos son los representados?



Son $[-5, 1)$ y $(-2, 4)$.

089 Representa sobre la recta real estos intervalos, e indica dos números que pertenezcan a los cuatro intervalos a la vez.

- a) $[1, 5]$ b) $(4, 6]$ c) $(3,5; 9)$ d) $[0, 6)$



Números que pertenecen a los cuatro intervalos: 5 y 4,5.

090 Observa el ejemplo y expresa cada intervalo usando desigualdades.

(2, 5] equivale a $2 < x \leq 5$

- a) $[-1, 2]$ c) $[0, \pi]$ e) $(11, 15]$
 b) $(1, 5)$ d) $(6, 7)$ f) $[0, 11)$

a) $-1 \leq x \leq 2$

c) $0 \leq x \leq \pi$

e) $11 < x \leq 15$

b) $1 < x < 5$

d) $6 < x < 7$

f) $0 \leq x < 11$

091 Escribe dos intervalos que contengan el número $-0,8$.

$[-5, 0)$ y $(-0,9; -0,8)$

092 ¿Cuál de estos intervalos utilizarías para expresar el conjunto de los números reales mayores que -3 y menores o iguales que 5 ?

- a) $(-3, 5)$ b) $[-3, 5)$ c) $(-3, 5]$ d) $[-3, 5]$

La opción c): $(-3, 5]$.

093 Expresa en forma de potencia cuántos abuelos, bisabuelos y tatarabuelos tienes.

Abuelos: 2^2 , bisabuelos: 2^3 , tatarabuelos: 2^4 .

Números reales

094



Se ha organizado un concurso de tiro con arco. Después de seleccionar a los concursantes se han formado cinco equipos de cinco miembros cada uno. Cada miembro del equipo dispone de cinco flechas para lanzar a la diana. ¿Cuántas flechas se necesitan?

$5^3 = 125$. Se necesitan 125 flechas.

095



La biblioteca del aula tiene tres estanterías. Cada estantería consta de tres baldas y cada balda tiene tres apartados que contienen tres libros. ¿Cuántas baldas, apartados y libros tiene la biblioteca? Expresa el resultado en forma de potencia.

Baldas: $3^2 = 9$ Apartados: $3^3 = 27$ Libros: $3^4 = 81$

096



La paga semanal de Mario es de 32 €. Sus padres le han castigado reduciéndosela a la mitad cada semana.

- a) Expresa este proceso en forma de potencias.
- b) ¿Cuántas semanas tienen que pasar para que la paga quede reducida a 25 céntimos?

a) $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$ b) Tienen que pasar 7 semanas.

097



Un piso tiene una superficie de 117,13 m² y la de otro es 73,65 m². Redondea y trunca la superficie de cada piso a metros cuadrados.

Indica qué aproximación es más precisa.

En el primero, el redondeo es 117 m², igual que el truncamiento, por lo que el error es el mismo: 0,13 m².

En el segundo, el redondeo es 74 m², con error 0,35 m². En el truncamiento es 73 m², con error 0,65 m². Por tanto, es más preciso el redondeo.

098



La distancia a la estación de tren más próxima es de 16,74 km. Luis dice que dicha distancia es 16 km y Sara afirma que es 17 km. ¿Quién aproxima de forma más precisa?

Se aproxima más Sara, con un error de 0,26 km, pues Luis comete un error de 0,74 km.

099



Las notas que han obtenido los alumnos de 3.º ESO, en la primera evaluación de Lengua, han sido:

2,5	4,5	5,8	2,6
6,4	5,2	9,7	7,2
8,6	3,8	9,3	4,7
6,1	6,4	6,8	9,1
7,6	9,7	3,7	1,6
9	4,3	8,4	5
3,2			

El profesor pone en el boletín la nota resultante de truncar al entero más próximo.

- a) ¿Qué nota les corresponderá?
- b) ¿Cuál sería la nota si el profesor redondeara?

a) 2, 6, 8, 6, 7, 9, 3, 4, 5, 3, 6, 9, 4, 5, 9, 9, 6, 3, 8, 2, 7, 4, 9, 1, 5
 b) 3, 6, 9, 6, 8, 9, 3, 5, 5, 4, 6, 10, 4, 6, 10, 9, 7, 4, 8, 3, 7, 5, 9, 2, 5

100

En una botella de 5 litros de agua mineral figura escrito «5 litros \pm 5 %».

a) ¿Qué quiere decir esa indicación?

b) ¿Entre qué valores está comprendida la capacidad de la botella?

a) Significa que el error máximo que pueden cometer cuando indican que son 5 litros es el 5 % por defecto o por exceso.

b) Entre 4,75 y 5,25 litros.

