10 Problemas métricos en el plano

Los griegos y la geometría

Los griegos recogieron el saber matemático (práctico, utilitario, pero muy extenso) acumulado durante milenios por egipcios y babilonios. Y le dieron un impulso y una calidad extraordinarios, muy especialmente a la geometría. Cultivaron el conocimiento por sí mismo (filosofía significa amor a la sabiduría), sin buscar ninguna utilidad práctica. Y la geometría fue una bella ocupación en la que llegaron muy lejos.

Moderna Academia de Atenas, con Platón y Sócrates flanqueando la entrada.

El primero de los grandes

"Los siete sabios de Grecia", a la izquierda, manteniendo una discusión.

Tales de Mileto (640 a. C.-546 a. C.), gran filósofo, el primero de "los siete sabios de Grecia", marcó la pauta de todo el pensamiento griego posterior. Además de asimilar y mejorar lo que aprendió de los egipcios, inventó y cultivó la matemática deductiva. Su estilo fue sistematizado y mejorado por Euclides, dos siglos y medio después.

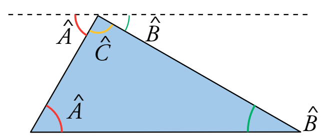
Otro gran geómetra

Posterior a Pitágoras y contemporáneo de Arquímedes, el último gran geómetra griego fue **Apolonio** (siglo III a. C.). Con un estilo pulido y sistemático, escribió un tratado dedicado a las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Siguiendo el espíritu de los griegos, su estudio sobre estas curvas, completísimo, fue meramente especulativo. Le hubiera causado asombro saber que dieciocho siglos después se demostraría que planetas y cometas describen órbitas elípticas y, algunos de ellos, hiperbólicas. Y que, posteriormente, las cónicas han sido referentes habituales en la técnica y en el arte.

Apolonio mostrando sus teorías en Alejandría (Egipto).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

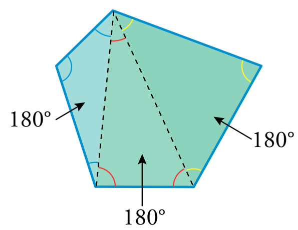
1 Ángulos en las figuras planas



Ángulos en los polígonos

La suma de los ángulos de un **triángulo** cualquiera es 180°.

Por tanto, cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° (180° : 3 = 60°).



La suma de los ángulos de un **polígono de *n* lados** es 180°· (n – 2).

Por tanto, la suma de los ángulos de un cuadrado es 360°, y la suma de los ángulos de un pentágono es 180° · (5 – 2) = 540°.

Ejercicio resuelto

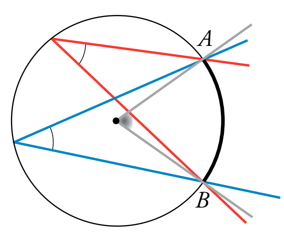
¿Cuánto mide cada ángulo de un decágono regular?

La suma de todos los ángulos de un decágono cualquiera es:

$$180° \cdot (10 - 2) = 180° \cdot 8 = 1\,440°$$

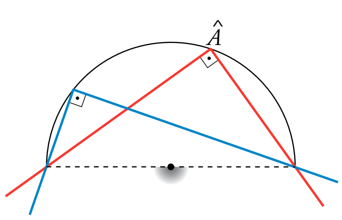
Si el decágono es regular, cada ángulo medirá 1 440° : 10 = 144°.

Ángulos en la circunferencia



Los **ángulos** azul y rojo están **inscritos** en la circunferencia, porque tienen sus vértices en ella y sus lados la cortan. Además, ambos **abarcan un mismo arco,** *AB*. Por tanto, son iguales. Su medida es la mitad de la medida del arco; es decir, la mitad del ángulo gris cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.

Dos o más ángulos inscritos en la misma circunferencia y que abarquen el mismo arco son iguales. Su medida es la mitad de la del arco.



Ejercicio resuelto

¿Cuánto mide un ángulo inscrito en una semicircunferencia?

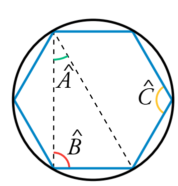
El ángulo rojo, $\hat{A}$, está inscrito en una semicircunferencia. Por tanto, el arco que abarca es la otra semicircunferencia, cuya medida es de 180°. La medida de $\hat{A}$ es, pues, 180° : 2 = 90°. Lo mismo le pasa al ángulo azul: cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

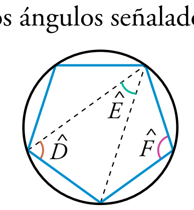
Piensa y practica

1. Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden 147°, 101°, 93°, 122° y 134°. Halla la medida del sexto ángulo.

2. ¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?

3. Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:





En la web Ampliación teórica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Figuras semejantes

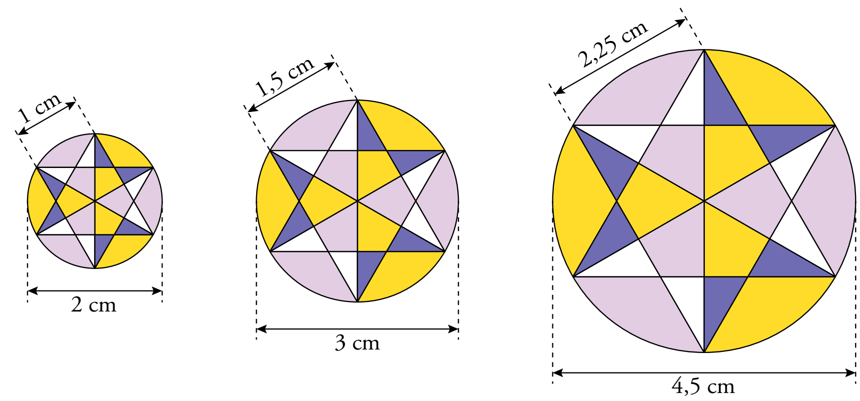
Dos **figuras** son **semejantes** cuando tienen la misma forma pero diferente tamaño. Y eso supone que:

- Los ángulos correspondientes son iguales.
- Las longitudes de los segmentos correspondientes son proporcionales.

