12 Transformaciones geométricas

Arte árabe...

Cuando visitamos la Alhambra, quedamos fascinados por sus jardines, patios, fuentes, arcos, estancias... Y, sin duda, también nos llama poderosamente la atención la gran variedad de mosaicos que adornan paredes y techos.

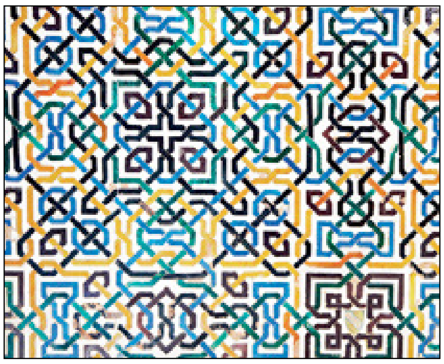
¿Por qué los árabes fueron tan aficionados a este tipo de ornamentos? La religión musulmana recomendaba no representar seres vivos: no solo personas, sino también animales o plantas. Por eso, los artesanos musulmanes de los siglos XIII y XIV se volcaron en la expresión de formas geométricas para decorar los palacios.

El Generalife, patio de La Acequia y pabellón norte. La Alhambra de Granada.

... y geometría

Sala de La Barca. La Alhambra de Granada.

Sin embargo, los mosaicos árabes son mucho más que hermosas filigranas. Los artistas que los diseñaron poseían una sólida formación geométrica, como quedó demostrado hace unas décadas, cuando se comprobó que con unos pocos elementos geométricos y algunas transformaciones se pueden diseñar diecisiete tipos de mosaicos. Exactamente, los que se encuentran en las paredes de la Alhambra.



Sala de Dos Hermanas. La Alhambra de Granada.

¿Cómo lo hacían?

Los conocimientos que utilizaban para el diseño de mosaicos eran, en algunos casos, muy sofisticados. Pero a la vez no dejan de sorprendernos las composiciones de enorme belleza que conseguían con manipulaciones sencillas de las figuras geométricas básicas.

Patio de los Arrayanes. La Alhambra de Granada.

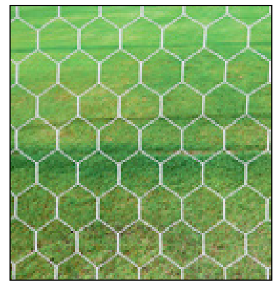
119

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Transformaciones geométricas. Movimientos

La proyección de las sombras de los camellos en una duna es una transformación geométrica de las figuras iniciales.

La red de la derecha, desde un punto de vista práctico, está deformada por el impacto del balón. Sin embargo, geométricamente, solo ha sufrido una *transformación*.



Una **transformación geométrica** hace corresponder a cada punto del plano otro punto del plano. Las figuras se transforman en otras figuras.

Ten en cuenta

$T(P) = P'$

P' es el **correspondiente** de P según la transformación T.

Si llamamos T a una cierta transformación, entonces se designa:

— Al transformado de un punto $P \rightarrow T(P) = P'$

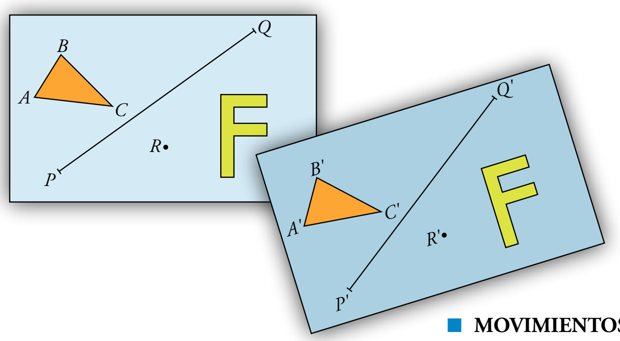
— A la figura transformada de $F \rightarrow T(F) = F'$

Si un punto se transforma en sí mismo, se dice que es un **punto doble** o **invariante:** A es doble si $T(A) = A$.

Análogamente, una **figura** F es **doble** si $T(F) = F$.

Movimientos en el plano

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras. Arrastramos la tarjeta sobre la mesa haciendo que ocupe otra posición.



Las figuras que hay en la tarjeta se han limitado a moverse. Mantienen su forma y su tamaño. Esta transformación se llama *movimiento*.

