8 Funciones y gráficas

Observación de los fenómenos físicos

Sin duda, el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos. En la Antigüedad, la explicación de estos era fruto de la observación y la especulación. Esta actitud se mantuvo durante muchos siglos.

Galileo Galilei (1564-1642).

Llega la medición y la cuantificación

No fue hasta finales del siglo XVI cuando el italiano **Galileo** dio un paso más: consideró imprescindible medir, valorar cuantitativamente causas y efectos, y buscar alguna relación matemática que describiera con sencillez un fenómeno.

Galileo enseñando el uso del telescopio al Dux de Venecia en 1609.

Aunque Galileo no fue el primero en manifestar esta actitud experimental hacia la ciencia (entre otros, **Arquímedes** ya lo hizo dieciocho siglos antes), sí la desarrolló de manera más sistemática y, además, lo supo exponer y transmitir con gran elocuencia.

Aparición de las funciones

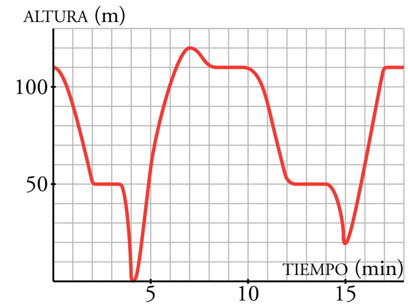
Las investigaciones de Galileo sobre las relaciones matemáticas entre dos variables (x e y, causas y efectos) son un antecedente muy claro del concepto de función que, como objeto de estudio independiente, va tomando forma a lo largo del siglo XVII (**Descartes, Newton** y **Leibniz**) y finalmente queda definido por **Euler** ya en el XVIII.

Sello suizo en honor de Leonhard Euler (1707-1783).

Isaac Newton (1643-1727).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Las funciones y sus gráficas



Un equipo de naturalistas observa un águila: sale de su nido, caza un conejo, regresa a su nido, vuelve a salir, caza una paloma y, de nuevo, vuelve a su nido.

Observando atentamente la gráfica que han dibujado, se pueden averiguar muchas cosas: altura del nido, altura a la que suele otear para buscar caza, momento en que consigue dar caza a cada una de sus presas…

DOS VARIABLES, DOS EJES

La gráfica que describe el vuelo del águila relaciona dos variables:

- El tiempo que ha transcurrido desde que comenzó la observación, t. Es la **variable independiente.**
- La altura a la que se encuentra el águila, a. Es la **variable dependiente.**

La representación se ha hecho en un diagrama cartesiano:

- En el **eje horizontal** o **eje de abscisas,** el tiempo, t.
- En el **eje vertical** o **eje de ordenadas,** la altura, a.

Cada punto de la gráfica representa un *tiempo* y una *altura*, y significa que en ese instante el águila está a esa altura.

Analizando la gráfica apreciamos las subidas y bajadas del águila en su vuelo, y podríamos describirlas con cierto detalle.

ESCALAS

En cada eje hay una **escala:**

- En el eje horizontal, un cuadrito significa 1 minuto.
- En el eje vertical, un cuadrito significa 10 metros.

Las escalas en los ejes nos permiten no solo describir cualitativamente el comportamiento, sino también cuantificarlo. Por ejemplo: la altura máxima alcanzada durante la observación es de 120 m y eso ocurre a los 7 minutos.

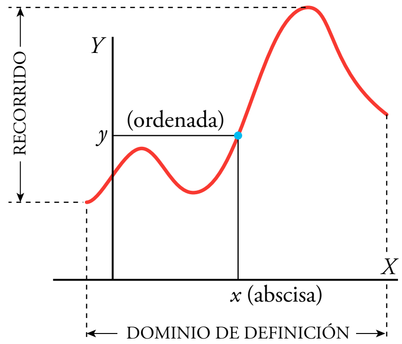
DOMINIO DE DEFINICIÓN Y RECORRIDO

La gráfica del vuelo del águila se extiende en el tramo 0-18. Solo tenemos información del comportamiento del águila en este intervalo de tiempo.

El intervalo 0-18 se llama **dominio de definición** de la función.

La altura a la que se encuentra el águila oscila entre 0 m y 120 m.

Al tramo 0-120 se le llama **recorrido** de la función.



FUNCIÓN

Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Observa la gráfica de la página anterior. Responde:

a) ¿A qué altura se encuentra el nido?

b) ¿A qué altura estaba el águila a los cinco minutos de empezar la observación?

c) ¿Desde qué altura otea para buscar caza?

d) ¿En qué instante caza al conejo?