101

Una potencia de exponente entero positivo, ¿es siempre mayor que la base?

¿En qué casos?

Es mayor que la base si esta es mayor que 1.

102

Una potencia de exponente entero negativo, ¿es mayor que la base?

¿Hay algunos valores de la base para los que la potencia sea menor?

Es mayor que la base si esta es menor que 1, y será menor si la base es mayor que 1.

103

Continúa la serie.

$$2^2 = 1^2 + 3$$

$$3^2 = 2^2 + 5$$

$$4^2 = 3^2 + 7$$

$$5^2 = \square^2 + \square$$

$$n^2 = \dots$$

$$2^2 = 1^2 + 3$$

$$3^2 = 2^2 + 5$$

$$4^2 = 3^2 + 7$$

$$5^2 = 4^2 + 9$$

$$n^2 = (n - 1)^2 + (2n - 1)$$

104

Arquímedes, en el siglo III a.C., dio como

aproximación del número π la fracción $\frac{22}{7}$.

a) Escribe tres aproximaciones por defecto y por exceso de π de dicha fracción.

b) Redondea ambos números a las milésimas y compara los resultados. ¿Qué observas?

c) ¿Y si los redondeas a las centésimas?

a) Por defecto: 3; 3,1; 3,14.

Por exceso: 4; 3,2; 3,15.

b) $\frac{22}{7} \approx 3,143$; $\pi \approx 3,142$. La diferencia del redondeo es 1 milésima.

c) $\frac{22}{7} \approx 3,14$; $\pi \approx 3,14$. El redondeo a las centésimas es el mismo.



EN LA VIDA COTIDIANA

105

Navegando en Internet hemos llegado a la siguiente página.

Formación de los planetas

Los planetas se formaron hace unos 4.500 millones de años, al mismo tiempo que el Sol.

En general, los materiales ligeros que no se quedaron en el Sol se alejaron más que los pesados. En la nube de gas y polvo original, que giraba en espirales, había zonas más densas, *proyectos* de planetas. La gravedad y las colisiones llevaron más materia a estas zonas y el movimiento rotatorio las redondeó

Planetas	Radio ecuatorial	Distancia al Sol (km)	Lunas	Periodo de Rotación	Órbita
Mercurio	2.440 km	$5,791 \cdot 10^7$	0	58,6 días	87,97 días
Venus	6.052 km	$1,082 \cdot 10^8$	0	-243 días	224,7 días
La Tierra	6.378 km	$1,496 \cdot 10^8$	1	23,93 horas	365,256 días
Marte	3.397 km	$2,2794 \cdot 10^8$	2	24,62 horas	686,98 días
Júpiter	71.492 km	$7,7833 \cdot 10^8$	16	9,84 horas	11,86 años
Saturno	60.268 km	$1,429 \cdot 10^9$	18*	10,23 horas	29,46 años
Urano	25.559 km	$2,87 \cdot 10^9$	15	17,9 horas	84,01 años
Neptuno	24.746 km	$4,5 \cdot 10^9$	8	16,11 horas	164,8 años

*Algunos astrónomos atribuyen 23 satélites al planeta Saturno.

Exploración

Navegación espacial

Hasta ahora, casi todas las misiones espaciales han utilizado motores cohete alimentados con combustibles y comburentes químicos. Por desgracia, esos motores no son muy eficaces; por ejemplo, más de la mitad del peso de la sonda espacial Rosetta de la ESA en el momento de su lanzamiento era de combustible.

La ESA está estudiando actualmente las formas de reducir la cantidad de combustible que transportan las naves. Una de las ideas consiste en un motor de iones que utilice una 'pistola' eléctrica para 'disparar' gas hacia el espacio.

Aunque la fuerza de empuje del motor cohete eléctrico de iones es muy pequeña, la nave va aumentando gradualmente su velocidad hasta que, llegado el momento, permite que la nave espacial se desplace con mucha rapidez.

La sonda SMART 1 ha probado con éxito un motor de iones en su viaje de la Tierra a la Luna. Por cada kilogramo de combustible consumido, ese motor produce un aumento de la velocidad de la nave diez veces mayor que si fuera un motor cohete ordinario.