Un **movimiento** es una transformación del plano en la cual todas las figuras mantienen su forma y su tamaño.

En un movimiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene invariable.

MOVIMIENTOS DIRECTOS Y MOVIMIENTOS INVERSOS

Si miramos una serie de figuras y sus imágenes en un espejo, observamos que las figuras reflejadas tienen la misma forma y el mismo tamaño que las originales. La transformación producida por el espejo es, pues, un movimiento.

Sin embargo, las agujas del reloj reflejado giran en sentido contrario a las del original. Este movimiento que cambia el sentido de giro se llama *movimiento inverso*.

El movimiento descrito arriba mediante una tarjeta que se deslizaba mantiene el sentido de giro. Es un *movimiento directo*.

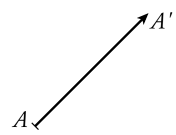
Movimientos directos son los que mantienen el sentido de giro. También se llaman **deslizamientos.**

Movimientos inversos son los que cambian el sentido de giro.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Traslaciones

Vectores



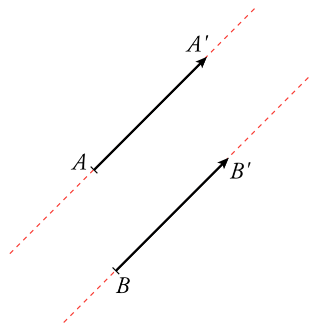
Una flecha, $\overrightarrow{AA'}$ se llama **vector.** A es el **origen;** A', el **extremo.** La longitud del vector, $\overline{AA'}$, es su **módulo.**

Dos vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son el mismo vector si tienen:

— El mismo módulo (es decir, si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$).

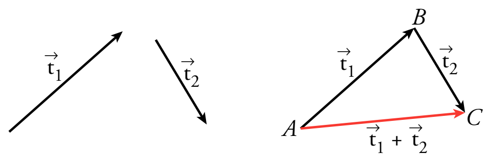
— La misma dirección (son paralelos o están sobre la misma recta).

— El mismo sentido (las puntas de las flechas van hacia el mismo lado).



Estas dos flechas son el mismo vector.

Para **sumar dos vectores,** $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$, situamos el origen del segundo coincidiendo con el extremo del primero.

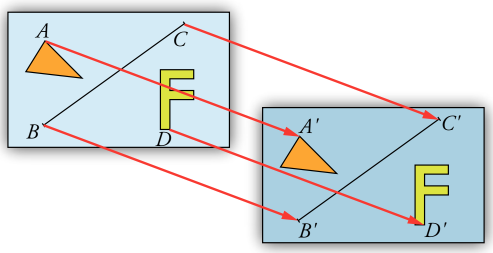


$\overrightarrow{AC}$ es el vector suma:

$\overrightarrow{AC} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$

Concepto de traslación

Sobre una tarjeta hemos dibujado varias figuras geométricas. Si deslizamos la tarjeta de modo que sus bordes se mantengan paralelos a sus posiciones iniciales, diremos que la hemos sometido a una *traslación*.



Si unimos cada punto con su homólogo mediante una flecha, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, …, todas ellas tienen la misma longitud y la misma dirección. Es decir, son el mismo vector.

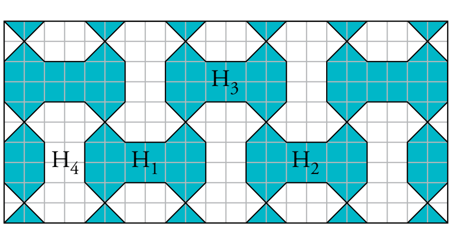
Dado un vector $\vec{t}$, se llama **traslación T,** según el vector $\vec{t}$, a una transformación que asocia a cada punto P otro punto $P' = \mathbf{T}(P)$ tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{t}$.