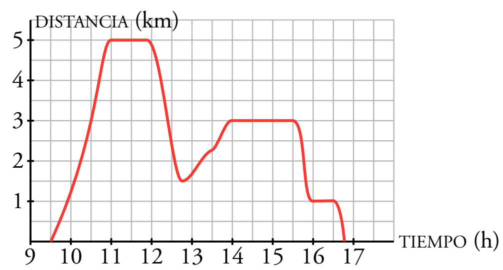
e) ¿Cuánto tiempo pasa en el nido con su pareja y sus polluelos después de cazar al conejo?

f) ¿A qué altura volaba la paloma que caza?

g) Desde que caza a la paloma, ¿cuánto tarda en subir al nido? Halla la velocidad de subida en metros por minuto.

2. En unos ejes cartesianos, describe 10 minutos de un posible vuelo de una cigüeña, desde que sale de su nido en el campanario de una iglesia hasta que vuelve a él, después de haber cazado una rana.

3. Matilde sale de casa y visita al dentista. A continuación recoge un vestido en casa de la modista y come con una amiga en un restaurante. Por último, hace la compra en un supermercado situado camino de casa.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿En qué tramo o tramos está definida la función?

d) ¿Qué representa cada cuadrito del eje de abscisas?

e) ¿Qué representa cada cuadradito del eje de ordenadas?

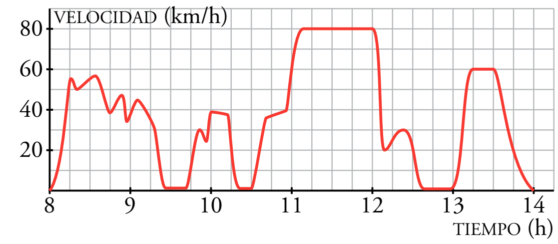
f) ¿A qué distancia de la casa de Matilde está la consulta del dentista?

g) ¿A qué hora llegó Matilde al restaurante?

h) ¿Cuánto duró la comida?

i) ¿Qué le queda a Matilde más lejos de casa, la modista o el supermercado?

4. En la siguiente gráfica se ha representado la velocidad de una furgoneta de reparto a lo largo de una mañana de trabajo, que finaliza cuando el conductor para a la hora de comer.



Observa la gráfica y responde:

a) ¿Qué se ha representado en el eje de abscisas?

b) ¿Qué se ha representado en el eje de ordenadas?

c) ¿Qué intervalo es el dominio de definición?

d) ¿Cuál es la variable independiente?

e) ¿Cuál es la variable dependiente?

f) ¿Cuántas paradas ha hecho antes de comer?

g) ¿A qué hora efectuó la primera parada?

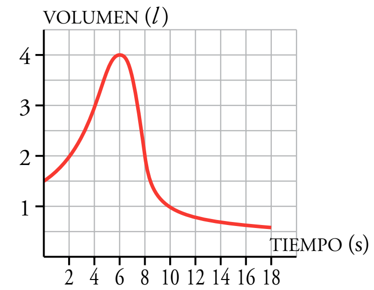
h) ¿Cuánto duró la primera parada?

i) ¿A qué hora entró en la autovía?

j) ¿A qué velocidad circuló por la autovía?

5. Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro.

Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

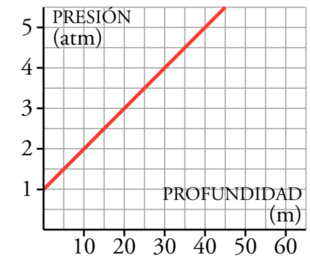
c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina la prueba?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Crecimiento y decrecimiento de una función

- Al sumergirnos en agua, la presión aumenta de manera uniforme. En la superficie, la presión es la atmosférica (1 atm). Por cada 10 m que profundizamos, la presión aumenta una atmósfera (1 atm).

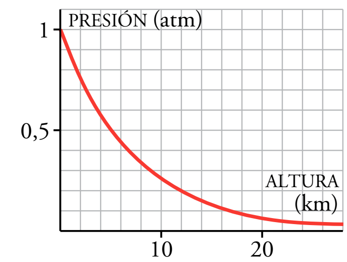
  

  Esta gráfica corresponde a la función:

  profundidad dentro del agua $\rightarrow$ *presión*

  Esta función es *creciente*, pues a más profundidad, más presión.

