15 Azar y probabilidad

Comienzo en los juegos de azar

Al principio, la teoría de la probabilidad estuvo estrechamente relacionada con los juegos y las apuestas.

Los primeros estudios matemáticos relativos a juegos de azar se deben a algebristas italianos del siglo XVI. Uno de ellos, **Cardano,** contumaz jugador, escribió el primer tratado medianamente organizado sobre este tema: *El libro de los juegos de azar*.

Jerónimo Cardano (1501-1576).

Pascal y Fermat

En 1654, el matemático francés **Blaise Pascal** realizó un viaje en compañía de su amigo el caballero De Meré, un jugador habitual. Este le propuso una serie de problemas de azar que interesaron vivamente al matemático. Unos días después, Pascal se los expuso a su amigo **Pierre Fermat,** también matemático, y ambos los resolvieron, aunque por caminos distintos.

La correspondencia que se estableció entre ellos intercambiando ideas y nuevos problemas dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

"Niños jugando a los dados" de Murillo.

Desarrollo como ciencia

A partir de entonces, otros matemáticos profundizaron en este nuevo campo. Los más destacados fueron el suizo **Jacob Bernoulli** (*Ars Conjectandi*, 1713) y el francés **Laplace** (*Teoría analítica de las probabilidades*, 1812).

A mediados del siglo XIX el naturalista austriaco, **Gregor Mendel,** aplicó la probabilidad en el estudio de la herencia.

148

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Área fotocopiable

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 Sucesos aleatorios

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Se llaman, pues, **sucesos aleatorios.** Por ejemplo:

DEPENDEN DEL AZAR	NO DEPENDEN DEL AZAR
Nevará mañana.	Amanecerá mañana.
Ganará mi equipo de baloncesto.	Jugará mi equipo de baloncesto.
Al lanzar un dado, saldrá un cinco.	Al lanzar el dado, caerá.
Acertaré más de 11 en la quiniela.	Jugaré a la quiniela.

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.

En latín, *alea* significa "dado" y también "suerte", "azar".

Experiencias aleatorias

Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias,** es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la *experiencia aleatoria* consistente en *lanzar un dado y observar lo que sale.*

Lanzar un dado y observar el resultado obtenido es una **experiencia aleatoria** porque el resultado depende del azar.

- **Caso.** Cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso.**

  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅

- **Espacio muestral.** El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral,** al que designamos por E.

  En el dado, el espacio muestral es: E = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

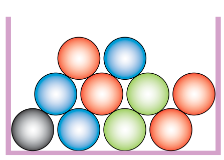
- **Sucesos.** Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos.** Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia aleatoria *lanzar un dado* son:

  {⚀, ⚁} , {⚁, ⚃, ⚅} , {⚅} , {⚀, ⚂, ⚄}

Piensa y practica

1. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

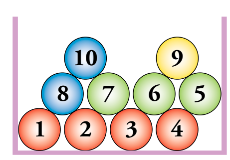
2. *Lanzamos una chincheta y observamos si cae con la punta hacia arriba o no.*

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

3. En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

4. En una bolsa hay 10 bolas, todas rojas.

Sacamos una bola y anotamos su color.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Probabilidad de un suceso

La **probabilidad** de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso S ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Ley fundamental del azar

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Cómo se mide la probabilidad de un suceso

- Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de la moneda visto, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos*.

  Por ejemplo, para asignar probabilidades a cada cara de un dado correcto, tenemos en cuenta que son 6 casos, todos con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de cada cara es 1/6.

- Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori*[1] desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar*.

  Por ejemplo, si un cierto jugador de baloncesto ha encestado 187 tiros libres y ha fallado 85 (su número de intentos ha sido 187 + 85 = 272), razonamos así:

  f_r[ACIERTO] = 187/272 = 0,6875. Por tanto, P[ACIERTO] ≈ 0,6875.

  f_r[FALLO] = 85/272 = 0,3125. Por tanto, P[FALLO] ≈ 0,3125.

(1) *a priori*: antes de empezar.

Piensa y practica

1. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90. ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 58? ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada una de las bolas?

2. En otra bolsa hay bolas de dos tamaños. Sacamos una, miramos si es grande, G, o chica, CH, y la devolvemos a la bolsa. Así observamos 84 bolas G y 36 bolas CH. ¿Qué valores asignarás a $P[G]$ y a $P[CH]$?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ley de Laplace para experiencias regulares

Ten en cuenta

P[⚀, ⚁, ⚂] =

= P[⚀] + P[⚁] + P[⚂] =

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

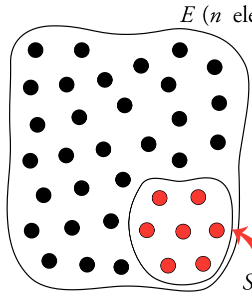
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

⚀ ⚁ ⚂ de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: P[🟥] $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

⚃ ⚄ de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: P[🟩] $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

⚅ de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: P[🟨] $= \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.



Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene n elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

S es un suceso que consta de k elementos.