Piensa y practica

1. El mosaico de la derecha se llama "multihueso". $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ y $\mathbf{H_4}$ son "huesos". Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.

a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

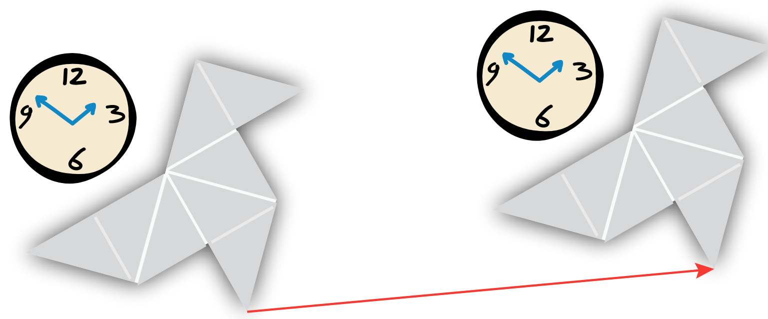
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_2}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_2}$ en $\mathbf{H_3}$? ¿Y el que transforma $\mathbf{H_3}$ en $\mathbf{H_1}$?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

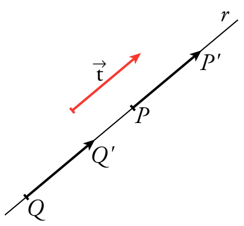
Las traslaciones son movimientos directos

Las traslaciones son, evidentemente, deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el giro de las agujas de un reloj.



En la web

Iniciación: traslaciones.



Las rectas paralelas al vector traslación son invariantes.

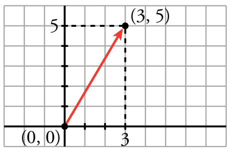
Elementos dobles (invariantes) en una traslación

En una traslación **no hay puntos dobles,** pues todos los puntos se desplazan.

Toda recta paralela al vector traslación es doble, pues cada punto, P, de la recta se transforma en otro punto, P', de la recta.

Piensa y practica

2. En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).

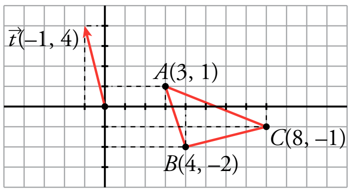


Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.

a) Traslada los puntos $A(0, -4)$, $B(-3, -5)$, $C(0, 0)$ y $D(5, -1)$ mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos $M(1, 3)$, $N(7, -1)$ y $X(4, 1)$ están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

3. a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.

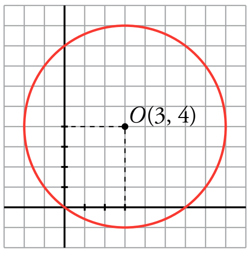


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

b) Comprueba que la recta $r: y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

4. Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro $O(3, 4)$ y radio 5.



a) Comprueba que C pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación $\mathbf{T}$ de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \mathbf{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

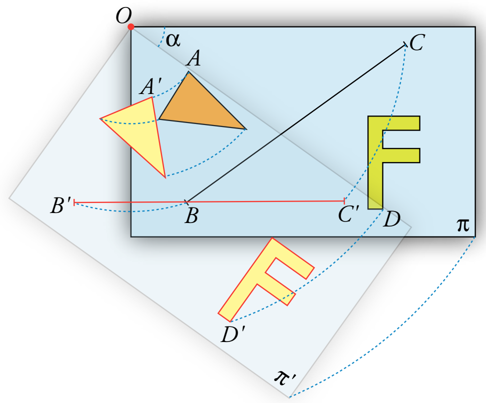
d) Trasladando algunos de sus puntos, averigua en qué recta se transforma el eje X.

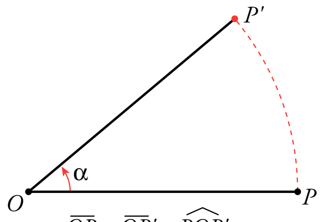
e) ¿En qué recta se transforma el eje Y?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Giros

El plano π, representado por una tarjeta, aparece girado sobre sí mismo un ángulo α alrededor del punto O (la esquina de la tarjeta). En el movimiento arrastra a todas las figuras situadas sobre él.