La ESA también está estudiando de usar naves espaciales que utilicen 'velas solares' en lugar de motores cohete. La luz solar 'sopla' sobre una vela de gran tamaño y puede propulsar una nave espacial hacia otros planetas. Después de muchos meses de viaje con el viento del Sol, una nave de ese tipo podría alcanzar una velocidad de 360.000 km/h.

Exploración

- ExoMars
- Futuras exploraciones en Marte
- Nueva formas de transporte

- a) ¿Qué distancia hay entre Mercurio y Saturno?
- b) ¿Qué distancia es mayor, la de la Tierra a Urano o la de Marte a Neptuno?
- c) Con una nave como la que describe en la segunda página, ¿cuánto se tardaría en llegar a Neptuno? ¿Podríamos visitar Neptuno y volver a la Tierra?

a) La distancia de Mercurio a Saturno:

$$1,429 \cdot 10^9 - 5,791 \cdot 10^7 = 1,429 \cdot 10^9 - 0,05791 \cdot 10^9 = 1,37109 \cdot 10^9 \text{ km}$$

b) La distancia de la Tierra a Urano:

$$2,87 \cdot 10^9 - 1,496 \cdot 10^8 = 2,87 \cdot 10^9 - 0,1496 \cdot 10^9 = 2,7204 \cdot 10^9 \text{ km}$$

La distancia de Marte a Neptuno:

$$4,5 \cdot 10^9 - 2,2794 \cdot 10^8 = 4,5 \cdot 10^9 - 0,22794 \cdot 10^9 = 4,27206 \cdot 10^9 \text{ km}$$

Hay más distancia de Marte a Neptuno que de la Tierra a Urano.

c) La distancia de la Tierra a Neptuno:

$$4,5 \cdot 10^9 - 1,496 \cdot 10^8 = 4,5 \cdot 10^9 - 0,1496 \cdot 10^9 = 4,3504 \cdot 10^9 \text{ km}$$

La velocidad es de 360.000 km/h = $3,6 \cdot 10^5$ km/h.

De la Tierra a Neptuno se tarda:



$$(4,3504 \cdot 10^9) : (3,6 \cdot 10^5) = 1,2084 \cdot 10^4 = 12.084 \text{ horas} = 503,5 \text{ días}$$

En ir y volver se tardará el doble, es decir, 1.006 días, lo que equivale aproximadamente a 2 años y 9 meses, luego sí podríamos ir y volver de Neptuno.

Ten en cuenta que estamos suponiendo que desde el primer momento alcanzamos la velocidad máxima de 360.000 km/h.

106

Sergio acaba de llegar a Londres. Antes de su viaje cambió en el banco 200 libras y este es el recibo que le dieron.

COMPRA DE BILLETES EXTRANJEROS Y/O CHEQUES DE VIAJE EN DIVISA Y/O PAGO DE CHEQUE DE CUENTA EN DIVISA				BANCO	
D. SERGIO AVELLANEDA GIL Domicilio AVENIDA DE LA LUZ, S/N Población MADRID C.P. 28082 D.N.I./C.I. 978687623				ENTIDAD - OFICINA - CUENTA 2038 - 5538948273647783 EUR	
Concepto: OPERACION INVISIBLE				REF. 6036786	
DOCUMENTO	DIVISA	IMPORTE	CAMBIO	CONTRAVALOR	
BILLETES	GBP	200,0	0,649900	307,74 EUR	
Comisiones y gastos				307,74 EUR	
FECHA OPERACIÓN: 31/07/2007		FECHA VALOR: 31/07/2007		TOTAL	307,74 EUR
<small>(firma del interesado)</small> 				<small>BANCO</small> 	

Un euro vale 0,649900 libras, por lo que las 200 libras que cambió le costaron 307,74 €.

Sergio quiere comprarse unos pantalones que cuestan 48,5 libras y necesita calcular su coste en euros para hacerse una idea de su valor.

- a) ¿Crees que es correcta su estimación? ¿Qué error comete?
- b) Si las cinco noches de hotel le cuestan 467 libras, ¿cuál será el valor en euros que hará Sergio según sus estimaciones? ¿Y cuál será el valor real?



a) $48,5 : 0,649900 = 74,63$ €, por lo que la estimación es errónea, y Sergio comete un error absoluto de 14,63 € y un error relativo de 0,196 €.

b) El valor real es de 718,57 €, y el error que cometerá es de: $718,57 \cdot 0,196 = 140,84$ €. Por tanto, él estimará: $718,57 - 140,84 = 577,73$ €.