2 Potencias y raíces

Números grandes en la India…

Los antiguos indios fueron muy aficionados a los números enormes. En su gran poema *Mahabharata* (siglo VI a. C., aproximadamente), se cuenta que Buda tuvo $6 \cdot 10^{11}$ hijos y se habla de $24 \cdot 10^{15}$ divinidades.

Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos.

Templo Swayambhunath en el valle de Katmandú (Nepal).

… y en la antigua Grecia

Arquímedes, gran matemático, ingeniero e inventor griego (siglo III a.C.), con el fin de demostrar que el número de granos de arena "no era infinito", se propuso escribir un número mayor que el número de granos de arena que cabría en el universo. Y para ello escribió todo un libro, *El arenario*, en el que tuvo que inventar una nueva forma de escribir números extraordinariamente grandes.

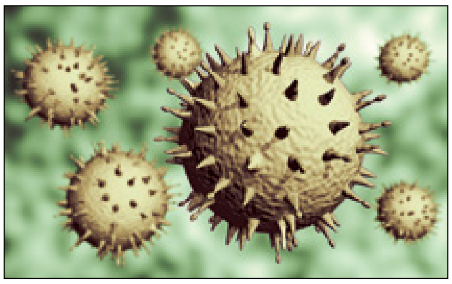
"Arquímedes pensativo", de Domenico Fetti.

Llega el S.N.D.

Nuestro sistema de numeración llegó a la civilización occidental por medio de los árabes (siglo IX), quienes, a su vez, lo aprendieron de los indios entre los siglos VII y VIII. Por eso, lo que hoy llamamos "numeración arábiga" debería llamarse "hindú" o "indo-arábiga".

El S.N.D. dio alas al desarrollo de las matemáticas, más allá de su aplicación en situaciones prácticas cotidianas.

La estructura del S.N.D., junto con las potencias, permite expresar con gran comodidad y sencillez números de cualquier tamaño, por grandes o pequeños que sean.



El virus de la gripe tiene un diámetro medio aproximado de 10^{-7} metros.

15

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Potenciación

En la web

Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente natural.

Potencias de exponente positivo

Las potencias de exponente entero positivo (1, 2, 3, …) son fáciles de interpretar:

$$a^1 = a \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo: $8^1 = 8$, $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

Propiedades

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$

② $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ — Por ejemplo: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$

③ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3}$

④ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\dfrac{a^6}{a^4} = \dfrac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \dfrac{a^{6-4}}{1} = a^{6-4}$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ — Por ejemplo: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \dfrac{a^3}{b^3}$

Ten en cuenta

La propiedad ④, de momento, solo sirve para $m > n$.

Ejercicio resuelto

Reducir a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3$ *b)* $(2^3)^4$ *c)* $\dfrac{5^8}{5^6}$ *d)* $\dfrac{14^5}{7^5}$ *e)* $2^7 \cdot 5^7$ *f)* $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2$

a) $5^2 \cdot 5^6 \cdot 5^3 = 5^{2+6+3} = 5^{11}$ (Propiedad ①)

b) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (Propiedad ③)

c) $\dfrac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$ (Propiedad ④)

d) $\dfrac{14^5}{7^5} = \left(\dfrac{14}{7}\right)^5 = 2^5$ (Propiedad ⑤)

e) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$ (Propiedad ②)

f) $(7^4 \cdot 7^5) : (7 \cdot 7^3)^2 = 7^9 : (7^4)^2 = 7^9 : 7^8 = 7$ (Propiedades ①, ③ y ④)

Piensa y practica

1. Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\dfrac{7^6}{7^4}$

d) $\dfrac{15^3}{3^3}$ e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\dfrac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$

g) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ h) $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

2. Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ b) $(6^5 : 2^4) : 3^5$ c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

d) $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$ e) $\dfrac{20^6}{2^6}$ f) $\dfrac{20^6}{2^5}$

g) $(3^3)^2 : 3^5$ h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resumen

Definición

$a^0 = 1,\ a^1 = a$

Si $n > 1,\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$

$a^{-n} = 1/a^n$

Propiedades

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Potencias de exponente cero o negativo

La propiedad 4 de la página anterior solo era válida para $m > n$. Veamos qué ocurriría si fuera $m = n$ o $m < n$:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^3} = 1. \text{ Por tanto, tendría que ser } a^0 = 1.$$

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}. \text{ Pero } \frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \ \to\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas igualdades nos sugieren la siguiente definición:

> Si a es un número racional distinto de cero y n es entero:
>
> $$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
>
> Como consecuencia: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

Las propiedades que teníamos para las potencias de exponente positivo también son válidas para las potencias de exponentes enteros cualesquiera.

