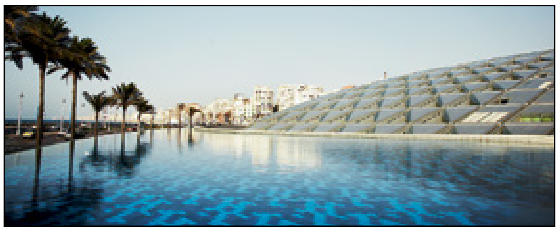
4 Progresiones

Progresiones geométricas en el siglo III a. C.

Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides** (siglo III a. C.). Fue el fundador de la escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Los elementos*. Se compone de 13 libros, cuatro de ellos dedicados a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas, aunque con nomenclatura muy diferente a la que usamos ahora.



Moderna Biblioteca de Alejandría (Egipto).

Euclides rodeado de discípulos en el cuadro "La escuela de Atenas" de Rafael Sanzio.

Y las aritméticas, en el siglo I

En el siglo I **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no había tratado Euclides cuatrocientos años antes.

Una sucesión muy famosa

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

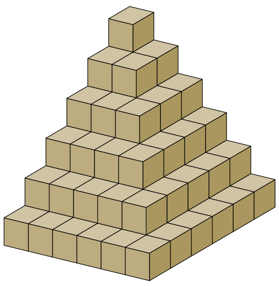
1 1 2 3 5 8 13 21 34 …

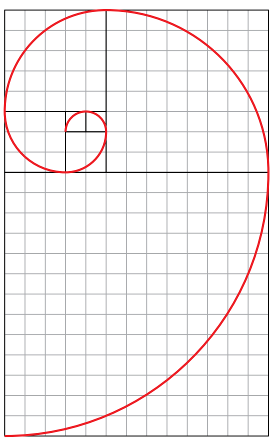
Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: Fibonacci), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: "¿Cuántas parejas de conejos se producirán a lo largo de un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes?".

Torre de Pisa (Italia).

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Sucesiones





¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

Las *sucesiones* son conjuntos de números dados ordenadamente. Por ejemplo:

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

f) 1, 2, 4, 7, 11, 16, …

g) 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

h) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …

i) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, …

Cada una de las sucesiones anteriores se construye siguiendo un cierto criterio. Algunos son evidentes:

— Se pasa de un término a otro sumando (o multiplicando por) siempre la misma cantidad.

— Cada término es el cuadrado del lugar en que se encuentra.

Otros son menos evidentes:

— Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

— Alternativamente, sumamos o multiplicamos por un mismo número.

A los elementos de la sucesión los llamamos *términos*. Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término… de una sucesión s, pero es más cómodo llamarlos $s_1, s_2, s_3, \ldots$

Así, por ejemplo, para indicar que en la primera sucesión la diferencia de cada término al anterior es 4, podemos escribir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = 4$$

En la web

Refuerza el concepto de sucesión.

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ \ldots$$

Piensa y practica

1. Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

2. Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.

3. Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \ldots$ entre cada dos términos consecutivos de la sucesión c) de arriba.

4. Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Término general de una sucesión

A veces, podemos encontrar una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que este ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión a) 1, 5, 9, 13, 17, … de la página anterior, encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, …, obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$a_n = 4n - 3$ es el *término general* de esta sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión s (y se simboliza con s_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $s_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Las sucesiones que habitualmente manejaremos en este curso estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente.**

En la web
Refuerza el concepto de término general de una sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, cada término es la suma de los dos anteriores. Se define así: $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$.

Piensa y practica

5. Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.

6. Escribe los cinco primeros términos de:

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

7. Forma una sucesión recurrente con estos datos:

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

8. Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.

9. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ b) $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n = (n-1)(n-2)$ d) $d_n = n^2 - n$

10. Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

11. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).