$\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\widehat{POP'} = \alpha$

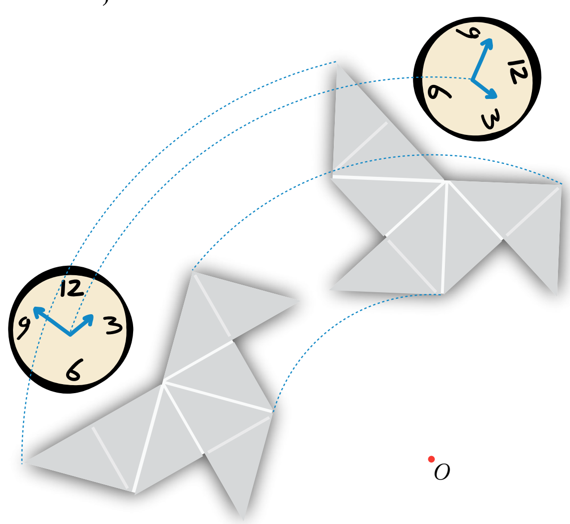
Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro** $\boldsymbol{O}$ **y ángulo** $\boldsymbol{\alpha}$ a una transformación $\mathbf{G}$ que hace corresponder a cada punto P otro $P' = \mathbf{G}(P)$ de modo que:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} \quad \text{y} \quad \widehat{POP'} = \alpha$$

α debe ser un ángulo orientado. Consideramos sentido de giro positivo al contrario al movimiento de las agujas del reloj. El giro del ejemplo de más arriba es de ángulo negativo.

Los giros son movimientos directos

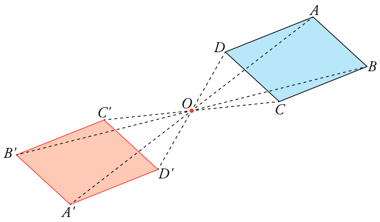
Es claro que los giros son deslizamientos, es decir, movimientos directos: mantienen la forma y el tamaño de las figuras y, además, conservan el sentido de giro de las agujas de un reloj.



En la web

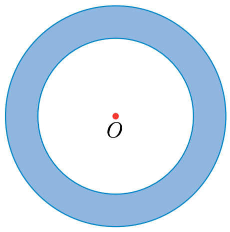
Iniciación: giros.

Simetría central



El giro de centro O y ángulo 180° transforma cada punto en su simétrico respecto al punto O. Por eso, a un giro de 180° se le llama **simetría central.**

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



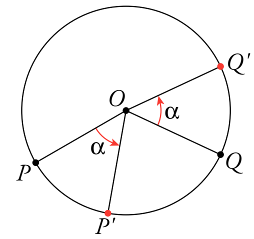
Una corona circular con el centro en el centro de giro es invariante.

En la naturaleza es frecuente encontrar figuras con centros de giro de orden 5.

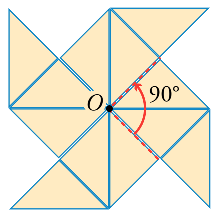
Elementos dobles en un giro

El centro de giro O es el único **punto doble.**

Las circunferencias de centro O son **figuras dobles.**



Figuras con centro de giro



Esta figura es invariante mediante tres giros distintos, todos ellos de centro O y de ángulos 90°, 180° y 270°.

Contando con la posición inicial, hay cuatro posiciones con las que la figura se mantiene idéntica.

Se dice que O es un *centro de giro de orden 4*.

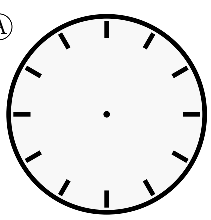
Se dice que una figura plana tiene un **centro de giro** $\boldsymbol{O}$ **de orden** $\boldsymbol{n}$ cuando al girarla alrededor de O coincide consigo misma n veces, contando con la posición inicial.

El cociente $360° : n$ es el menor ángulo por el cual se hace coincidir la figura consigo misma al girarla con centro en O.

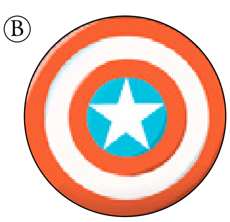
Piensa y practica

1. Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

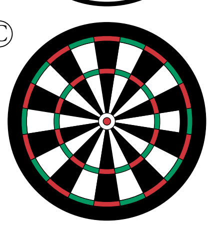
Ⓐ



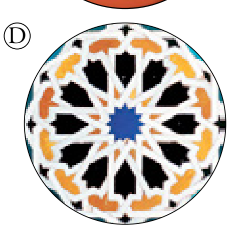
Ⓑ



Ⓒ

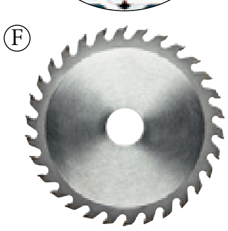


Ⓓ



Ⓔ

Ⓕ



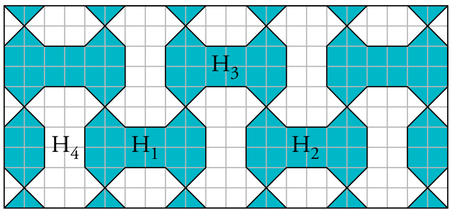
2. Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro **G** de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.