Ejercicios resueltos

1. ***Expresar como potencia de base 10 este número:***

0,0000000000001

$$0{,}0000000000001 = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000} = \frac{1}{10^{13}} = 10^{-13}$$

2. ***Simplificar.***

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-3}$

b) $\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3}$

c) $\dfrac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}}$

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-3} = \dfrac{3^4}{5^4} \cdot \dfrac{5^3}{9^3} = \dfrac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot (3^2)^3} = \dfrac{3^4 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 3^6} = \dfrac{1}{3^2 \cdot 5} = \dfrac{1}{45}$

b) Se puede resolver aplicando la propiedad 3:

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(-2)\cdot(-3)} = \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \frac{5^6}{2^6} = \frac{15\,625}{64}$$

c) $\dfrac{2^{-6} \cdot 4^3 \cdot 3^4 \cdot 9^{-2}}{2^{-4} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-5}} = \dfrac{2^{-6} \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^{-4}}{2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-5}} = 2^{-6+6+4-3} \cdot 3^{4-4-2+5} = 2 \cdot 3^3 = 54$

Piensa y practica

En la web Actividades para repasar las operaciones con potencias de exponente entero.

3. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación 0,00001 : 10 000 000.

4. Expresa como fracción simplificada.

a) $\dfrac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) a^{-6} d) $x^{-1}y^{-2}$

e) $\dfrac{x^3y^4}{x^2y^6}$ f) $(3xy^2)^{-2}$ g) $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

5. Reduce a un único número racional.

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ e) $\left(\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^6$

g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ h) $\left(\dfrac{17}{45}\right)^0$ i) $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$

En la web Actividades para reforzar las operaciones con potencias de exponente entero.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Notación científica

Los números siguientes están puestos en notación científica:

$$3{,}56 \cdot 10^{13} = \underbrace{35\,600\,000\,000\,000}_{13 \text{ cifras}}$$

$$9{,}207 \cdot 10^{-16} = 0{,}\underbrace{000000000000000}_{16 \text{ cifras}}9207$$

La notación científica tiene la siguiente ventaja sobre la usual: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = \underbrace{a}_{\text{PARTE ENTERA (SOLO UNA CIFRA)}}, \underbrace{b\,c\,d\ldots}_{\text{PARTE DECIMAL}} \cdot \underbrace{10^{n}}_{\text{POTENCIA ENTERA DE BASE 10}}$$

Si n es positivo, el número N es “grande”.

Y si n es negativo, entonces N es “pequeño”.

En la web

Recuerda las propiedades de las potencias de base 10.

Cálculo mental

I. Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a) $1\,000 \cdot 100\,000$

b) $1\,000 \cdot 0{,}01$

c) $1\,000 : 0{,}01$

d) $1\,000 : 0{,}000001$

e) $1\,000 \cdot 0{,}000001$

f) $0{,}0001 \cdot 0{,}01$

g) $0{,}0001 : 0{,}01$

II. Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $374{,}2 \cdot 10^{5} = 3{,}742 \cdot 10^{n}$

b) $374{,}2 \cdot 10^{-7} = 3{,}742 \cdot 10^{n}$

c) $0{,}031 \cdot 10^{5} = 3{,}1 \cdot 10^{n}$

d) $0{,}031 \cdot 10^{-7} = 3{,}1 \cdot 10^{n}$

Operaciones con números en notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10 y, así, poder sacar factor común.

En la web

- Practica con potencias de base 10.
- Practica la escritura en notación científica.
- Practica la suma con números en notación científica.