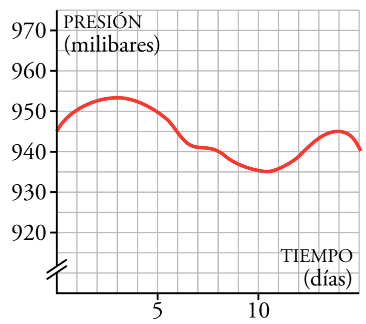
- La presión atmosférica disminuye al aumentar la altura a la que nos encontremos sobre el nivel del mar, aunque no lo hace uniformemente: al principio disminuye más rápidamente que después.

  Esta gráfica corresponde a la función:

  altura sobre el nivel del mar $\rightarrow$ *presión*

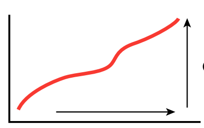
  Es una función *decreciente*, pues a más altura, menos presión.



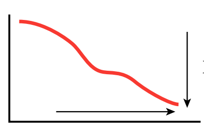
- La variación de la presión atmosférica en un lugar es un indicio importante de cambios en el tiempo meteorológico. La gráfica de la izquierda nos da la presión atmosférica en un cierto lugar, en cada momento, durante 15 días. Corresponde a la función:

  instante de tiempo $\rightarrow$ *presión*

  Presenta tramos en los que es *creciente* y tramos en los que es *decreciente*.



CRECIENTE



DECRECIENTE

Para estudiar las variaciones de una función hemos de mirar su gráfica de izquierda a derecha, es decir, hemos de ver cómo varía y cuando x aumenta.

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente, x, aumenta la variable dependiente, y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y.

Una misma función puede tener **tramos crecientes** y tramos **decrecientes.**

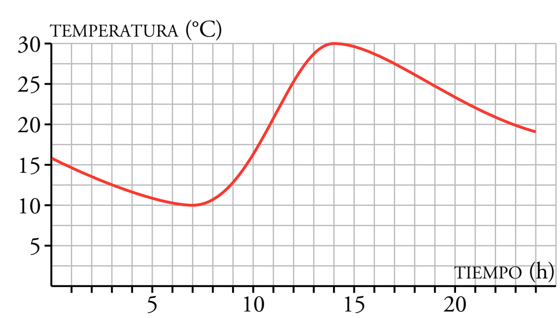
Piensa y practica

1. La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



En la web Refuerza: crecimiento y decrecimiento de una función.

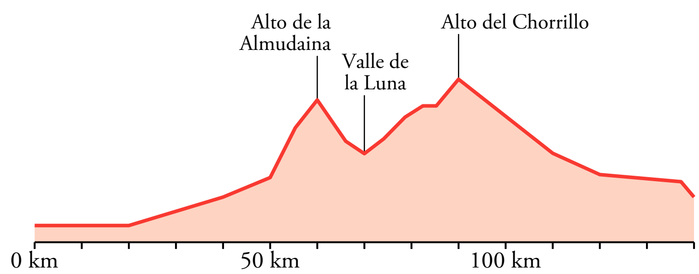
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Máximos y mínimos relativos

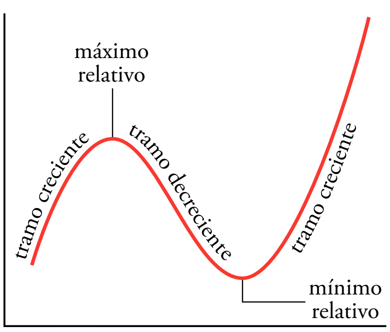
Vamos a analizar ahora la gráfica que refleja el perfil de una etapa de la Vuelta a España. Corresponde a la función *distancia* → *altura.*

La altura a la que ruedan los ciclistas es función del kilómetro por el que van.

La gráfica presenta un tramo creciente desde la salida hasta el Alto de la Almudaina. A partir de ahí hay un tramo decreciente hasta el Valle de la Luna. Donde vuelve a crecer hasta el Alto del Chorrillo. Desde este alto, en el siguiente tramo, que llega hasta la meta, la gráfica es decreciente.



En el perfil de la etapa se aprecian claramente dos *máximos relativos* (kilómetros 60 y 90) y un *mínimo relativo* (kilómetro 70). La altura crece hasta llegar al máximo relativo y decrece a partir de este. La altura decrece hasta llegar al mínimo relativo y crece a partir de este.



Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean.