  Es decir, cada longitud en una de ellas es igual a la correspondiente longitud de la otra multiplicada por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

Ejemplo

Estos tres rosetones son semejantes. Solo se diferencian en el tamaño:



Observa que:

— Los polígonos que tienen en su interior (un hexágono regular, seis triángulos equiláteros, etc.) mantienen los mismos ángulos.

— Si multiplicas la longitud de cualquier segmento del primero por 1,5, obtienes la longitud del correspondiente segmento del segundo. La **razón de semejanza** es 1,5:

1 cm · 1,5 = 1,5 cm   2 cm · 1,5 = 3 cm

— La razón de semejanza para pasar del primero al tercero es 2,25:

1 cm · 2,25 = 2,25 cm   2 cm · 2,25 = 4,5 cm

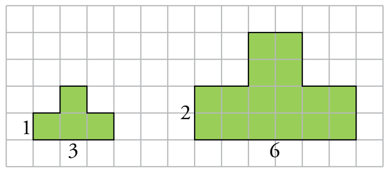
Observa y comprueba

Dos tamaños del mismo modelo de Smartphone.

Piensa y practica

1. Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.

2. Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:



¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Planos, mapas y escala

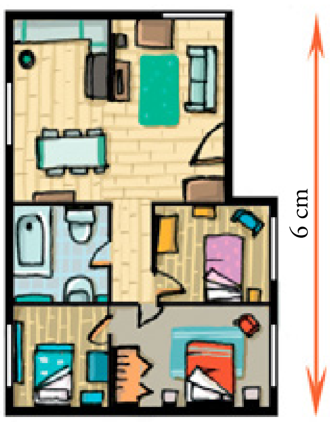
Para estudiar la ruta a seguir en un viaje, o para localizar una población, una carretera o un accidente geográfico, consultamos un **mapa.**

Para informarnos sobre las características de una vivienda, recurrimos a un **plano.**

Los planos y los mapas, además de la forma, informan del tamaño. Para ello incluyen **la escala,** que es el cociente entre las medidas en el papel y las medidas en la realidad.

> Los planos y los mapas son representaciones de la realidad que mantienen con ella la relación de semejanza.
>
> La **razón de semejanza** en los planos y los mapas se llama **escala.**

E → 1/200



Ejemplo 1

La imagen de la izquierda muestra el plano de una vivienda a escala 1/200 (un centímetro en el plano equivale a 200 centímetros en la realidad).

Midiendo una distancia en el plano, por ejemplo el largo de la fachada de la vivienda (6 cm), podemos calcular su dimensión real:

La fachada mide 6 cm · 200 = 1 200 cm = 12 m.

Ejemplo 2

La siguiente imagen muestra un mapa de las islas Canarias en el que se ha señalado la distancia entre Santa Cruz, en Tenerife, y Arrecife, en Lanzarote.

Sabiendo que la distancia real entre ambas ciudades es de 270 km, vamos a calcular la escala del mapa.

Midiendo con la regla, vemos que la distancia señalada es de 5,4 cm. Así:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el papel}} = \frac{270 \text{ km}}{5{,}4 \text{ cm}} = \frac{27\,000\,000 \text{ cm}}{5{,}4 \text{ cm}} = 5\,000\,000$$

La escala es 1/5 000 000.

Piensa y practica

1. Considera el plano del primer ejemplo.

a) Calcula la anchura de la vivienda.

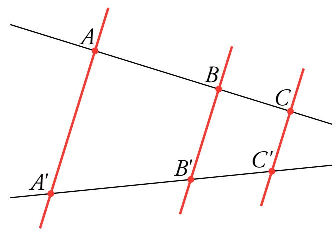
b) ¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?

2. a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.

b) ¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Triángulos semejantes. Teorema de Tales

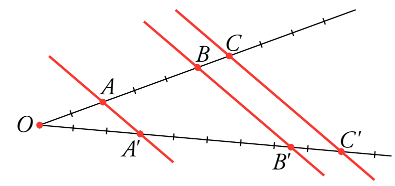


Teorema de Tales

Cuando dos o más rectas paralelas cortan a dos rectas secantes, determinan sobre ellas segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Compruébalo en el siguiente ejemplo:



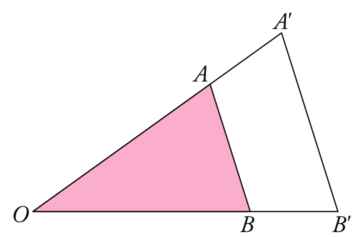
$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{1}{1{,}5}$$

También:

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{6}{9}$$

En la web
Ampliación teórica: teorema de Tales.

El teorema de Tales es importante porque es el punto de partida para estudiar la semejanza de triángulos.

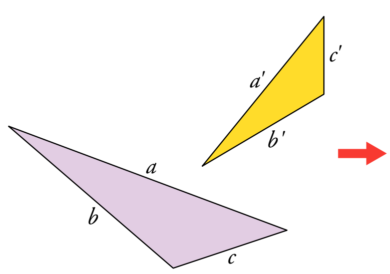


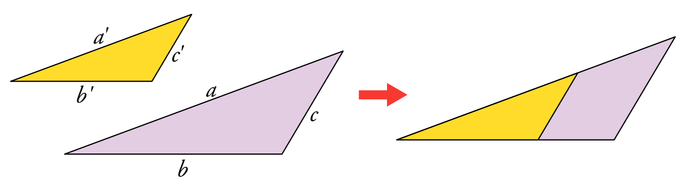
Triángulos en posición de Tales

Los triángulos OAB y $OA'B'$ tienen un ángulo, $\hat{O}$, en común, y los correspondientes lados opuestos, AB y $A'B'$, paralelos. Decimos, entonces, que están en **posición de Tales.**

Observa que los otros dos ángulos también coinciden: $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$.

