5 El lenguaje algebraico

Primeros pasos, "álgebra retórica"

Los problemas algebraicos están presentes en todas las antiguas civilizaciones, casi siempre ligados a lo práctico: repartos, herencias, cálculo de superficies…

Los antiguos mesopotámicos y egipcios practicaban un álgebra "retórica", utilizando el lenguaje natural: "Si saco la tercera parte del trigo que hay en el montón, y…".

Agrimensores egipcios. Pinturas de las tumbas de Mena y Najt en Luxor (Egipto).

Primeros símbolos, "álgebra sincopada"

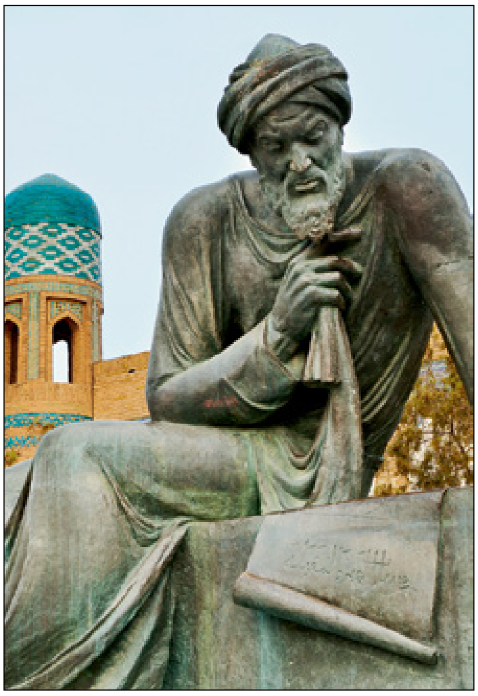
La evolución del álgebra se refleja en la mejora del simbolismo y en la sistematización de las técnicas para resolver ecuaciones.

En el siglo III, **Diofanto de Alejandría** inventó una notación simbólica que, aunque rudimentaria, supuso un importante progreso ("álgebra sincopada").

Los árabes y "el arte de la cosa"

En el siglo IX, **Al-Jwarizmi** escribió un manual que tuvo una gran influencia en todo el mundo civilizado, incluso siglos después.

Llamaba a la incógnita *la cosa*, nomenclatura que pasó a Europa, donde al álgebra se la llegó a denominar "el arte de la cosa".



Estatua de Al-Jwarizmi en Jiva (Uzbequistán).

… Y llegó el "álgebra simbólica"

El desarrollo del álgebra en Europa no fue uniforme.

Son de destacar los algebristas italianos del siglo XVI.

El álgebra, como lenguaje de símbolos, tal como la conocemos hoy, terminó de evolucionar con los estudios de los franceses **Vieta** (finales del siglo XVI) y **Descartes** (siglo XVII).

Vieta (1540-1603).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Expresiones algebraicas

Etimología

Monomio y **polinomio:** vienen del griego:

mono significa *uno*.

poli significa *muchos*.

nomos significa *partes*.

Identidad: viene del latín *idem*, que significa *lo mismo*.

Ecuación: viene del latín *aequare*, que significa *igualar*.

Trabajar en álgebra consite en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades desconocidas se llaman **variables** o **incógnitas** y se representan por letras.

Al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema, se obtienen **expresiones algebraicas.**

Hay expresiones algebraicas de muy distinto tipo:

- **Monomios:** $7x^3$, $-\frac{3}{2}x$, $4\pi r^2$ (superficie de la esfera)
- **Polinomios:** $5x^3 + x^2 - 11$, $2\pi r h + 2\pi r^2$ (área total del cilindro)

Algunas expresiones algebraicas contienen el signo “=”:

- **Identidades:** $5(x + 4) = 5x + 20$. La segunda parte de la igualdad se consigue operando en la primera.
- **Ecuaciones:** $5(x + 4) = x + 44$. La igualdad solo es cierta para algún valor de la incógnita x. En este caso, para $x = 6$.