a) Transforma mediante **G** los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

3. Recuerda el mosaico "multihueso" que ya hemos visto en un ejercicio anterior.

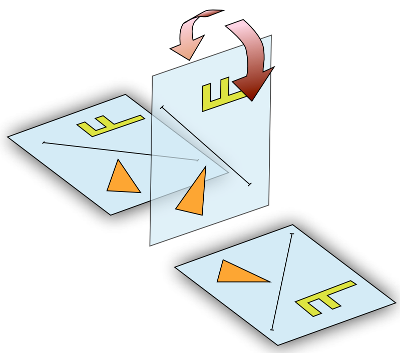


a) Describe un giro que transforme $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_4}$.

b) Describe un giro que transforme $\mathbf{H_1}$ en $\mathbf{H_3}$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Simetrías axiales

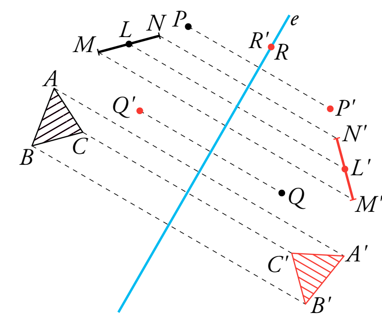


En los movimientos inversos, como las simetrías, hay que *sacar del plano* cada figura para llevarla a su posición final.

Dada una recta e, a cada punto, P, le hacemos corresponder otro punto, P', de modo que:

- El segmento PP' sea perpendicular a e.
- La distancia de P a e sea igual a la distancia de P' a e.

Es decir, e es la mediatriz del segmento PP'.

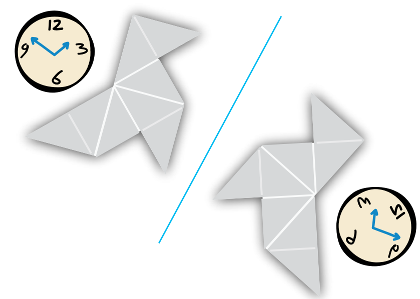


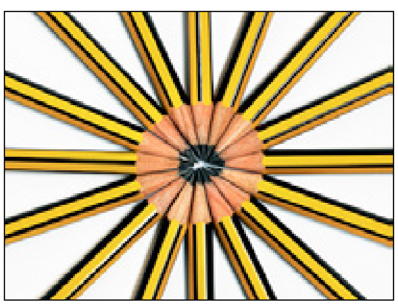
Dada una recta e, se llama **simetría de eje** $\boldsymbol{e}$ a una transformación, **S**, que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto $\mathbf{S}(P) = P'$ tal que el eje e es mediatriz del segmento PP'.

Las simetrías son movimientos inversos

En la web Iniciación: simetrías.

Las simetrías son **movimientos,** pues conservan la forma y el tamaño de las figuras. Pero son movimientos **inversos,** porque cambian el sentido de giro de las agujas de un reloj.





Elementos dobles en una simetría. Figuras simétricas

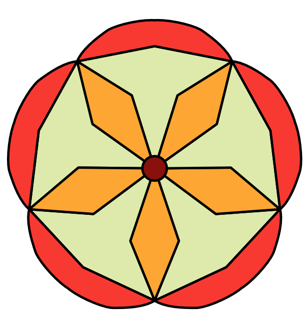
En una simetría de eje e, todos los **puntos** de e son **dobles.** Por tanto, e es una recta invariante.

También son invariantes las rectas perpendiculares a e.

Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una **figura simétrica** y al eje se le llama **eje de simetría** de la figura.

Piensa y practica

1. Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría.



2. Consideramos la simetría **S** de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante **S** de:

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

b) El eje X.

c) El eje Y.

d) La circunferencia C_1 de centro $(1, 4)$ y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro $(3, 3)$ y radio 5.