Dos triángulos en posición de Tales, o que se pueden poner en posición de Tales, son semejantes.



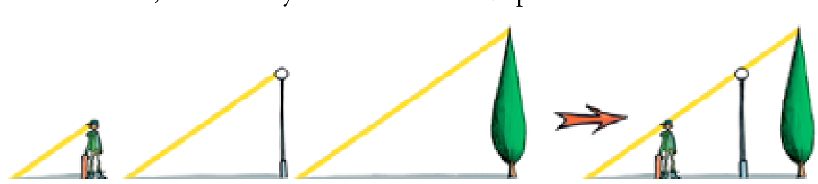


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Triángulos rectángulos semejantes

La aplicación del teorema de Tales que encontrarás con más frecuencia es la que se da en triángulos rectángulos. En la página de la derecha puedes observar tres de ellas: el cono, la escalera y la antena sostenida por cables. Veamos otra:

En la web
- Presentación del teorema de Tales.
- Practica con triángulos en posición de Tales.

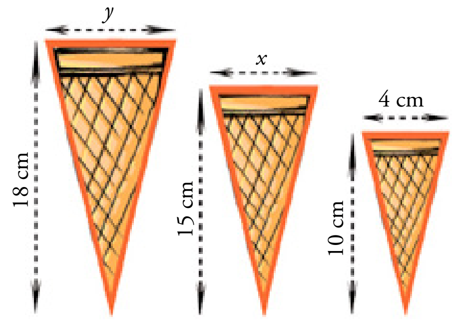


En un mismo instante, distintos objetos verticales (árboles, farolas, personas) y sus respectivas sombras pueden situarse en “posición de Tales”. Es decir, son triángulos rectángulos semejantes.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Problemas resueltos

1. ***Una heladería ofrece sus productos en cucuruchos de un mismo formato, en tres tamaños diferentes: maxi, de 18 cm; normal, de 15 cm, y mini, de 10 cm (ver figura). El cucurucho pequeño lleva bolas de helado de 4 cm de diámetro. ¿Qué tamaño tienen las bolas del mediano y las bolas del grande?***



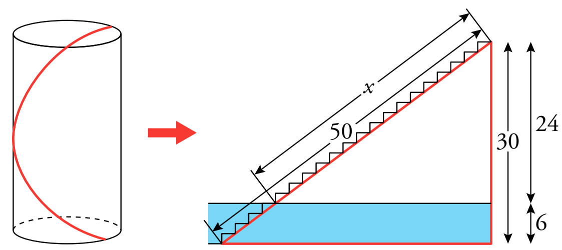
$$\frac{10}{4} = \frac{15}{x} = \frac{18}{y}$$

$$x = \frac{4 \cdot 15}{10} = 6$$

$$y = \frac{4 \cdot 18}{10} = 7{,}2$$

Las bolas medianas tienen un diámetro de 6 cm, y las grandes, un diámetro de 7,2 cm.

2. ***Un pozo de 30 metros de profundidad tiene adosada a la pared una escalera de 50 m de longitud que desciende hasta el fondo. El nivel del agua alcanza los seis metros de altura. ¿Qué distancia hay que recorrer por la escalera para llegar al nivel del agua?***



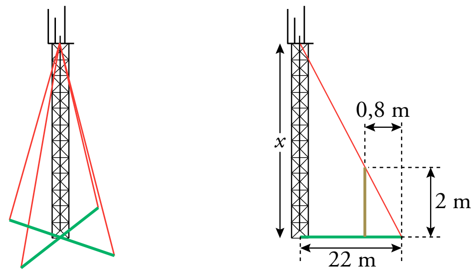
$$\frac{30}{50} = \frac{24}{x}$$

$$x = \frac{50 \cdot 24}{30} = 40$$

Es necesario recorrer 40 m de escalera para llegar al nivel del agua.

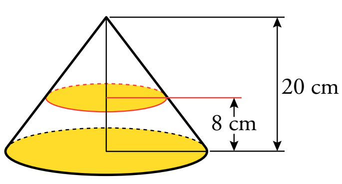
Piensa y practica

1. Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.



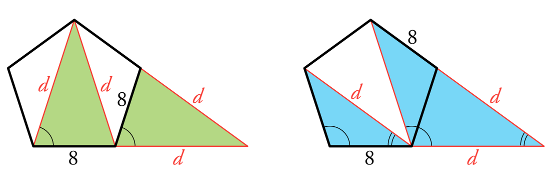
2. Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?

3. La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?



4. Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.

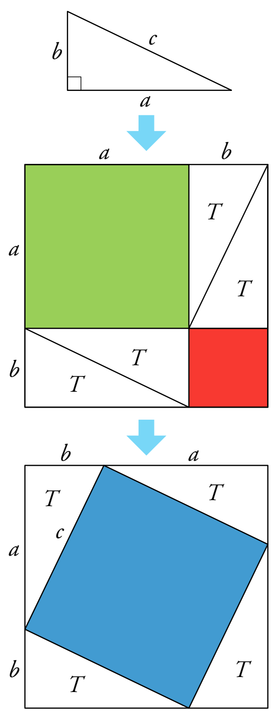
Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.



En la web Resuelve el problema “Pirámide de Keops”.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 El teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo cualquiera, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$a^2 + b^2 = c^2$ **(teorema de Pitágoras)**

En el margen hay una bonita demostración de este teorema:

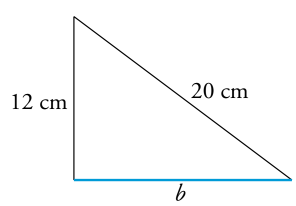
- Los dos cuadrados grandes son iguales. Su lado es $a + b$.
- En el primero, hay dos cuadrados de áreas a^2 y b^2 y cuatro triángulos T.
- En el segundo, hay un cuadrado de área c^2 y cuatro triángulos T.
- Por tanto, al suprimir los cuatro triángulos de cada uno, las áreas de lo que queda coinciden: $a^2 + b^2 = c^2$.