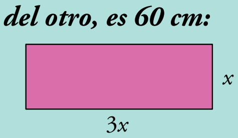
Ejercicio resuelto

Expresar algebraicamente:

a) ***El triple de un número menos cuatro unidades.***

b) ***El triple del resultado de restarle cuatro unidades a un número.***

c) ***El perímetro de un rectángulo, uno de cuyos lados es triple del otro, es 60 cm:***



d) ***Si gasto 3/5 de lo que tengo y, además 90 €, me quedaré con la tercera parte de lo que tengo.***

a) $3x - 4$. Es un polinomio.

b) $3(x - 4)$. Es un polinomio.

c) $x + 3x + x + 3x = 60$. Es una ecuación cuya solución es $x = 7{,}5$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 7,5 cm × 22,5 cm.

d) Vamos a obtener razonadamente la expresión algebraica a la que da lugar este enunciado:

TENGO	GASTO	ME QUEDA	RELACIÓN OBTENIDA
x	$\frac{3}{5}x + 90$	$x - \left(\frac{3}{5}x + 90\right)$	$x - \left(\frac{3}{5}x + 90\right) = \frac{1}{3}x$

↑ MONOMIO — POLINOMIOS — ↑ ECUACIÓN

La solución de esta ecuación es $x = 1\,350$.

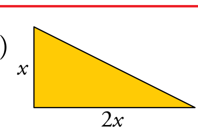
Por tanto, el dinero que tengo es 1 350 €.

Piensa y practica

1. Describe mediante una expresión algebraica cada uno de los enunciados siguientes:

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) 

El área de este triángulo es 36 cm^2.

d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Monomios

Monomio es el producto de un número por una o varias letras (variables).

En un monomio, *las letras* (**parte literal**) *representan números* de valor desconocido o indeterminado. Por eso conservan todas las propiedades de los números y sus operaciones.

- El **coeficiente** de un monomio es el número que multiplica a la parte literal.
- Se llama **grado** de un monomio al número total de factores que forman su parte literal.

  Los números son monomios de grado cero, pues $x^0 = 1$.
- Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Ejemplos

- Estas expresiones son monomios:

  $$7a^2, \quad \frac{4}{5}xy^2, \quad (5+\sqrt{2})x^5$$

  Sus coeficientes respectivos son:

  $$7, \quad \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad 5+\sqrt{2}$$
- El grado de $7a^2 = 7(a \cdot a)$ es 2.

  El de $\frac{4}{5}xy^2 = \frac{4}{5}(x \cdot y \cdot y)$ es 3.
- $9 = 9x^0$ es un monomio de grado cero.
- $5abx^2$ y $-7abx^2$ son semejantes.

Operaciones con monomios

- La **suma** de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^5 = 18x^5$

  Si dos monomios no son semejantes, su suma no se puede simplificar y hay que dejarla indicada. Entonces, el resultado ya no es un monomio.

  Por ejemplo: $7x^5 + 11x^3$ no admite simplificación.
- La **resta** es un caso particular de la suma.

  Por ejemplo: $3abx^2 - 8abx^2 = -5abx^2$
- El **producto** de dos o más monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

  Por ejemplo: $(3x^2ab) \cdot (5xac) = 15x^3a^2bc$
- El **cociente** de dos monomios es el resultado de dividir sus coeficientes y sus partes literales. Puede ser monomio y puede no serlo.

  Por ejemplo, $\frac{3x^5y}{6x^2y} = \frac{1}{2}x^3$ es un monomio, pero $\frac{3x^5y}{6x^2y^4} = \frac{x^3}{2y^3}$ no es un monomio.

Piensa y practica

1. ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$ b) $11xy^2$ c) -12

2. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$

d) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

3. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ b) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ d) $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

4. Simplifica cada uno de los siguientes cocientes entre monomios:

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

45

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Polinomios

Ejemplos

- Son polinomios:
  $3x^2y + 5x^3 - 8$
  $2x^2 + 6x^2 - 5x + 1$
- Simplificación:
  $5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 \rightarrow$
  $\rightarrow x^4 + 3x^2 + 1$
- El grado de $3x^2y + 5x - 8y^2$ es 3, pues es el grado de $3x^2y$.
- Simplificar antes de asignar el grado a un polinomio:
  $7x^3 + 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 =$
  $= 5x^2 - 2x \rightarrow$ Su grado es 2.

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.**

Un monomio puede ser considerado polinomio con un solo término.

- Si en un polinomio hay monomios semejantes, conviene operar, simplificar la expresión y obtener el polinomio en su **forma reducida.**
- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio se ha puesto en su forma reducida.