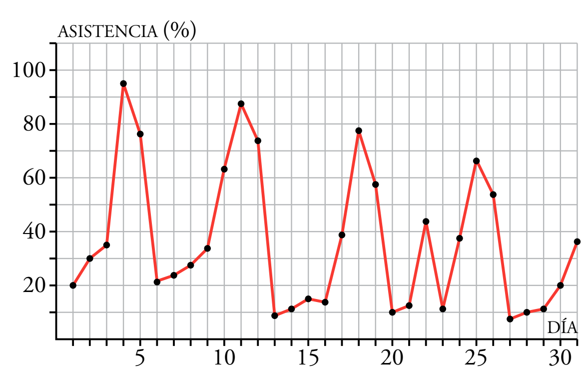
A la izquierda del máximo relativo, la función es creciente, y a su derecha es decreciente.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando su ordenada es menor que la de los puntos que lo rodean.

A la izquierda del mínimo relativo, la función es decreciente, y a su derecha, creciente.

Piensa y practica

2. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:



a) ¿En qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

b) ¿Qué día ha habido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

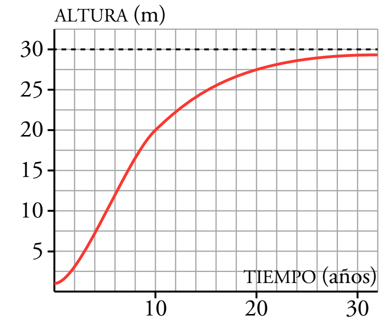
d) Hubo un día entre semana que fue festivo. ¿De qué día se trata?

e) Escribe un resumen de la asistencia que han tenido los multicines a lo largo de este mes.

f) Un cierto día de este mes, viernes, televisaron un partido de fútbol importantísimo. ¿Qué día podemos suponer que fue?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Tendencias de una función



Comportamiento a largo plazo

La gráfica del margen muestra la evolución de la altura de un árbol de eucaliptus a lo largo de 31 años. Representa la función:

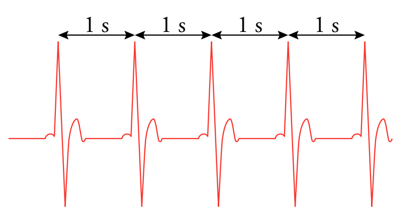
tiempo → *altura*

Es claro que, al pasar el tiempo, la altura del árbol se acerca a 30 m, su tope. Decimos, entonces, que la altura del árbol **tiende** a 30 m con el transcurso del tiempo.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarían lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Estos son otros ejemplos en los que la gráfica de la función tiende a estabilizarse:

- Velocidad de un paracaidista en caída libre (tiende a 200 km/h).
- Temperatura de un refresco al sacarlo de la nevera (tiende a la temperatura de la habitación).



Periodicidad

Un electrocardiograma recoge los impulsos eléctricos del corazón y los refleja en una gráfica. La del margen muestra el electrocardiograma de un paciente sano en estado de relajación. La función es:

tiempo → *intensidad eléctrica*

Como se repite una y otra vez cada segundo, podemos decir que es una función *periódica* de *periodo* 1 segundo.

Funciones periódicas son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. A la longitud de ese intervalo se le llama **periodo.**

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un periodo.

Ejemplos

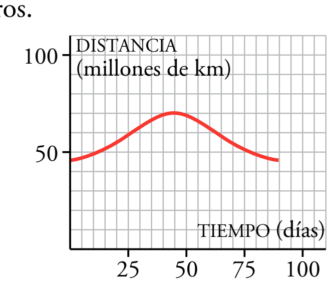
Otros ejemplos de funciones periódicas son:

- Altura a la que se encuentra una cesta cuando la noria está en funcionamiento.
- Distancia al Sol del cometa Halley.

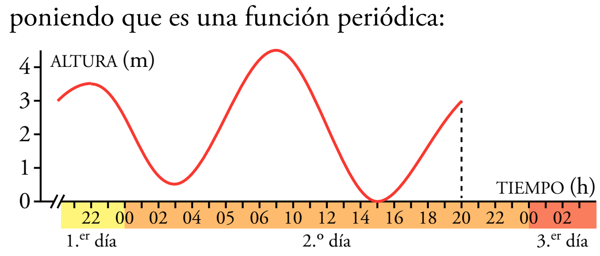
Piensa y practica

1. Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros.

Copia y completa en tu cuaderno la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.