Veamos algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Cálculo del lado desconocido en un triángulo rectángulo

Aunque el teorema de Pitágoras es una igualdad entre áreas, se utiliza sobre todo para relacionar los lados de un triángulo rectángulo:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Ejercicio resuelto

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 cm, y uno de los catetos, 12 cm. Calcular la longitud del otro cateto.

$$20^2 = b^2 + 12^2 \rightarrow b^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \rightarrow b = \sqrt{256} = 16$$

El cateto desconocido, b, mide 16 cm.

Saber si un triángulo es rectángulo

Conociendo los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo.

Sean a, b, c los lados de un triángulo, siendo c el mayor. Entonces:

— Si $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo.

— Si $a^2 + b^2 < c^2$, el triángulo es obtusángulo.

— Si $a^2 + b^2 > c^2$, el triángulo es acutángulo.

Ejercicio resuelto

Averiguar cómo son los triángulos siguientes:

I) a = 7 cm, b = 8 cm y c = 11 cm

II) a = 11 cm, b = 17 cm y c = 15 cm

III) a = 34 cm, b = 16 cm y c = 30 cm

I) $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$; $11^2 = 121$. Como $113 < 121$, es obtusángulo.

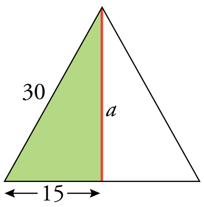
II) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289 \rightarrow$ Es acutángulo.

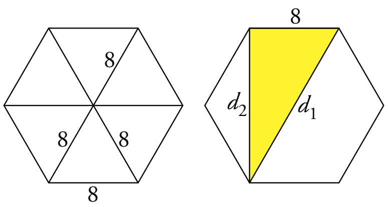
III) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156 \rightarrow$ Es rectángulo.

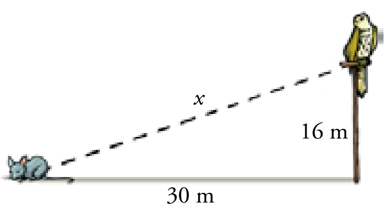
En la web

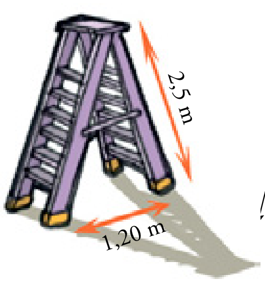
- Presentación del teorema de Pitágoras.
- Practica la aplicación del teorema de Pitágoras.

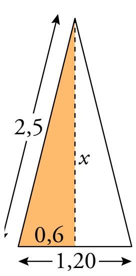
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....











Problemas resueltos

1. ***Hallar la altura de un triángulo equilátero de 30 cm de lado.***

La altura es un cateto del triángulo rectángulo verde que puedes ver a la izquierda.

$$a^2 = 30^2 - 15^2 \rightarrow a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98\ldots \approx 26 \text{ cm}$$

2. ***El lado de un hexágono regular mide 8 cm. Hallar las longitudes de su diagonal larga*** (d_1) **y de su diagonal corta** (d_2)**.**

El hexágono regular se divide en seis triángulos equiláteros iguales, de lado 8 cm. Así, la longitud de d_1 es igual al doble del lado: $d_1 = 8 + 8 = 16$ cm.

Dentro del hexágono, podemos considerar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es d_1 (16 cm); uno de los catetos, un lado del hexágono (8 cm), y el otro cateto, d_2. Y aplicando el teorema de Pitágoras:

$$16^2 = 8^2 + {d_2}^2 \rightarrow d_2 = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} = 13{,}856\ldots \approx 13{,}9 \text{ cm}$$

3. ***Un ave rapaz, encaramada a un poste de 16 m de altura, observa a un ratón, posible presa, situado a 30 m de la base del poste. ¿Qué distancia separa al ave del ratón?***

$$x^2 = 16^2 + 30^2 \rightarrow x = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = 34 \text{ m}$$

La distancia que separa al ave del ratón es de 34 metros.

4. ***Los brazos de una escalera de tijera miden 2,5 m y sus pies se apoyan en el suelo a 1,20 m uno del otro. ¿Qué altura alcanza la escalera?***

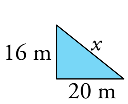
Como puedes observar en el margen, la altura de la escalera se puede considerar un cateto en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un brazo de la escalera (2,5 m) y el otro cateto su proyección sobre el suelo (0,6 m).

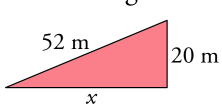
Así: $2{,}5^2 = 0{,}6^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{2{,}5^2 - 0{,}6^2} = \sqrt{5{,}89} = 2{,}426\ldots \approx 2{,}4$ cm

La escalera alcanza una altura de 2,4 m, aproximadamente.

Piensa y practica

1. Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

a) 

b) 

2. Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:

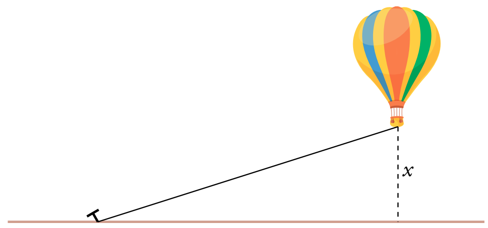
a) 49 m, 18 m y 52 m b) 44 cm, 17 cm y 39 cm

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm d) 15 cm, 15 cm, 15 cm

3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.

4. Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.

5. Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?

