6 Ecuaciones

Tanteos iniciales

La búsqueda de métodos para resolver ecuaciones fue un empeño de los matemáticos de la Antigüedad. Los primeros intentos, como es natural, fueron titubeantes, poco sólidos: resoluciones por tanteo o mediante procedimientos solo válidos para casos particulares, pero no generalizables.

Por ejemplo, en un papiro egipcio de 1550 a. C. aparece resuelto el siguiente problema:

El montón más un séptimo del montón es igual a 24. ¿Cuántos hay en el montón?

Papiro de Ahmes (o Rhind). Fue escrito en el siglo XVI a. C. y contiene 84 problemas matemáticos.

Se inicia el camino teórico

El primero que lo afrontó de forma rigurosa fue el griego **Diofanto,** en el siglo III. En su libro *Aritmética* trató las resoluciones de ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Además, los problemas que propuso prepararon el terreno para consolidar la teoría de ecuaciones, que se desarrolló siglos más tarde.

En su obra aparecen problemas de este tipo:

Si al número de elefantes que beben en el río le sumo el número de colmillos y el número de patas, obtengo su cuadrado. ¿Cuántos elefantes son?

Avances significativos

En el siglo IX, en Bagdag aparece un personaje clave, el árabe **Al-Jwarizmi,** que dio otro importantísimo paso. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala* es un referente fundamental en la historia del álgebra. Fue estudiado y traducido a todos los idiomas en siglos posteriores. El título viene a ser "transposición y cancelación" y alude a los trasiegos que se realizan con los coeficientes para despejar la incógnita. El libro acabó siendo denominado, simplemente, *Al-yabr*, y este nombre finalmente designó la ciencia que contenía (al-jabr ~ álgebra).

Sello ruso en honor de Al-Jwarizmi.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Las ecuaciones y sus soluciones

Una **ecuación** es una igualdad en la que interviene alguna letra (**incógnita**) cuyo valor queremos conocer.

Solución de la ecuación es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

Por ejemplo, $2x^2 - \frac{10}{x} = 3$ es una ecuación.

El valor $x = 2$ es solución, porque $2 \cdot 2^2 - \frac{10}{x} = 3$.

Nomenclatura

Las expresiones que hay a ambos lados del signo = se llaman **miembros.** En la ecuación que ves a la derecha:

$2x^2 - \frac{10}{x}$ es el **primer miembro** y 3 es el **segundo miembro.**

Qué es resolver una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o sus soluciones) o averiguar que no tiene solución. Seguramente, conoces procedimientos para resolver metódicamente algunos tipos de ecuaciones. Pero si llegamos a la solución mediante cualquier otro camino, también es válida la resolución.

Por ejemplo, vamos a buscar, por tanteo, alguna solución de $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- ¿Será $x = 0$ solución? $0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \neq 0 \rightarrow$ NO
- ¿Y $x = 2$? $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow$ SÍ

Ejercicio resuelto

Resolver por tanteo estas ecuaciones: a) $x^x = 3\,125$ b) $x^6 = 1\,200$

a) Tanteando con enteros, encontramos la solución $x = 5$, pues $5^5 = 3\,125$.

b) Dando valores enteros a x, observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 4^6 = 4\,096 \end{array}\right\}$ x está entre 3 y 4. Es decir, $x = 3,\ldots$ Damos a x los valores 3,1; 3,2; 3,3; ... y observamos que:

$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 4^6 = 4\,096 \end{array}\right\}$ $x = 3,2\ldots$ Podemos decir que, aproximando hasta las décimas, la solución es $x = 3,2$.