Ejercicio resuelto

a) $(4{,}73 \cdot 10^{7}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^{5}) = (4{,}73 \cdot 7{,}5) \cdot 10^{7+5} = 35{,}475 \cdot 10^{12} =$
$= 3{,}5475 \cdot 10^{13}$

b) $\dfrac{4{,}73 \cdot 10^{7}}{7{,}5 \cdot 10^{-5}} = (4{,}73 : 7{,}5) \cdot 10^{7-(-5)} = 0{,}631 \cdot 10^{12} = 6{,}31 \cdot 10^{11}$

c) $4{,}73 \cdot 10^{7} - 7{,}5 \cdot 10^{6} = 47{,}3 \cdot 10^{6} - 7{,}5 \cdot 10^{6} = (47{,}3 - 7{,}5) \cdot 10^{6} =$
$= 39{,}8 \cdot 10^{6} = 3{,}98 \cdot 10^{7}$

Observación

En los tres apartados del ejercicio resuelto hemos tenido que “arreglar” la solución final para que adopte la notación científica: solo una cifra en la parte entera.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) $5{,}83 \cdot 10^{-5} < 2{,}01 \cdot 10^{4}$

b) $58{,}35 \cdot 10^{4} > 3{,}5 \cdot 10^{6}$

c) $6{,}2 \cdot 10^{-3} < 5{,}8 \cdot 10^{-4}$

d) $(3{,}1 \cdot 10^{5}) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{-5}) < 10$

2. Calcula.

a) $(3{,}25 \cdot 10^{7}) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$

b) $(5{,}73 \cdot 10^{4}) + (-3{,}2 \cdot 10^{5})$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^{3})$

d) $(1{,}17 \cdot 10^{8}) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

PREFIJOS PARA ÓRDENES DE UNIDADES	
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

Calculadora para la notación científica

Cualquiera de los modelos de calculadora puede ser programado para que trabaje solo en notación científica (modo SCI). Es preferible que no uses ese modo, sino el normal (**NORM**). Averigua cómo se programa en tu calculadora. Puedes hallarlo, según los modelos, pulsando reiteradamente la tecla [MODE], o bien mediante **SHIFT SETUP.** Si se te pregunta **1~2?**, responde **2.** De este modo solo recurrirá a la notación científica cuando el número de cifras decimales utilizado sea muy grande.

Las teclas para poner el exponente en una notación científica son, dependiendo del modelo de calculadora, [EXP] o [$\times 10^x$].

Interpretación

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica. Por ejemplo:

123 000 000 [×] 45 000 [=] $\to$ 5.535×10^{12}

0,000123 [÷] 50 000 [=] $\to$ 2.46×10^{-09}

Escritura

Para poner $5{,}74 \cdot 10^9$, hacemos: 5,74 [EXP] 9 [o bien 5,74 [$\times 10^x$] 9]

Para poner $2{,}95 \cdot 10^{-13}$, hacemos: 2,95 [EXP] 13 [+/–] [o bien 2,95 [$\times 10^x$] [(–)] 13]

Operaciones

Las operaciones se encadenan como si fueran números cualesquiera. La propia calculadora, al presionar la tecla [=], da el resultado en forma científica.

Ejercicio resuelto

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15})$

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{8} + 7{,}3 \cdot 10^{-14} - 4{,}552 \cdot 10^{8}$

a) $(3{,}214 \cdot 10^{-5}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{15}) = (3{,}214 \cdot 7{,}2) \cdot 10^{-5+15} = 23{,}14 \cdot 10^{10} = 2{,}314 \cdot 10^{11}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [×] 7,2 [EXP] 15 [=] $\to$ 2.31408×10^{11}

b) $\dfrac{3{,}214 \cdot 10^{-5}}{7{,}2 \cdot 10^{15}} = \dfrac{3{,}214}{7{,}2} \cdot 10^{-5-15} = 0{,}446 \cdot 10^{-20} = 4{,}46 \cdot 10^{-21}$

Con calculadora: 3,214 [EXP] 5 [+/–] [÷] 7,2 [EXP] 15 [=] $\to$ $4.4638889 \times 10^{-21}$

c) 3,2 [EXP] 8 + 7,3 [EXP] 14 [+/–] [–] 4,552 [EXP] 8 [=] $\to$ -1.352×10^{8}

Si los números que queremos sumar son muy diferentes en orden de magnitud, el resultado que muestra la calculadora es de orden igual al mayor de ellos.