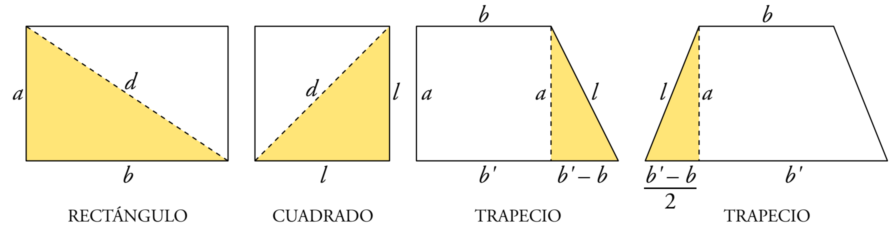


6. ¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de 1,5 × 2 metros, a través del hueco de una ventana de 1 × 1,30 metros? Razona tu respuesta.

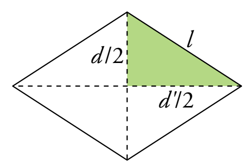
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Triángulos rectángulos en figuras planas

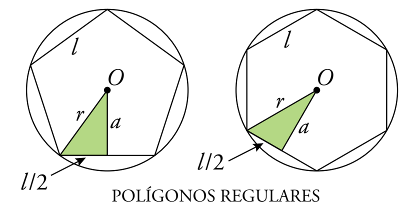
Observa las siguientes figuras planas. En cada una de ellas se ha señalado un triángulo rectángulo que, por el teorema de Pitágoras, permite relacionar algunos de sus elementos:



RECTÁNGULO CUADRADO TRAPECIO RECTÁNGULO TRAPECIO ISÓSCELES

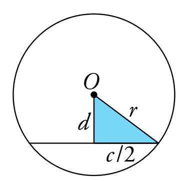


ROMBO



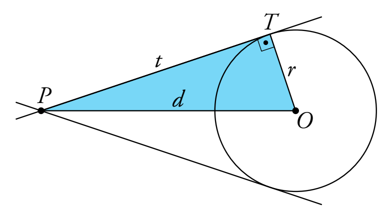
POLÍGONOS REGULARES

a, apotema
r, radio de la circunferencia circunscrita



c, cuerda
d, distancia de *O* a *c*

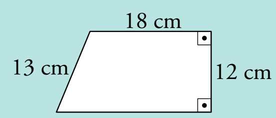
CIRCUNFERENCIA

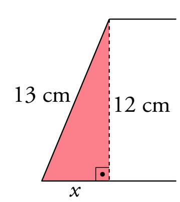


TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Ejercicios resueltos

1. ***De un trapecio rectángulo conocemos tres lados. Calcular la longitud del cuarto lado.***



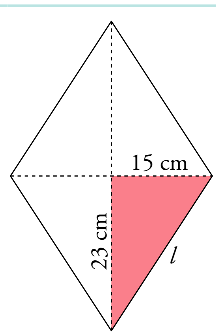


El triángulo coloreado es rectángulo. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

La diferencia entre los dos lados paralelos es 5 cm. Por tanto, el lado que falta mide 18 + 5 = 23 cm.

2. ***Hallar la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 30 cm y 46 cm.***



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo coloreado:

$$l = \sqrt{15^2 + 23^2} = \sqrt{225 + 529} = \sqrt{754} \longrightarrow$$

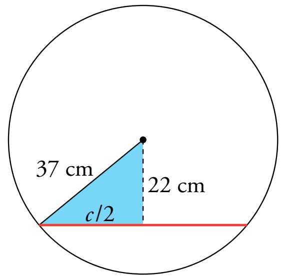
$\xrightarrow{\text{con calculadora}}$ 27.4590604

Por tanto, el lado mide 27,46 cm, aproximadamente.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***En una circunferencia de radio 37 cm trazamos una cuerda a 22 cm del centro. ¿Cuál es su longitud?***

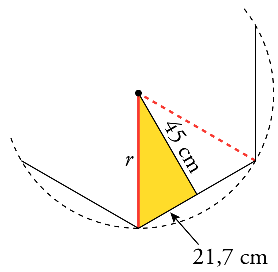


$\frac{c}{2} = \sqrt{37^2 - 22^2} = \sqrt{885} \longrightarrow$ 29.7489495

La mitad de la cuerda mide 29,75 cm.

La longitud de la cuerda es 59,50 cm, aproximadamente.

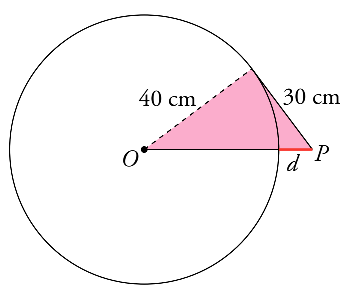
2. ***La apotema de un heptágono regular mide 45 cm, y su lado, 43,4 cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono?***



$r = \sqrt{45^2 + 21{,}7^2} = \sqrt{2\,495{,}89} \rightarrow$ 49.9588830

El radio mide 49,96 cm, es decir, aproximadamente 50 cm.

3. ***Desde un punto exterior a una circunferencia de 40 cm de radio trazamos una tangente, que mide 30 cm. ¿A qué distancia de la circunferencia está el punto?***



$\overline{OP}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 40 cm y 30 cm. Por tanto:

$\overline{OP} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$ cm

$d = \overline{OP} - r = 50 - 40 = 10$ cm

El punto P está a 10 cm de la circunferencia.

Piensa y practica

1. Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.

2. Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.

3. El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.

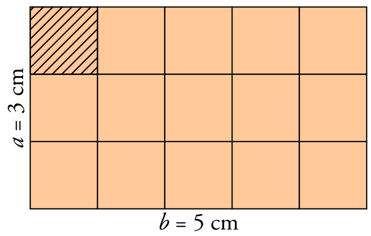
4. En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?

5. Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?

6. Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

7 Áreas de los polígonos



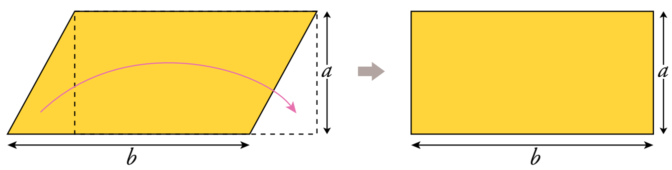
Área de un rectángulo

Observa en la figura que hay 3 × 5 cuadrados de 1 cm^2. En general:

El **área de un rectángulo** de dimensiones a y b es $A = a \cdot b$.