Entrénate

1. Comprueba si alguno de los valores dados es solución de la ecuación correspondiente:

a) $3x + 11 = 38$; $x = 5$, $x = 9$

b) $5(x - 3) = 15$; $x = 6$, $x = -6$

c) $\sqrt{5x+1} = 6$; $x = 1$, $x = 7$

2. Halla, tanteando, alguna solución (busca números enteros) de estas ecuaciones:

a) $5(x^2 + 1) = 50$

b) $(x + 1)^2 = 9$

Piensa y practica

1. Comprueba, en cada caso, si cada uno de los dos valores es o no solución de la ecuación:

a) $x^3 - 20x = -16$; $x = 5$, $x = 4$

b) $\frac{12}{x} - \frac{x}{2} = 1$; $x = 4$, $x = 6$

c) $2^{x-1} = 512$; $x = 9$, $x = 10$

d) $x^x + 1 = 28$; $x = 3$, $x = 1$

e) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$; $x = 1$, $x = 6$

2. Tantea para hallar alguna solución de estas ecuaciones (todas ellas tienen solución entera):

a) $x^3 + x = 10$ b) $(x - 5)(x + 2) = 0$

c) $3^{x+1} = 81$ d) $x^x = 3\,125$

3. Tanteando con ayuda de la calculadora, encuentra una solución (aproximada hasta las décimas) de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 1 = 100$ b) $3^x = 1\,000$ c) $\sqrt{8x - 40} = 5$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Ecuaciones de primer grado

A las ecuaciones polinómicas de primer grado se las llama, simplemente, **ecuaciones de primer grado.** En ellas, la x solo aparece elevada a 1 $(x^1 = x)$.

- Son de primer grado: $4x + 7 = 8$; $\frac{2}{3}x - 2,5 = 9$; $\sqrt{3}x + 17 = 4 - 2x$
- No son de primer grado: $(6x + 5)^2 = 8$; $\frac{8}{x} = 5x + 3$; $\sqrt{6x} + 1 = 5x$

Las ecuaciones de primer grado tienen una única solución, que se obtiene despejando la incógnita.

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$

Solución ≡ raíz

La solución de una ecuación también se llama **raíz.**

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución o ambas carecen de solución. Así, las ecuaciones $5x - 9 = 51$ y $3x - 7 = 89 - 5x$ son equivalentes porque la solución de ambas es $x = 12$.

TRANSFORMACIONES QUE MANTIENEN LA EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas:

TRANSFORMACIÓN	REGLA PRÁCTICA
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

Pasos

pasa sumando

- $15x - \boxed{5} = \boxed{2x} + 4 \rightarrow$

pasa restando

$\rightarrow 15x - 2x = 4 + 5$

pasa dividiendo

- $\boxed{3}(x + 4) = 8 \rightarrow x + 4 = \frac{8}{3}$

ECUACIONES ANÓMALAS

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

  No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución.**

- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

  $0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x, pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones de primer grado.

Casos especiales

- **$0x = b$,** con $b \neq 0$

  La ecuación **no tiene solución.**

- **$0x = 0$**

  La ecuación **tiene infinitas soluciones.** Es una identidad.

En la web

Iniciación. Resuelve ecuaciones con denominadores muy sencillas.

54

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejemplo

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$$

$\boxed{1}$ mín.c.m. (20, 5, 15) = 60

Se multiplican por 60 los dos miembros.

$$3(3x-1)-24(x+3)=$$
$$=4(4x+2)-60\cdot 5$$

$\boxed{2}$

$$9x-3-24x-72=16x+8-300$$

$\boxed{3}$

$$9x-24x-16x=8-300+3+72$$

$\boxed{4}$

$$-31x=-217$$

$\boxed{5}$

$$x=\frac{-217}{-31}.\ \ \textit{Solución: } x=7$$

$\boxed{6}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3\cdot 7-1}{20}-\dfrac{2(7+3)}{5}=-3\\[2mm]\dfrac{4\cdot 7+2}{15}-5=2-5=-3\end{array}\right\}$$

Coinciden. La solución es correcta.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

Seguramente aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado sencillas el curso pasado. Ahora vamos a entrenarnos para resolver ecuaciones de primer grado algo más complejas.

Con frecuencia, las ecuaciones que tendremos que resolver presentan un aspecto complicado. Por ejemplo:

$$\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$$

Veamos qué pasos conviene dar para, poco a poco, ir despejando la x (en el margen puedes ver cómo hemos resuelto la ecuación del ejemplo siguiendo los pasos que ahora describimos):