Por ejemplo: 7,32 [EXP] 4 [+] 5,35 [EXP] 17 [=] $\to$ 5.35×10^{17}

Piensa y practica

3. Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Raíces exactas

Dos raíces cuadradas

Observa:

$3^2 = 9,\ (-3)^2 = 9$

Por tanto, 9 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

Pero, ¡atención!, cuando ponemos $\sqrt{9}$ nos estamos refiriendo a la raíz positiva, es decir, $\sqrt{9} = 3$.

Análogamente, 16 tiene dos raíces cuartas: 2 y –2.

Pero $\sqrt[4]{16} = 2$.

- **Raíces cuadradas.** Como sabes, $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$.
- **Raíces cúbicas.** $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$.
- **Otras raíces.** De forma análoga se interpretan las raíces de *índice* superior a 3:

  Puesto que $2^5 = 32$, será $\sqrt[5]{32} = 2$.

  $\sqrt[4]{10\,000} = 10$ porque $10^4 = 10\,000$.

En general, si $a = b^n$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$.

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, n es el **índice** y a el **radicando.**

Si $\sqrt[n]{a}$ es un número racional (entero o fraccionario), entonces se dice que la raíz es **exacta.**

Ejercicio resuelto

Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\frac{49}{16}}$

b) $\sqrt{4\,356}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{64}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$

e) $\sqrt[3]{2,16 \cdot 10^{14}}$

f) $\sqrt{5,76 \cdot 10^{-8}}$

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7^2}{4^2} = \frac{49}{16}$. Por tanto, $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$.

b) Puesto que se nos pide hallar $\sqrt{4\,356}$, comprobemos si 4 356 es un cuadrado perfecto.

Para ello, lo descomponemos en factores primos: $4\,356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

Es decir, $4\,356 = (2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 66^2$. Por tanto, $\sqrt{4\,356} = 66$.

c) $1\,000 = 10^3$, $64 = 4^3$. Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{1000}{64}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

d) $243 = 3^5$. Por tanto, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$.

e) $2,16 \cdot 10^{14} = 216 \cdot 10^{12} = 6^3 \cdot (10^4)^3 = (6 \cdot 10^4)^3$.

Por tanto, $\sqrt[3]{2,16 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^4$.

f) $5,76 \cdot 10^{-8} = 576 \cdot 10^{-10} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 10^{-10} = (2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5})^2$.

Por tanto, $\sqrt{5,76 \cdot 10^{-8}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} = 2,4 \cdot 10^{-4}$.

Piensa y practica

En la web Actividades para reforzar el cálculo de raíces exactas.

1. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1000}}$

g) $\sqrt[3]{1,728 \cdot 10^{21}}$ h) $\sqrt{2,025 \cdot 10^{-11}}$

2. ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

e) 7 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{7}$ y $-\sqrt[4]{7}$.

f) $\sqrt{-4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Números racionales e irracionales

Números racionales

Recordemos lo visto en apartados anteriores:

Los **números racionales** son los que se pueden poner en forma de fracción. Es decir, los que se pueden obtener como *cociente de dos números enteros*.

Además de los propios números enteros, son racionales aquellos cuya *expresión decimal es exacta o periódica*.

El conjunto de todos los números racionales se designa $\mathbb{Q}$.

$$\text{RACIONALES } \mathbb{Q} \begin{cases} \text{ENTEROS } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{NATURALES, } \mathbb{N} \to 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \\ \text{NATURALES NEGATIVOS} \to -1, -2, -3, -4, -5, \ldots \end{cases} \\ \text{FRACCIONARIOS} \begin{cases} \text{DECIMALES EXACTOS} \to 0{,}84; 17{,}23; \ldots \\ \text{DECIMALES PERIÓDICOS} \to 2{,}\overset{\frown}{3}; 0{,}0\overset{\frown}{84}; \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Números irracionales

Los números no racionales se llaman **irracionales.**

Son números irracionales aquellos cuya expresión decimal no es exacta ni periódica. Entre ellos están:

— Todas las raíces no exactas. Por ejemplo:

$\sqrt{2} = 1{,}41421256\ldots \qquad \sqrt[3]{4} = 1{,}58740105\ldots$

— El número $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Hay otros infinitos números irracionales.