12. a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$a_n \rightarrow$ 1, –1, 1, –1, 1, –1, …

$b_n \rightarrow$ 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Progresiones aritméticas

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 $\boxed{+}\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

b) 20 $\boxed{+}\boxed{+}$ 120 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

c) 2 $\boxed{+/-}\boxed{+}\boxed{+}$ 9 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

d) 0,04 $\boxed{+}\boxed{+}$ 5,83 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 $\boxed{=}\boxed{\text{Ans}}\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

b) 120 $\boxed{=}\boxed{\text{Ans}}\boxed{+}$ 20 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

c) 9 $\boxed{=}\boxed{\text{Ans}}\boxed{+}\boxed{(-)}$ 2 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

d) 5,83 $\boxed{=}\boxed{\text{Ans}}\boxed{+}$ 0,04 $\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ …

Observa las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, …

d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …

A estas sucesiones se las llama *progresiones aritméticas*.

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia. Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término 100?

— Para pasar del a_1 al a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

— Cada paso supone aumentar 3 unidades.

— Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.

— Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

Observa

Una progresión aritmética cuyo primer término es a y cuya diferencia es d, se puede definir de forma recurrente así:

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d$$

El **término general** a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Para obtener esta expresión basta tener en cuenta que para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d.

Piensa y practica

En la web Refuerza el concepto de progresión aritmética.

1. El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = -3$.

2. Calcula, para las progresiones de arriba:

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1\,000}$$

3. Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).

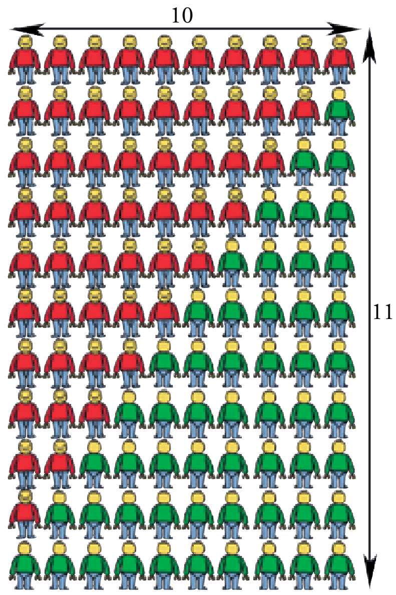
4. a) Si dos términos de una progresión aritmética s son:

$$s_1 = 6 \ \text{ y } \ s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Veamos cómo obtenemos la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$:

$$\begin{array}{rl} & S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ + & S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 2S_{10} = \underbrace{11 + 11 + 11 + \ldots + 11 + 11}_{10 \text{ veces}} \end{array}$$

$$2S_{10} = 10 \cdot 11 \;\rightarrow\; S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Esta forma simplificada de proceder se debe a la siguiente propiedad:

> En una progresión aritmética de n términos, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es siempre la misma.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \quad \ldots \quad a_{n-2} \xleftarrow{-d} a_{n-1} \xleftarrow{-d} a_n$$

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{array}\right\} a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n; \qquad \left.\begin{array}{r} a_3 = a_1 + 2d \\ a_{n-2} = a_n - 2d \end{array}\right\} a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

Basándonos en esta propiedad y utilizando el mismo procedimiento, podemos obtener la fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

$$\begin{array}{rl} \text{Suma} \rightarrow & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \left.\begin{array}{r}\text{Suma}\\ \text{invertida}\end{array}\right\} \rightarrow & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (\;\;) + (\;\;) + \ldots + (\;\;) + (\;\;) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Hay n paréntesis y el resultado de cada uno de ellos es $a_1 + a_n$. Por tanto:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \;\rightarrow\; S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

En la web

Actividades para reforzar el cálculo de la suma de los términos de una progresión aritmética.

> La **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Piensa y practica

5. Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

6. a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

7. Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

8. Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Progresiones geométricas

Con calculadora

Añade dos términos a cada una de las progresiones a), b) y c) que aparecen a la derecha.

Obtén nuevamente, con la calculadora, las tres progresiones geométricas usando el **factor constante.**

Por ejemplo, para a):

2 [×] [×] 3 [=] [=] [=] [=] [=] …
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48 96

O bien, con la calculadora de pantalla descriptiva:

3 [=] [Ans] [×] 2 [=] [=] [=] [=] …
↓ ↓ ↓ ↓
6 12 24 48

Observa las siguientes sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

c) 80; –40; 20; –10; 5; –2,5; … Su razón es $-\frac{1}{2} = -0{,}5$.

> Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado **razón.**

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón. Por ejemplo, en la progresión a), el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. ¿Cómo hallaríamos el término 25?

— Para pasar del a_1 al a_{25}, hemos de dar 24 pasos.

— Cada paso supone multiplicar por 2. Por tanto, para pasar del a_1 al a_{25} habremos de multiplicar veinticuatro veces por 2; es decir, por 2^{24}.

— Así, $a_{25} = 3 \cdot 2^{24} = 3 \cdot 16\,777\,216 = 50\,331\,648$.

> El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando del siguiente modo:
>
> Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por r. Por tanto:
>
> $$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Problemas resueltos

1. ***Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 250$ y $a_2 = 300$. Calcular r, a_6 y a_n.***

$a_2 = a_1 \cdot r \;\rightarrow\; 300 = 250 \cdot r \;\rightarrow\; r = \frac{300}{250} = 1{,}2$

$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 250 \cdot (1{,}2)^5 = 622{,}08$

Término general: $a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$

Entrénate

1. Asocia cada una de las progresiones geométricas I, II y III con su término general:

I) 125, 50, 20, …

II) 1 000, 800, 640, …

III) 1 000; 160; 25,6; …

$a_n = 1\,000 \cdot (0{,}16)^{n-1}$

$b_n = 125 \cdot (0{,}4)^{n-1}$

$c_n = 1\,000 \cdot (0{,}8)^{n-1}$

2. Halla el término general de estas progresiones geométricas:

a) $a_1 = 4$, $r = 3$

b) $b_1 = 3$, $r = -2$

c) $c_1 = 5$, $r = 5$

d) $d_1 = -2$, $r = 1/3$

Piensa y practica

1. En las siguientes progresiones geométricas, calcula el término que se pide:

a) $a_1 = 5$, $r = 2 \rightarrow a_6$ b) $b_1 = 1/2$, $r = -2 \rightarrow b_7$

c) $c_1 = 10$, $r = 0{,}1 \rightarrow c_5$ d) $d_1 = 15$, $r = 1/2 \rightarrow d_8$

2. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 50, 500, 5 000, … b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots$

c) –3, 6, –12, 24, … d) $5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \frac{135}{8}, \ldots$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Sucesiones. Término general

1. Calcula los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$

e) $e_n = n(n-2)$

f) $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

2. Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

a) $a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

3. Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones y escribe tres términos más en cada una de ellas:

a) 11, 9, 7, 5, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; …

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

e) 8, 12, 18, 27, …

f) 0, 3, 8, 15, …

4. Halla el término general de estas sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

c) 1, 3, 9, 27, …

d) $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $4 \cdot 5$; …

Progresiones

5. Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos en cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$

b) $a_1 = 32$; $d = -5$

c) $a_1 = 5$; $d = 0{,}5$

d) $a_1 = -3$; $d = -4$

6. Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots$

7. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:

a) $a_1 = 0{,}3$; $r = 2$

b) $a_1 = -3$; $r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200$; $r = -0{,}1$

d) $a_1 = \frac{1}{81}$; $r = 3$

8. Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 5; 6; 7,2; 8,64; …

c) 0,7; 0,07; 0,007; …

d) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \dots$

Nombre y apellidos: ………………………… Fecha: ……………

Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

9. Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) 0,2; 0,02; 0,002; …

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

e) 22; –11; 5,5; –2,75; …

f) 18, 13, 8, 3, …

10. Determina la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 5$ y $a_7 = 32$.

11. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $d = 5$; $a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

c) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$

d) $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

12. Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_3 = 3$; $r = 1/10$

b) $a_4 = 20{,}25$; $r = -1{,}5$

c) $a_2 = 0{,}6$; $a_4 = 2{,}4$

d) $a_3 = 32$; $a_6 = 4$

13. La suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = -5$ es 120. Calcula a_{10} y la diferencia.

Autoevaluación

1. Escribe el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$

b) 3; 0,6; 0,12; 0,024; …

c) 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

2. Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.

3. Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguiente progresión: 9; 6,5; 4; 1,5; …

4. En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.

5. Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....