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, su mínimo común múltiplo.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Esta secuencia no hay que tomarla como algo rígido, pues habrá ocasiones en que convenga empezar quitando paréntesis, simplificando… El entrenamiento y el sentido común te orientarán sobre cuándo conviene hacer una cosa u otra.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{15}-x=-\frac{3x}{3}+\frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{4x}{27}=\frac{11}{27}-\frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{8}+\frac{2x+2}{16}=\frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20}-\frac{5x}{2}=\frac{10+x}{5}+\frac{1-12x}{10}$

e) $3x-\frac{x+3}{4}=13$

f) $4-\frac{x+2}{4}=x-4$

g) $\frac{x}{2}-\frac{2(x+2)}{7}=\frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25}-\frac{x}{6}+\frac{x+7}{9}=\frac{2}{5}-\frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5}=\frac{2x+4}{25}+\frac{x^2}{5}+\frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8}+\frac{9-x}{12}-\frac{2x-7}{24}+5=x-8$

k) $x+\frac{9(5+x)}{5}=9-x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4}=\frac{3(4x^2+1)}{12}-x$

m) $(x-3)(x+3)=\frac{3(x-1)}{2}+x^2$

n) $\frac{x-7}{4}+\frac{25(x-2)}{3}=\frac{5x+35}{4}+\frac{5}{2}(x-7)$

55

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ecuaciones de segundo grado

En la web

- Ayuda al razonamiento. Obtención de la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado.
- Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$

Para despejar la x, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

Soluciones de una ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

Ejemplo

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

es una ecuación de segundo grado donde:

$$a = 3, \; b = -5, \; c = -2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$$

Por eso, esta ecuación tiene dos soluciones.

Número de soluciones

La expresión que está dentro de la raíz en las soluciones de una ecuación de segundo grado, $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay una solución: $x = \dfrac{-b}{2a}$. Se dice que es una **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Ejercicio resuelto

Resolver estas ecuaciones:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $3x^2 + 2x + 7 = 0$

a) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = -\dfrac{1}{2}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6}$ No tiene solución.

Piensa y practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Clasificación de ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes b o c son cero se llaman **incompletas:** $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Aunque pueden resolverse aplicando la fórmula general, es posible encontrar sus soluciones de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 75 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{75}{3} = 25 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- $7x^2 + 11x = 0 \;\rightarrow\; x(7x + 11) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 11 = 0 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{11}{7} \end{cases}$

Ten en cuenta

- Si $x^2 = 25$, entonces $x = \pm 5$, pues 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y –5.
- Para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea 0 alguno de ellos:

$$x \cdot (7x + 11) = 0$$

$x = 0$ o bien $7x + 11 = 0$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar x con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar la x como factor común e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \;\rightarrow\; \text{Soluciones: } x_1 = 0,\; x_2 = -\frac{b}{a}$$

En la web

- Practica las ecuaciones incompletas con $b = 0$.
- Practica las ecuaciones incompletas con $c = 0$.

Ejercicio resuelto

Resolver:

a) $2x^2 - 98 = 0$

b) $2x^2 + 98 = 0$

c) $5x^2 + 95x = 0$

a) $2x^2 - 98 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = 98 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{98}{2} = 49 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Las soluciones son $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

b) $2x^2 + 98 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 = -98 \;\rightarrow\; x^2 = -\dfrac{98}{2} = -49$

No tiene solución, porque el cuadrado de un número no puede ser negativo.

Es decir, $\sqrt{-49}$ no tiene sentido.

c) $5x^2 + 95x = 0 \;\rightarrow\; x(5x + 95) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 95 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = -\dfrac{95}{5} = -19 \end{cases}$

Piensa y practica

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $7x^2 - 28 = 0$ b) $7x^2 + 28 = 0$ c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$ f) $11x^2 - 37x = 0$ g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$ h) $7x^2 + 5 = 68$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Ten en cuenta

- $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ $\to$ Aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $\to$ Despeja x^2…
- $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ $\to$ Saca la x como factor común…

Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real, como veremos en la página 112.

  Si la ecuación de partida tiene la x en el denominador cuida no dar como solución ningún valor que anule a algún denominador. Si se diera este caso, hay que rechazar esa solución.