2. La siguiente gráfica muestra la elevación de la marea en un determinado lugar a lo largo de 24 horas. Cópiala en tu cuaderno y complétala para 48 horas suponiendo que es una función periódica:



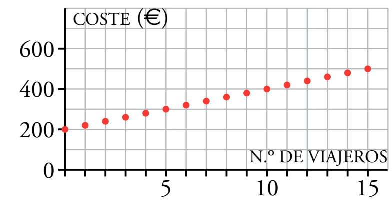
En la web Refuerza: función periódica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Discontinuidades. Continuidad

- Por el alquiler de un autobús nos cobran 200 € fijos más 20 € por viajero. La gráfica de la derecha muestra la función:

  número de viajeros → *coste*

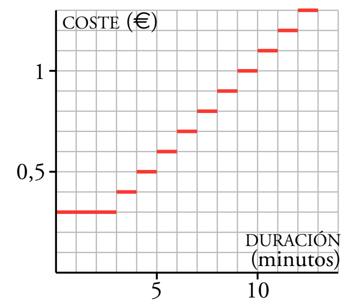


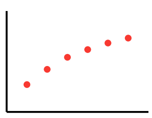
La variable independiente solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 … y no los intermedios, ya que no tiene sentido un número fraccionario de viajeros. La gráfica es **discontinua** porque la variable independiente se mueve a saltos.

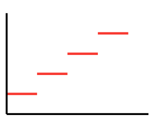
- Cierta llamada telefónica cuesta 30 céntimos de euro para comenzar, y con ellos se puede hablar 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto cuesta 10 céntimos. Esta es la función:

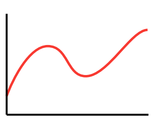
  duración → *coste*

  Los saltos bruscos que presenta la gráfica se llaman **discontinuidades** de la función.




Función discontinua

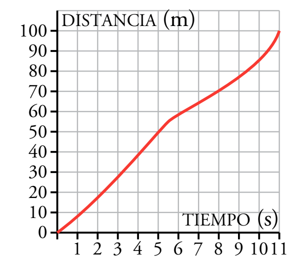

Función discontinua


Función continua

- La siguiente gráfica describe la distancia recorrida por un velocista con el paso del tiempo. Se trata de la función:

  tiempo → *distancia*

  La variación de la distancia es suave, sin saltos bruscos. Es una función **continua.**



Una función se llama **continua** cuando no presenta discontinuidad de ningún tipo. Por tanto, su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

También se puede decir de una función que es **continua en un tramo,** aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Piensa y practica

1. La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.

a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → *coste*

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

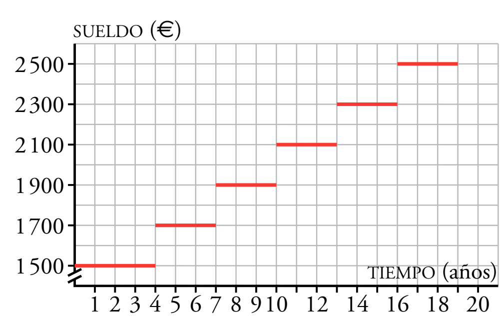
c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

2. La gráfica de la derecha muestra el sueldo mensual de un trabajador en una empresa a lo largo de su vida.

a) ¿Cuánto tiempo lleva el trabajador en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? ¿Y a los 20?

c) ¿Es una función continua?



En la web Resuelve los problemas: "Tarifas postales", "El depósito".

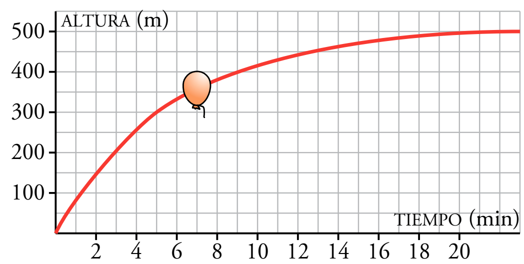
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Interpretación de gráficas

1. Se suelta un globo que se eleva. La siguiente gráfica representa la altura, con el paso del tiempo, a la que se encuentra el globo:



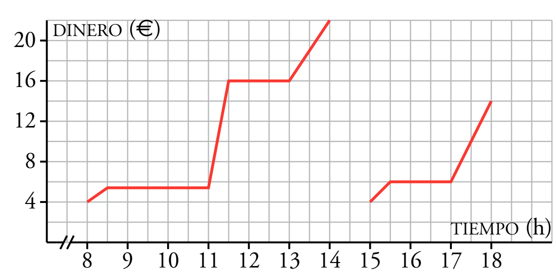
a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Qué altura gana el globo entre el minuto 0 y el 5? ¿Y entre el 5 y el 9? ¿En cuál de estos dos intervalos crece más rápidamente la función?

c) ¿A qué altura tiende a estabilizarse?

d) Haz una descripción de la altura a la que se encuentra el globo en el tiempo que dura la observación.