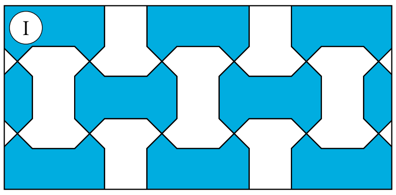
En la web Ampliación: ejes de simetría y centro de giro en las figuras planas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

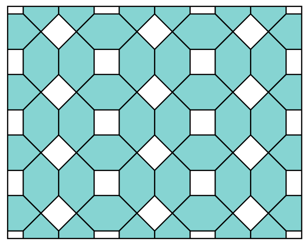
5 Mosaicos

El *multihueso* que viste en una actividad anterior es **un mosaico:** una configuración geométrica con la que se puede llenar el plano.

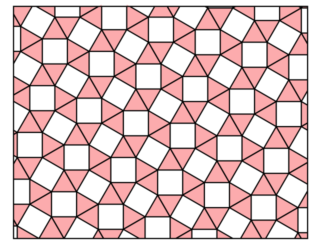
Hay mosaicos formados con una sola pieza y otros formados con dos o más piezas. Observa los siguientes:



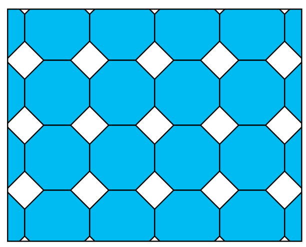
II



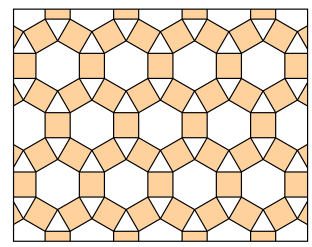
III



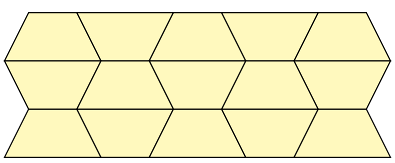
IV



V



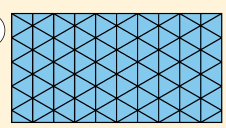
En la web
Ampliación: mosaicos.



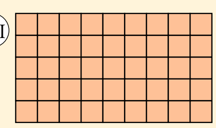
Este mosaico está formado por un único tipo de piezas. Pero no es regular porque los trapecios no son polígonos regulares.

Mosaicos regulares son los formados por un único tipo de **polígono regular.** Solo hay tres: con triángulos, con cuadrados y con hexágonos.

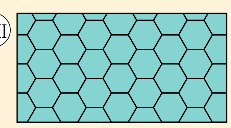
VI



VII



VIII

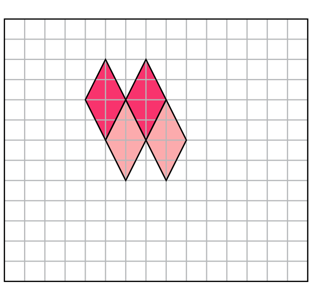


Mosaicos semirregulares son los formados por dos o más tipos de polígonos regulares. Por ejemplo, los mosaicos III, IV y V de arriba.

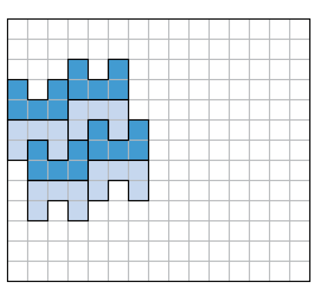
Piensa y practica

1. Completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

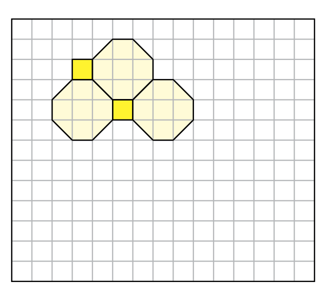
a)



b)



c)



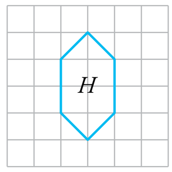
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Traslaciones

1. a) Representa en papel cuadriculado la figura H_1 obtenida a partir de H mediante la traslación de vector $\vec{t}_1(3, 2)$.