Ejercicios resueltos

1. ***Resolver la siguiente ecuación:***

$\boldsymbol{(2x-1)(3x-2) + (2x-3)^2 = 3(4x-4) - (x-2)^2 + 3}$

$(2x-1)(3x-2) + (2x-3)^2 = 3(4x-4) - (x-2)^2 + 3$

- Desarrollamos los cuadrados y realizamos los productos:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x - 12 - (x^2 - 4x + 4) + 3$$

- Quitamos paréntesis:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x - 12 - x^2 + 4x - 4 + 3$$

- Agrupamos los términos pasándolos todos previamente al primer miembro de la ecuación:

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 + 4x^2 - 12x + 9 - 12x + 12 + x^2 - 4x + 4 - 3 = 0 \to$$
$$\to 6x^2 + 4x^2 + x^2 - 4x - 3x - 12x - 12x - 4x + 2 + 9 + 12 + 4 - 3 = 0 \to$$
$$\to 11x^2 - 35x + 24 = 0$$

- Aplicamos la fórmula teniendo en cuenta que $a = 11,\ b = -35,\ c = 24$:

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 24}}{2 \cdot 11} = \frac{35 \pm \sqrt{169}}{22} = \frac{35 \pm 13}{22} \begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{11} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

- Comprobamos que tanto para $x = \dfrac{24}{11}$ como para $x = 1$, el valor que toma el primer miembro de la ecuación inicial coincide con el valor que toma el segundo miembro.

Piensa y practica

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 2(x+5) = (x+3)^2 - 19$

b) $(3x+4)(5x-7) = (2x+7)^2 + 53$

c) $(2x+4)(x-1) + (3x+5)^2 = 3(2x+5)^2 + x$

d) $(x-2)(4x+2) + (3-3x)^2 = 4(5x+1)^2 - (x-1)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Resolución de problemas con ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

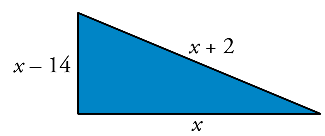
Observación

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que así se simplifica la tarea de traducir un enunciado a ecuaciones.

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Problemas resueltos

1. ***En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcular la longitud de los tres lados.***



Para relacionar las tres longitudes, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(x-14)^2 + x^2 = (x+2)^2$$

Desarrollamos: $x^2 - 28x + 196 + x^2 = x^2 + 4x + 4$

Simplificamos: $x^2 - 32x + 192 = 0$

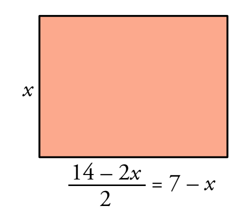
Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 192}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{32 \pm 16}{2} \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

- $x_1 = 24$. *Solución:* los lados miden 10 cm, 24 cm y 26 cm.
- $x_2 = 8$. *No es solución* válida, porque uno de los lados tendría una medida negativa.

2. ***Con 14 m de listones puedo colocar el rodapié a lo largo de toda una habitación rectangular. ¿Qué dimensiones tiene la habitación sabiendo que su superficie es de 12 m²?***

Tenemos una habitación rectangular cuyo perímetro es de 14 m. Sus dimensiones serán, por tanto, las que se indican en la figura:



La habitación tiene una superficie de 12 m², por tanto:

$$x \cdot (7-x) = 12 \rightarrow 7x - x^2 = 12 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

- $x_1 = 4$. *Solución:* los lados miden 4 m y 3 m.
- $x_2 = 3$. *Solución:* los lados miden 3 m y 4 m; es decir, es la misma solución.

Piensa y practica

1. La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm². Calcula las dimensiones de este rectángulo.

2. Al aumentar 10 m de radio, una finca circular aumenta unos 3 456 m² de superficie. ¿Qué diámetro tiene la finca ampliada?

En la web Refuerza la resolución de problemas mediante ecuaciones.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x - 3}{5} = \frac{x + 1}{3} - 2$

b) $1 = \frac{x + 3}{3} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x + 4}{5} = \frac{x + 2}{2}$

d) $\frac{5x - 16}{6} = -\frac{x + 8}{12} + \frac{x + 1}{3}$

e) $\frac{2x - 4}{3} = 3 - \frac{4 + x}{2}$

3. Resuelve y comprueba la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x + 2}{2} - \frac{x + 3}{3} = -\frac{x - 4}{4} + \frac{x - 5}{5}$

b) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$

c) $\frac{x + 5}{5} - \frac{x + 5}{24} = \frac{x + 6}{10} + \frac{x + 4}{60}$

d) $2x - \frac{1}{2}(1 + 3x) - \frac{3}{5}(x - 2) = \frac{1}{4}(3 - x)$

4. Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución y otras tienen infinitas soluciones. Resuélvelas y comprueba los resultados.