  Es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan.
- El **valor numérico** de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a. Por ejemplo, el valor de $2x^3 - 5x^2 + 7$ para $x = 2$ es $2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 7 = 3$.
- Si el valor numérico de un polinomio para $x = a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

Definición

Se llama **opuesto** de un polinomio al que resulta de cambiar de signo todos sus términos.

$$P = x^3 + 2x^2 - 11$$

Opuesto de P:

$-(x^3 + 2x^2 - 11) = -x^3 - 2x^2 + 11$

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y sumamos los monomios semejantes. Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo. Por ejemplo, sean $A = 6x^2 - 4x + 1$ y $B = x^3 + 2x^2 - 11$:

$$\begin{array}{rcrrrr} A & \rightarrow & & 6x^2 & -\,4x & +\;1 \\ +\,B & \rightarrow & x^3 & +\,2x^2 & & -\,11 \\ \hline A+B & \rightarrow & x^3 & +\,8x^2 & -\,4x & -\,10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrrrr} A & \rightarrow & & 6x^2 & -\,4x & +\;1 \\ -\,B & \rightarrow & -x^3 & -\,2x^2 & & +\,11 \\ \hline A-B & \rightarrow & -x^3 & +\,4x^2 & -\,4x & +\,12 \end{array}$$

En la web

Ayuda para calcular sumas y restas de polinomios.

En la web

Grado, términos y coeficientes de un polinomio.

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los resultados. Por ejemplo:

$$(3x^2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 1) = 3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 2x^2 - 3x^2 \cdot 1 = 3x^5 - 6x^4 - 3x^2$$

Piensa y practica

1. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

2. Sean $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

3. Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$ b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

c) $-2(-3x^3 - x)$ d) $5(x^2 + x - 1)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$ f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$ h) $8x^2(x^2 + 3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$ j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

En la web
- Practica la suma de polinomios.
- Practica la resta de polinomios.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 5x^3 - 2x^2 - 1$, $Q = 6x - 3$

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 5x^3 & -2x^2 & & -1 & \longleftarrow P \\
 & & & 6x & -3 & \longleftarrow Q \\
\hline
 & -15x^3 & +6x^2 & & +3 & \longleftarrow \text{producto de } -3 \text{ por } P \\
30x^4 & -12x^3 & & -6x & & \longleftarrow \text{producto de } 6x \text{ por } P \\
\hline
30x^4 & -27x^3 & +6x^2 & -6x & +3 & \longleftarrow P \cdot Q
\end{array}$$

Cuando hay pocos términos, no hace falta utilizar el método anterior, podemos realizar el producto directamente:

$$(2x^2 - 1)\,(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

Ten en cuenta

Esta forma de disponer los cálculos permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

En la web

Ayuda para calcular productos de polinomios.

Productos notables

Se suelen llamar así a las tres igualdades siguientes:

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

Estas igualdades ya las conocías, pero las seguirás utilizando con frecuencia, por lo que es necesario que las manejes con soltura.

Por ejemplo:

$$(5x - 3)^2 = (5x)^2 + 3^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 = 25x^2 + 9 - 30x$$

$$(4x - 3) \cdot (4x + 3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$$

En la web

Ayuda para manejar las identidades notables.

En la web

Justificación geométrica de las identidades notables.

Piensa y practica

4. Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

5. Opera y simplifica la expresión resultante.

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

6. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ b) $(2x - 5)^2$

c) $(1 - 6x)^2$ d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

e) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ f) $(ax + b)^2$

7. Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ d) $(ax + b)(ax - b)$

En la web

- Practica el producto de polinomios.
- Practica con las identidades notables.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Identidades

La igualdad $2x + 5x = 7x$ es una identidad porque es cierta cualquiera que sea el valor de x.

Conoces muchas identidades. Aquí tienes algunas:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Los llamados **productos notables** son, también, identidades.

Todas ellas son consecuencia de propiedades aritméticas o simples traducciones de estas.

Una **identidad** es una **igualdad algebraica** que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen.