2. En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

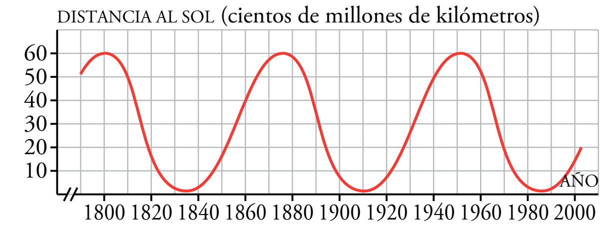
b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

3. La siguiente gráfica describe la distancia del cometa Halley al Sol a lo largo de los dos últimos siglos. Cada 76 años se puede ver desde la Tierra cuando más cerca está del Sol.

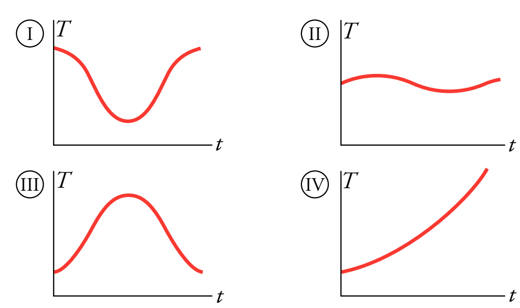


a) ¿Es una función periódica? ¿Qué periodo tiene?

b) ¿Cuándo, aproximadamente, fue la última vez que se dejó ver desde la Tierra? ¿En qué año se volverá a ver?

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los años 2000 a 2100. ¿A qué distancia del Sol, aproximadamente, estará en el 2016?

4. Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

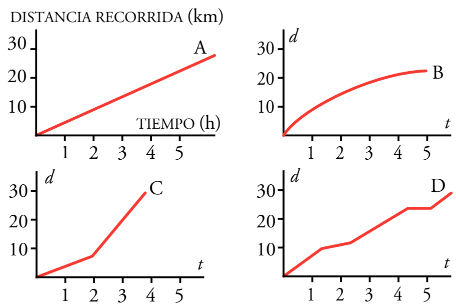
e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

5. Las siguientes gráficas nos muestran la marcha de cuatro montañeros:



a) Describe el ritmo de cada uno.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Invento una gráfica de un montañero que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

Resuelve problemas

6. Luis ha tardado 2 horas en llegar desde su casa a una ciudad situada a 150 km de distancia. Ha permanecido 2 horas en la ciudad y ha vuelto a su casa, invirtiendo 2 horas y media en el viaje de vuelta.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) Si suponemos que la velocidad es constante en el viaje de ida, ¿cuál sería esa velocidad?

c) Si también suponemos que la velocidad es constante en el viaje de vuelta, ¿a cuánto iba al volver?

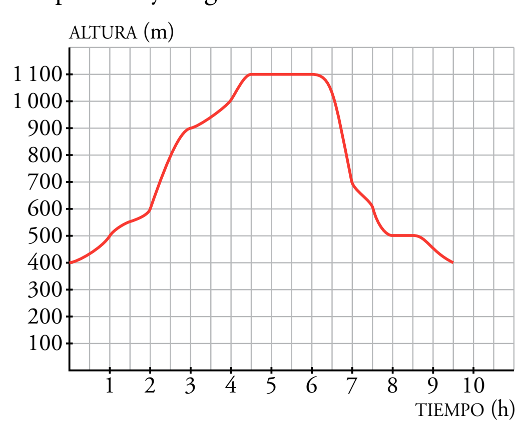
7. Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (La velocidad es constante en cada tramo).

Autoevaluación

1. Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión:



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

2. Una cisterna contiene 5 *l* de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua*.

b) Explica si la función es periódica.

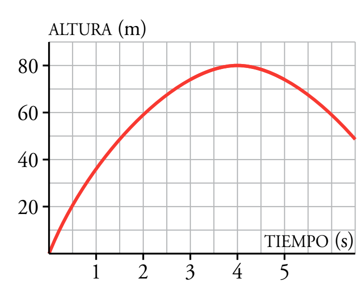
c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

3. Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?

Ⓐ $h = 8t - t^2$

Ⓑ $h = 40t - 5t^2$

Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

a) De forma aproximada, mirando la gráfica.

b) Utilizando la expresión algebraica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....