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2)$

b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x)$

c) $\frac{3x + 1}{2} = 2x - \frac{1 - x}{2}$

d) $x + \frac{2x - 7}{4} = 2x + \frac{x - 1}{2}$

5. Solo una de las siguientes ecuaciones tiene solución única. Resuélvelas y compruébalo.

a) $\frac{x + 1}{2} = 2 + \frac{2x - 3}{4}$

b) $\frac{4x - 3}{12} - \frac{2x + 1}{4} = \frac{x - 1}{3} - \frac{3x + 1}{6}$

c) $\frac{1 + x}{3} - \frac{x + 3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4 + x}{2}$

d) $\frac{(x + 1)^2}{16} - \frac{1 + x}{2} = \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{2 + x}{4}$

6. Resuelve.

a) $\frac{2}{3}(x - 3) + \frac{1}{5}(x - 5) = \frac{3}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{4x}{15}$

b) $2x - \frac{1}{2}(1 + 3x) = \frac{3}{5}(x - 2) + \frac{1}{4}(3 - x)$

c) $\frac{4}{3}(2 - x) - \frac{3}{4}(2x - 1) = 4x - 7\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}$

d) $x(8x - 1) - (3x - 4)^2 = x(7 - x) - 2(x - 4)$

7. Resuelve.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x + 1)(x - 3) = (x + 1)(x - 1) - 8$

b) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

c) $(2x + 1)^2 = 4 + (x + 2)(x - 2)$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{(5x - 4)(5x + 4)}{4} = \frac{(3x - 1)^2 - 9}{2}$

b) $\frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$

c) $\frac{(x - 1)(x + 2)}{12} - \frac{(x + 1)(x - 2)}{6} - 1 = \frac{x - 3}{3}$

d) $\frac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x + 1}{5} = 0$

e) $\frac{x + 1}{2} - \frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{x + 2}{3} + \frac{(x - 2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{3} + \frac{4-x^2}{2x}$

d) $\frac{15}{x} = \frac{72-6x}{2x^2} + 2$

Aplica lo aprendido

11. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al quíntuple del menor menos 11. ¿Cuáles son esos números?

12. Calcula un número tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los 9/5 de ese número.

13. Halla tres números impares consecutivos tales que su suma sea 117.

Cualquier número impar se puede escribir de la forma $2x + 1$.

14. He pagado 14,30 € por un bolígrafo, un cuaderno y una carpeta. Si el precio de la carpeta es 5 veces el del cuaderno y este cuesta el doble que el bolígrafo, ¿cuál es el precio de cada artículo?

15. Calcula la altura de un árbol que es un metro más corto que un poste que mide el doble que el árbol.

16. El precio de unos zapatos ha subido un 15 % en diciembre y ha bajado un 20 % en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

17. Con 3,50 € más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25 €. ¿Cuánto dinero tengo?

18. Si al cuadrado de un número le restamos su triple obtenemos 130. ¿Cuál es el número?

19. Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

20. Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31 obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?

Autoevaluación

1. Resuelve.

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{3(x+1)}{10} = \frac{3-x}{4} - \frac{9}{10}$

b) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$

c) $\frac{x}{2} + 1 - \frac{3+x}{3} = \frac{x}{6}$

2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{5}{2}x^2 - 2x = 0$

b) $4x^2 + 25 = 0$

c) $(x+3)(x-3) - 25x = 9x - 298$

c) $\frac{(x-2)(x-3)}{6} - \frac{(x-1)^2}{4} = 2 - x$

3. Mezclamos 6 kg de harina de 1,30 €/kg con otra de 0,70 €/kg para obtener una mezcla de 1,10 €/kg.

¿Qué cantidad tenemos que poner del segundo tipo de harina?

4. Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m.

¿Cuánto medirán el otro cateto y la hipotenusa?

5. Para embaldosar un salón de 48 m^2 de área se han utilizado 375 baldosas rectangulares en las que un lado mide 8 cm menos que el otro.

Halla las dimensiones de las baldosas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....