Un cuadrado de lado l es un rectángulo en el que $a = b = l$. Por tanto:

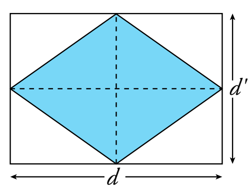
El **área de un cuadrado** de lado l es $A = l^2$.



Área de un paralelogramo

Al suprimir un triángulo de la izquierda y ponerlo a la derecha, se obtiene un rectángulo de dimensiones a y b. Por tanto:

El **área de un paralelogramo** de base b y altura a es $A = a \cdot b$.



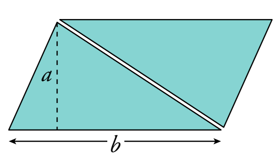
El rombo como caso particular

Puesto que el rombo es un paralelogramo, su área puede obtenerse por el procedimiento anterior. Pero cuando se conocen sus diagonales, el área puede hallarse también del siguiente modo:

Área del rectángulo: $A_{\text{RECTÁNGULO}} = d \cdot d'$

Área del rombo: $A_{\text{ROMBO}} = \frac{1}{2} A_{\text{RECTÁNGULO}}$. Por tanto:

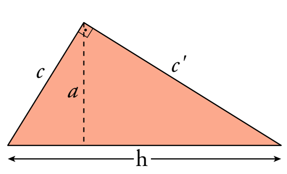
El **área de un rombo** de diagonales d y d' es $A = \frac{d \cdot d'}{2}$.



Área de un triángulo

Tenemos un triángulo de base b y altura a. Le adosamos otro igual y se obtiene un paralelogramo. Por tanto:

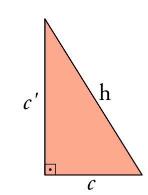
$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$



Área de un triángulo rectángulo

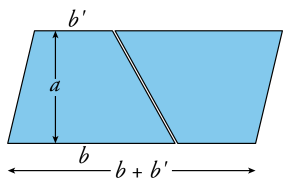
Llamamos c y c' a los catetos; h, a la hipotenusa, y a, a la altura.

$A = \frac{h \cdot a}{2}$. Pero también $A = \frac{c \cdot c'}{2}$.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

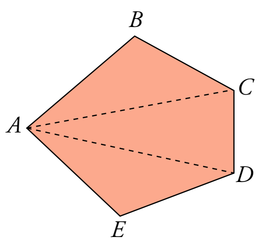
Área de un trapecio



Si a un trapecio le adosamos otro igual, se obtiene un paralelogramo de base $b + b'$ y altura a.

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{A_{\text{PARALELOGRAMO}}}{2} = \frac{(b+b')\cdot a}{2}$$

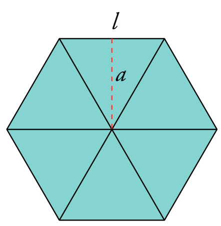
Área de un polígono cualquiera



Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos y se suman las áreas de todos ellos.

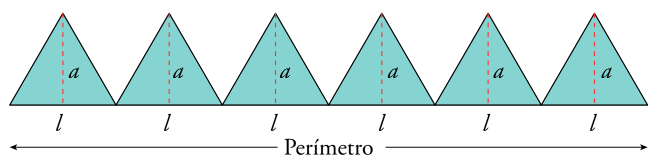
$$A_{\text{POLÍGONO}} = \text{Suma de las áreas de los triángulos}$$

Área de un polígono regular de n lados



a es la apotema del polígono regular

Un polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tiene.



$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{(n \cdot l)\cdot a}{2} = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}$$

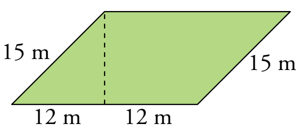
Piensa y practica

1. Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.

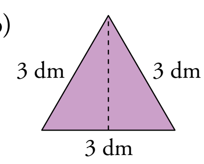
2. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.

3. Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:

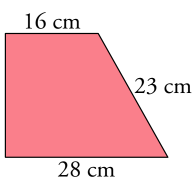
a)



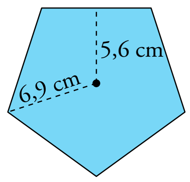
b)



c)



d)



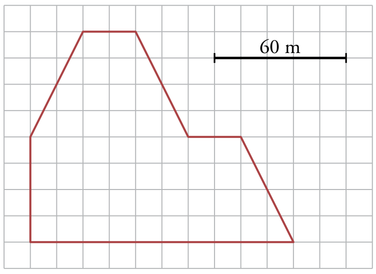
4. Calcula:

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

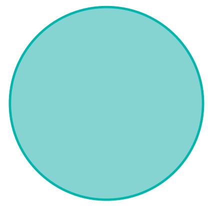
5. La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.

6. En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.



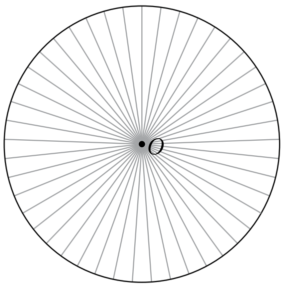
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

8 Áreas y perímetros de algunas figuras curvas



Perímetro de la circunferencia = $2\pi r$

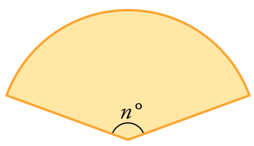
Área del círculo = πr^2



Si consideramos una infinidad de triángulos de vértice en O y base sobre la circunferencia, sus alturas son r, y la suma de sus bases sería $2\pi r$.