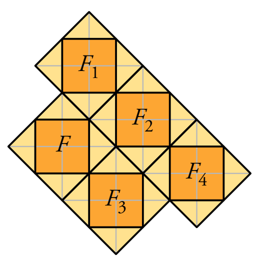


b) Dibuja la figura H_2, transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(2, -6)$.

c) Di cuál es el vector de la traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para que se transformase en H?

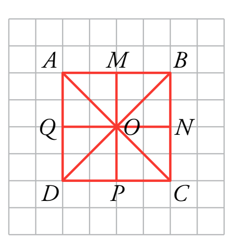
2. Hemos aplicado a la figura F cuatro traslaciones para obtener F_1, F_2, F_3 y F_4.



Determina los vectores $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ y $\vec{t}_4$ que nos permiten transformar F en cada una de las otras figuras, respectivamente.

Giros

3. Hacemos un giro de centro O que transforma M en N.

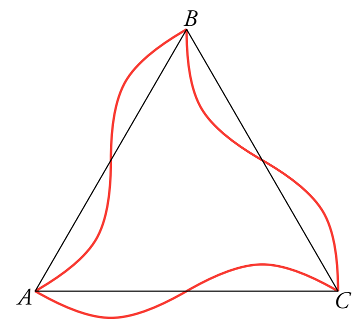


a) Indica en qué puntos se transforman los puntos O, A, B, N y P.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y por C?

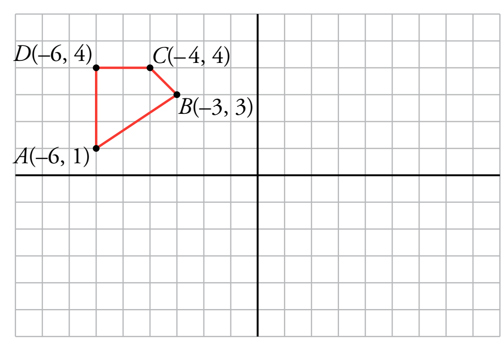
c) ¿Y el triángulo OPD?

4. Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro A y un ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.



Simetrías

5. Copia la siguiente figura en papel cuadriculado:



Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, transformado mediante:

a) La simetría de eje X.

b) La simetría de eje Y.

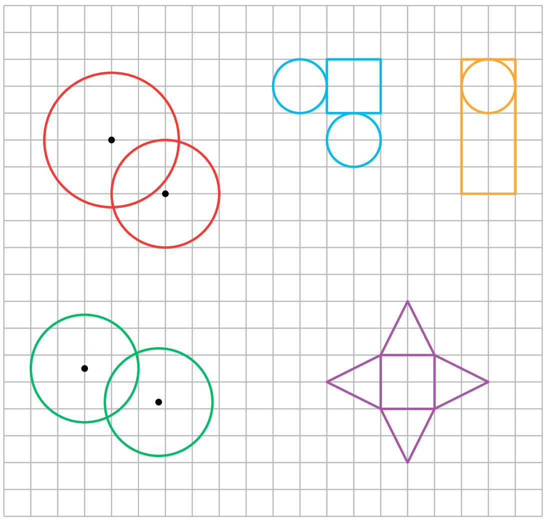
c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por $B(-3, 3)$ y $P(-6, 0)$.

d) Un punto del cuadrilátero es doble respecto de alguna de las simetrías anteriores. ¿Cuál es?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

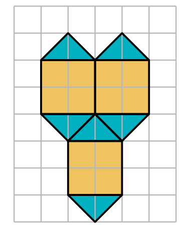
Ejercicios y problemas

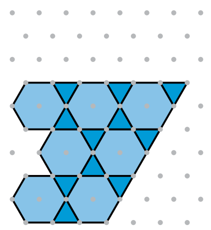
6. ¿Cuáles son los ejes de simetría de las siguientes figuras? Hazlo en tu cuaderno.



Mosaicos

7. a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:

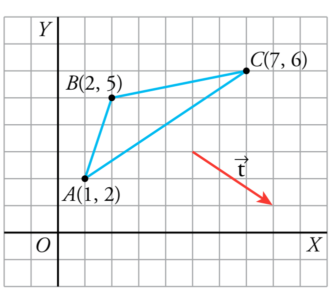




b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

Autoevaluación

1. Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

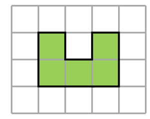
c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto $P(0, 4)$ es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje Y es una recta doble?

2. Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....