Entonces, la probabilidad de S es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$ LEY DE LAPLACE

Problemas resueltos

ROJAS	40
VERDES	25
AZULES	15
NEGRAS	10

1. ***En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.***

P[🔴] $= \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; P[🟢] $= \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; P[🔵] $= \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; P[⚫] $= \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

2. ***En una baraja de 40 cartas, hallar la probabilidad de obtener REY.***

$$P[\text{REY}] = \frac{\text{número de reyes}}{\text{número total de cartas}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

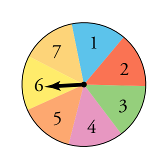
3. ***En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo, este sea defectuoso.***

$$P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3\,586} = 0{,}0867$$

Piensa y practica

1. En un campamento juvenil hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar al portavoz de ellos. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

2. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en alguno de los colores rojo, verde o azul?



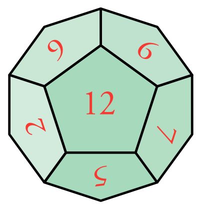
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = “Menos de 5” B = “Más de 4”

C = “Número par” D = “No múltiplo de 3”

2. Nos fijamos en la cifra en la que termina el premio gordo de la lotería.

a) Describe el espacio muestral.

b) Describe los sucesos: A = “Menor que 4”

B = “Número impar” C = “Mayor que 5”

3. Escribimos cada una de las letras de la palabra juego en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Describe los sucesos elementales de este experimento aleatorio.

b) Describe el suceso “obtener vocal”.

c) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

4. Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos: A = “La primera fue cara”.

B = “Ninguna fue cara”.

5. Lanzamos una moneda tres veces y anotamos los resultados en el orden en que salen.

a) Describe el espacio muestral (hay 8 casos).

b) Describe los sucesos siguientes:

A = “Obtener dos veces cara”

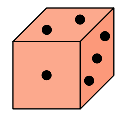
B = “Obtener dos veces cruz”

C = “No obtener ninguna cruz”

Cálculo de probabilidades

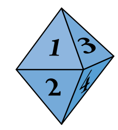
6. Halla la probabilidad de obtener un 2 y la probabilidad de obtener un 5, al lanzar un dado correcto en cada uno de estos casos:

a)



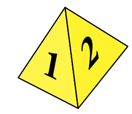
(Cubo numerado del 1 al 6)

b)



(Octaedro numerado del 1 al 8)

c)



(Tetraedro numerado del 1 al 4)

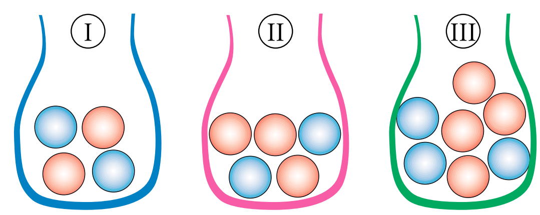
7. En una bolsa hay 6 bolas rojas, 4 azules, 7 verdes, 2 amarillas y una negra.

Extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea azul. b) No sea negra.

c) Sea roja o verde. d) No sea amarilla ni negra.

8. Razona de cuál de las bolsas siguientes es más probable sacar bola roja:



9. Lanzamos un dado correcto. Hallas las probabilidades de que el resultado sea:

a) Múltiplo de 3. b) Múltiplo de 2.

c) Mayor que 1. d) Menor que 5.

e) Menor que 1. f) Potencia de base 2.

10. Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

a) La carta sea de BASTOS.

b) La carta NO sea ni AS ni FIGURA.

c) La carta sea un número menor que 6.

d) La carta sea de OROS o FIGURA.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

11. En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de erratas en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en esta tabla:

N.º ERRATAS	N.º PÁGINAS
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Al elegir una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna errata?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga exactamente dos erratas?

c) ¿Y la de que tenga alguna errata? ¿Y la de que tenga más de tres?

12. De una bolsa con 7 bolas rojas, 5 verdes, 3 amarillas, 11 negras y 3 azules, sacamos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que…

a) … sea roja? b) … no sea negra?

13. Extraemos una carta de una baraja española de 40 naipes. Halla la probabilidad de que:

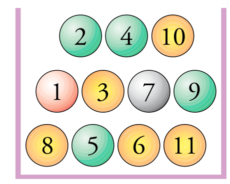
a) Sea un CINCO.

b) No sea un CABALLO.

c) Sea de OROS o de COPAS.

d) No sea de ESPADAS.

14. De esta urna extraemos una bola y observamos su número y color.



Halla las probabilidades de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Obtener bola verde con número par.

b) Obtener bola roja con número par.

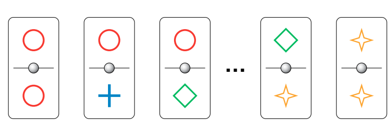
c) Obtener bola amarilla o roja.

d) Obtener una bola con número mayor que 7.

Autoevaluación

1. Describe un dominó con los símbolos ○ + ◇ ✧.

Las piezas serían como estas:



Dibuja en tu cuaderno todas. Deben ser 10 fichas.

Echamos las fichas en una bolsa y extraemos una.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

c) Describe el suceso "la ficha extraída tiene el símbolo +".

2. Dejamos caer 1 000 chinchetas. Caen 649 así y el resto así.

Halla las frecuencias absoluta y relativa de los sucesos y . Estima las probabilidades de ambos casos.

3. En un equipo de natación hay 3 niñas americanas, 5 europeas, 2 asiáticas y 2 africanas.

Si elegimos una de ellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiática? ¿Y la de que no sea europea?

4. Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea mayor que la de Ana?

5. De cada una de estas bolsas extraemos una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tres cifras sea 5?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....