Por tanto, la suma de sus áreas sería: $\dfrac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$

Sector circular de ángulo *n* grados



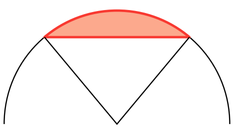
$$\text{Área} = \frac{\pi r^2 \cdot n}{360}$$

$$\text{Perímetro} = \frac{2\pi r \cdot n}{360} + 2r$$

Tanto en el área como en el perímetro, se procede a repartir la parte que corresponde a $n°$ sobre un total de 360°.

Segmento circular

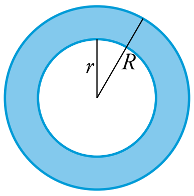
El área del segmento circular se halla restando del área del sector, el área del triángulo.



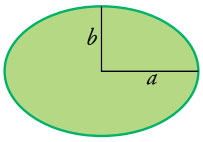
Corona circular

Área = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Perímetro = $2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r)$



Elipse



El área de una elipse de semiejes a y b es:

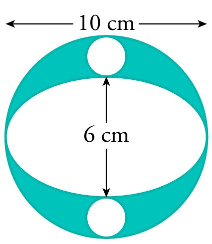
$$A = \pi ab$$

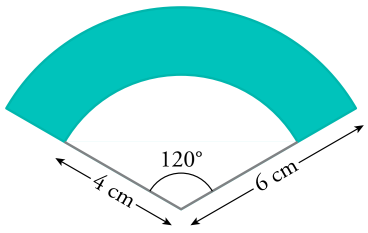
Es como el área de un círculo que tuviera radios distintos en las dos direcciones:

$$\pi \cdot r \cdot r \;\rightarrow\; \pi \cdot a \cdot b$$

Piensa y practica

1. Halla el área de las figuras coloreadas.

a) 

b) 

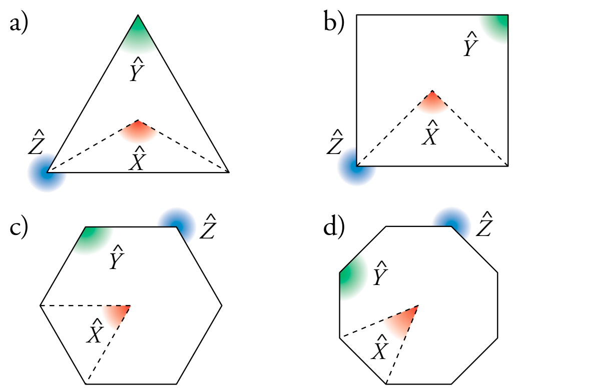
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

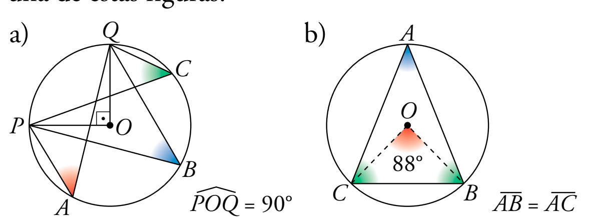
Practica

Ángulos

1. Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:

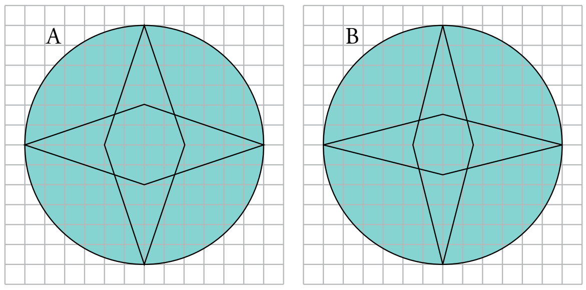


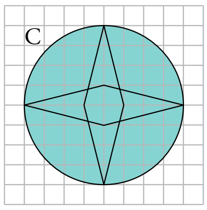
2. ¿Cuánto miden los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en cada una de estas figuras?



Semejanza

3. Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?

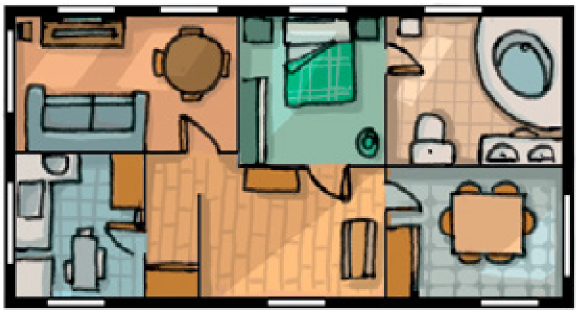




¿Cuál es la razón de semejanza?

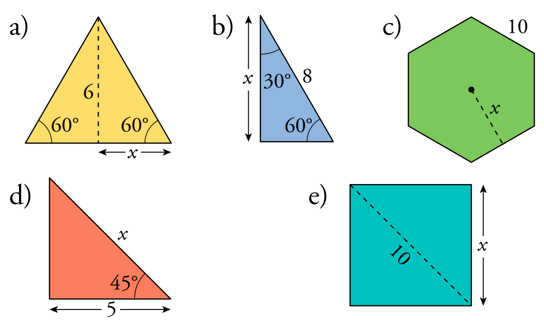
Dibuja una figura semejante a la figura A anterior, de forma que la razón de semejanza sea 3/2.

4. Debajo tienes el plano de un piso a escala 1/250. Calcula sus dimensiones (largo y ancho), y su superficie.



Teorema de Pitágoras

5. Calcula x en cada caso:



6. Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

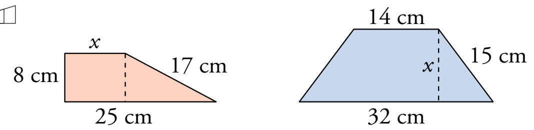
a) 5 m, 6 m y 7 m b) 13 m, 15 m y 20 m

c) 45 m, 27 m y 36 m d) 35 m, 28 m y 46 m

7. Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?

8. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.

9.



a) Calcula x en cada uno de estos trapecios.