En la web

- Representación de números irracionales.
- Clasifica números.
- Empareja expresiones con el mismo valor.

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\overset{\frown}{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi - 1$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$24;\ 28/7 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$24;\ -5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
FRACCIONARIOS	$0{,}71;\ 0{,}7\overset{\frown}{1};\ 3/5$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\overset{\frown}{1};\ -5;\ 3/5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
IRRACIONALES	$\sqrt{7};\ \pi - 1$

Piensa y practica

1. Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).

$$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\overset{\frown}{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi - 3$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Practica

Potencias

1. Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$

c) (–2)–3 d) –32

e) –4–1 f) (–1)–2

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

2. Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64 b) 243

c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$ f) $\frac{3^4}{3^{-3}}$

g) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ h) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

3. Calcula.

a) $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(2+\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

4. Expresa como potencia única.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ b) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{4}$ f) $\frac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

5. Simplifica.

a) $\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ b) $\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 3^2}$

Notación científica

6. Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^7$ b) 5 · 10–4

c) 9,73 · 108 d) 8,5 · 10–6

e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$ f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

7. Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005

c) 4 800 000 000 d) 0,0000173

e) 50 030 000 f) 0,002007

8. Di el valor de n en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$

b) $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$

d) $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

9. Completa estas igualdades:

a) $836 \cdot 10^3 = 8{,}36 \cdot 10^{\cdots}$

b) $0{,}012 \cdot 10^4 = \ldots \cdot 10^2$

c) $\ldots \cdot 10^{-3} = 0{,}0834 \cdot 10^3$

d) $73{,}3 \cdot 10^2 = \ldots \cdot 10^{-1}$

10. Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km

b) Peso de un grano de arroz: 0,000027 kg

c) Diámetro de cierto virus: 0,00000008 m

d) Emisión de CO_2 en un año: 54 900 000 000 kg

11. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$

b) $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$

d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^{7})$

f) $(4{,}4 \cdot 10^{8}) : (2 \cdot 10^{-5})$

En la web
• Practica operaciones con potencias sencillas.
• Practica operaciones con potencias más complicadas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Raíces y radicales

12. Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{16}$　b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$　d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[3]{216}$　f) $\sqrt[7]{-128}$

g) $\sqrt[5]{-243}$　h) $\sqrt[6]{4\,096}$

i) $\sqrt[6]{64}$　j) $\sqrt[3]{-8}$

k) $\sqrt[4]{625}$　l) $\sqrt{-8}$

m) $\sqrt[4]{625/16}$　n) $\sqrt[5]{-1}$

13. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$　b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$

c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$　d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$

e) $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$　f) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

14. Extrae de cada radical los factores que sea posible:

a) $\sqrt[4]{32}$　b) $\sqrt[3]{81}$　c) $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$　e) $\sqrt[4]{144}$　f) $\sqrt[3]{250}$

15. Simplifica si es posible.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$　b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$　c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$　e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$　f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

16. Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$　b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$　c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$　e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$　f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

17. Justifica cuál debe ser el valor de *a*, en cada caso, para que se verifique la igualdad:

a) $a^3 = 2^6$　b) $a-1 = 2$

c) $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$　d) $\sqrt[4]{a} = 1$

e) $a^{-2} = \frac{1}{4}$　f) $a^{-5} = -1$

Autoevaluación

1. Calcula.

a) $(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{0} - 3^{-1}$

b) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$

2. Simplifica.

a) $\frac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$　b) $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$　d) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : \frac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

3. Descompón en factores y utiliza las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:

$$\frac{24^2 \cdot 15^{-2} \cdot 6^4}{8^4 \cdot 9^{-3} \cdot 3^{10}}$$

4. Expresa en notación científica.

a) 234 000 000　b) 0,0000075

c) $758 \cdot 10^{-5}$　d) $0{,}035 \cdot 10^{13}$

5. Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b) $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

c) $(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....