Utilidad de las identidades

Las identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más cómoda de manejar. Por ejemplo:

$$(x + 5)^2 - (x - 3)^2 \overset{(1)}{=} (x^2 + 25 + 10x) - (x^2 + 9 - 6x) \overset{(2)}{=}$$
$$= x^2 + 25 + 10x - x^2 - 9 + 6x \overset{(3)}{=}$$
$$= 16x + 16 \overset{(4)}{=} 16(x + 1)$$

Cada una de las cuatro igualdades es una identidad.

La expresión final, $16(x + 1)$, es más sencilla y cómoda de manejar que la inicial, pero es **idéntica** a ella. Por eso, podemos sustituir la primera expresión por la última, y el cambio es ventajoso.

Aclaraciones

(1) Se han desarrollado el cuadrado de una suma y el de una diferencia.

(2) Un paréntesis precedido del signo menos obliga a cambiar de signo a todos sus términos.

(3) Se reducen términos semejantes.

(4) Se saca 16 como factor común.

Piensa y practica

1. De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $a + a + a = 3a$ b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$

c) $x^2 \cdot x = 27$ d) $a + a + a = 15$

e) $x \cdot x \cdot x = x^3$ f) $a + 5 + a = 2a + 5$

g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$

h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

2. Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:

a) $\dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$ b) $5a - 4 + a - \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b = [?]$

d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 = [?]$

3. Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \rightarrow 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \rightarrow x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \rightarrow x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \rightarrow 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \rightarrow 4ab$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Ayuda para sacar factor común.

No lo olvides

Cuando un sumando coincide con el factor común, ten en cuenta que está multiplicado por 1.

$xy + x^2 + x = x(y + x + 1)$

Sacar factor común

En la expresión

$$3xy + 6x^2z + 9xyz$$

la x y el 3 están multiplicando en todos los sumandos. Son factores comunes a todos ellos. Podemos sacarlos fuera, del siguiente modo:

$$3xy + 6x^2z + 9xyz = 3x \cdot y + 3x \cdot 2xz + 3x \cdot 3yz = 3x(y + 2xz + 3yz)$$

A esta transformación se le llama **sacar factor común.** Se utiliza para simplificar expresiones y para resolver algunas ecuaciones que aparecerán más adelante.

Comprueba que si quitaras el paréntesis en la expresión final, volverías a obtener la inicial.

Piensa y practica

En la web Refuerza cómo sacar factor común.

4. Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

h) $\frac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \frac{4}{3}(2x^2 + 1)$

5. Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.

a) $4x^2 - 25$ b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $x^2 + 2x + 1$ d) $9x^2 + 6x + 1$

e) $4x^2 + 25 - 20x$ f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$ h) $\frac{(x^3)^2}{25} + \frac{x^3}{5} + \frac{1}{4}$

i) $16x^4 - 9$ j) $\frac{x^6}{100} + \frac{8x^3}{5} + 64$

6. Completa estas igualdades para que sean identidades:

a) $x^2 - \dots + 1 = (x - \dots)^2$

b) $4x^2 + \dots + 36 = (\dots + 6)^2$

c) $9x^2 - \dots = (3x + \dots)(\dots - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + \dots = (x + \dots)^2$

7. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$

d) $(5x - 4)(2x + 3) - 5$

e) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$

f) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

8. Asocia cada expresión de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:

$12x^3 - 8x^5 + 4x^2y^2 - \frac{4}{3}x^2$	$2(x - 2)$
$(x^2 - 1) + (x^2 - 2x + 1) - (4x - 4)$	$3x$
$6(x^2 - 4x + 4) - (2x^2 - 8) + (30x - 60)$	$x - 1$
$9x^2 - 18xy^2 - 6xyz + 6x$	$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

9. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ por 8

b) $x + \frac{2x - 3}{9} + \frac{x - 1}{3} - \frac{12x + 4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x - 4)^2}{8} - \frac{x(x + 1)}{2} - 5$ por 8

d) $\frac{3(x + 2)}{4} + \frac{3x + 5}{2} - \frac{5(4x + 1)}{6} + \frac{25}{12}$ por 12

e) $\frac{x - 1}{4} + 36 - \frac{x + 7}{6} - \left(\frac{4x + 7}{9} + 11\right)$ por 36

f) $\frac{(x + 2)^2}{5} - \frac{x^2 - 9}{4} + \frac{(x + 3)^2}{2} + \frac{1}{5}$ por 20

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1. Expresa en lenguaje algebraico con una sola incógnita.

a) El doble de un número más su cuadrado.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad de un número aumentado en 3.

d) Un múltiplo de 3 menos 7.

2. Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.

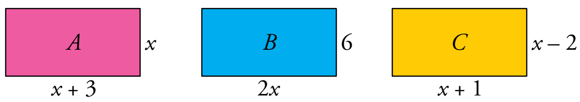
b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La suma de las edades de un padre y su hijo hace 5 años.

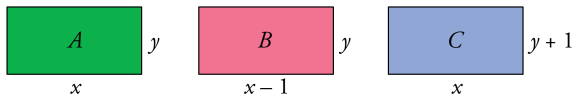
3. Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C:

a) $12x$ b) $4x - 2$ c) $4x + 6$

d) $4x + 12$ e) $x^2 + 3x$ f) $x^2 - x - 2$



4. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



Monomios y polinomios. Operaciones

5. Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$ b) $(-7x)^3$ c) $8x$ d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{4}{5}x^3$ g) $\frac{-3yx}{5}$ h) $\frac{1}{2}x$

6. Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

7. Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

8. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(6x^2)(-3x)$

b) $(2xy^2)(4x^2y)$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$

d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

9. Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

10. Considera estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

11. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:

a) $\frac{3 + x}{8} - \frac{5 - x}{6} - \frac{x + 1}{12}$

b) $\frac{3}{4}(x - 1) - \frac{1}{3}(x + 1) + \frac{1}{6}$

c) $\frac{3x - 3}{5} - \frac{x + 1}{3} + \frac{1}{2}$

Igualdades notables

12. Desarrolla estas expresiones:

a) $(x + 6)^2$ b) $(7 - x)^2$

c) $(3x - 2)^2$ d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x - 2y)^2$ f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

13. Expresa como diferencia de cuadrados.

a) $(x+7)(x-7)$

b) $(3+x)(3-x)$

c) $(3+4x)(3-4x)$

d) $(x^2+1)(x^2-1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

f) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$

14. Extrae factor común.

a) $12x^3-8x^2-4x$ b) $-3x^3+x-x^2$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2$ d) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

- $x^2+25+10x=x^2+5^2+2\cdot 5x=(x+5)^2$

a) $x^2+49-14x$ b) x^2+1-2x

c) $4x^2+1+4x$ d) $x^2+12x+36$

16. Transforma en producto.

a) $4x^2-49$ b) $x^2-18x+81$

c) $9x^2+12x+4$ d) $121-100x^2$

17. Reduce las siguientes expresiones:

a) $18\left[\frac{(2x-5)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{6}\right]$

b) $8\left[\frac{x(x-3)}{2}+\frac{x(x+2)}{4}-\frac{(3x+2)^2}{8}\right]$

c) $30\left[\frac{x(x-2)}{15}-\frac{(x+1)^2}{6}+\frac{1}{2}\right]$

18. Extrae factor común, igual que se ha hecho en el ejemplo.

- $3x(x+1)-x^2(x+1)+(x+1)(x^2-2)=$
$=(x+1)(3x-x^2+x^2-2)=(x+1)(3x-2)$

a) $2x(x-2)+x^2(x-2)-3(x-2)$

b) $x^2(x+1)-x^2(x+2)+2x^2(x-3)$

c) $3x^2(x+3)-6x(x+3)$

Autoevaluación

1. Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:

a) El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.

b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

c) El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

2. Efectúa y reduce:

a) $x(3x-2)^2-(x-3)(2x-1)x$

b) $4\left[(x-2)^2-\frac{3}{4}x^2-4\right]$

3. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{5(x-1)}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x(x-1)}{2}$$

4. Transforma en productos los polinomios siguientes:

a) $4x^2-12x+9$

b) $4x^2-9$

5. ¿Verdadero o falso?

Justifica y pon ejemplos.

a) La expresión $9x^3-15x^2=3x^2(3x-5)$ es una identidad.

b) Si multiplicamos dos binomios de grados 1 y 2, se obtiene un polinomio de grado 3.

c) Si sumamos dos binomios, se obtiene siempre un binomio.

d) Los números son monomios.

e) Los monomios $3a^2b$ y $-3ab^2$ son semejantes.

f) Al realizar la división $3x^2y^2 : 6xy^2$ se obtiene un monomio.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....