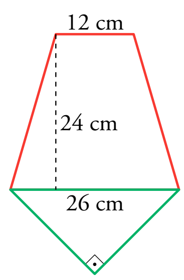
b) Halla las longitudes de sus diagonales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m.

¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?

11. Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.

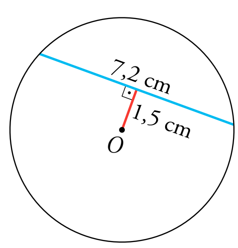


12. En una circunferencia de 15 cm de radio, traza una cuerda AB a 12 cm del centro.

a) ¿Cuál es la longitud de AB?

b) ¿Cuántas cuerdas de la misma longitud que AB hay en esa circunferencia? ¿Cuántas hay que sean paralelas a AB? ¿Cuántas hay paralelas y de la misma longitud que AB?

13. Fíjate en esta circunferencia y responde a las siguientes preguntas:



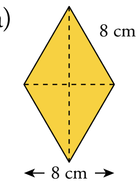
a) ¿Cuánto mide el radio?

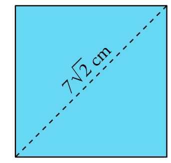
b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

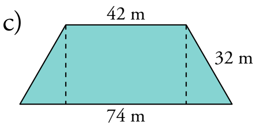
14. Un punto P está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde P a la circunferencia.

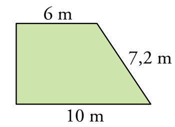
Áreas

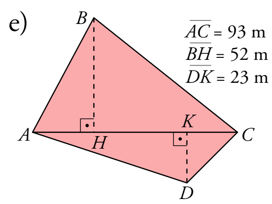
15. Halla el área de las figuras coloreadas:

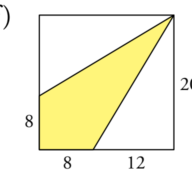
a)


b)


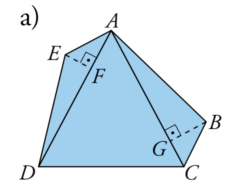
c)


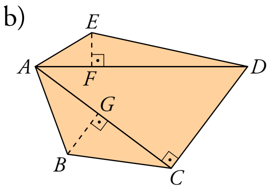
d)


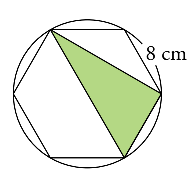
e)


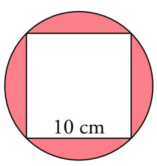
f)


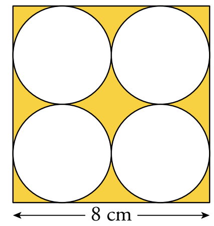
16. Calcula el área de las figuras coloreadas:

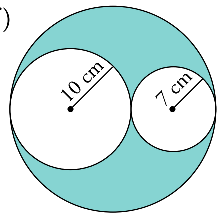
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

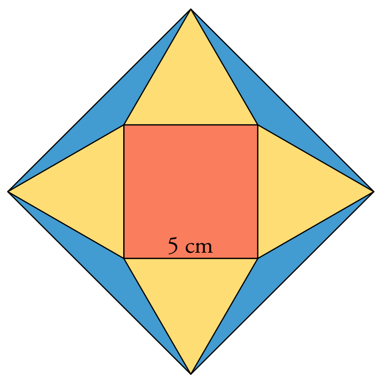
Ejercicios y problemas

17. Calcula:

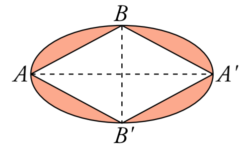
a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



18. Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



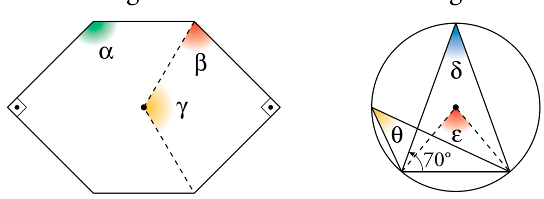
19. En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).

20. Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

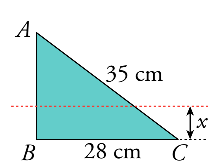
a) 90° b) 120° c) 72° d) 153°

Autoevaluación

1. Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:

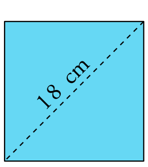


2. ¿A qué altura, x, hay que cortar el triángulo ABC para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?

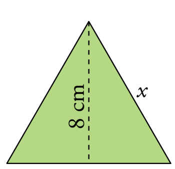


3. Calcula el valor de x en cada caso:

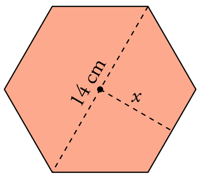
a)



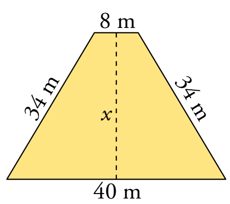
b)



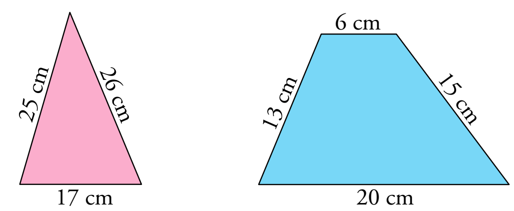
c)



d)

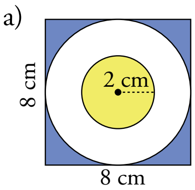


4. Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:

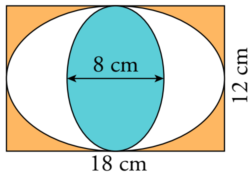


5. Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:

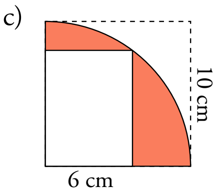
a)



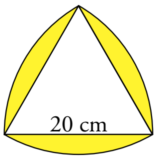
b)



c)



d)



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....