

14 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El estudio matemático de la probabilidad surge históricamente vinculado a los juegos de azar. Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos de la unidad: experimento aleatorio o determinista, espacio muestral, suceso, operaciones con sucesos, tipos de frecuencias, probabilidad y regla de Laplace.

La resolución de los ejercicios de la unidad permitirá a los alumnos asimilar los diferentes conceptos. Se hace hincapié en el cálculo de la probabilidad de un suceso, y la aplicación de la regla de Laplace en contextos de equiprobabilidad.

Conviene explicar la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad como otra forma de alcanzar probabilidades.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Experimento aleatorio*: repetido en igualdad de condiciones no se conoce el resultado.
- *Suceso elemental*: cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- *Suceso seguro*: se verifica siempre. *Suceso imposible*: nunca se verifica.
- *Sucesos compatibles*: se verifican simultáneamente. *Sucesos incompatibles*: no pueden ocurrir a la vez.
- La *unión de dos sucesos* está formada por todos los sucesos elementales de los sucesos.
- La *intersección de dos sucesos* está formada por los sucesos elementales comunes.
- *Frecuencia absoluta* (f_i): número de veces que ocurre el suceso al repetir el experimento aleatorio n veces. *Frecuencia relativa* (h_i): $h_i = \frac{f_i}{N}$.
- *Probabilidad de un suceso*: es un número entre 0 y 1 que mide la facilidad de ocurrencia de un suceso.
- Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir entre experimento aleatorio y determinista.	<ul style="list-style-type: none"> • Experimento determinista. • Experimento aleatorio. 	<ul style="list-style-type: none"> • Clasificación de experimentos.
2. Obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio.	<ul style="list-style-type: none"> • Espacio muestral. • Suceso elemental. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención del espacio muestral de un experimento aleatorio.
3. Obtener los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.	<ul style="list-style-type: none"> • Suceso elemental. • Suceso seguro. • Suceso imposible. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de sucesos elementales, suceso seguro e imposible de un experimento aleatorio.
4. Determinar el suceso unión y el suceso intersección de dos sucesos aleatorios. Sucesos compatibles e incompatibles y contrarios.	<ul style="list-style-type: none"> • Unión e intersección de sucesos. • Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de la unión e intersección de dos sucesos dados. • Cálculo de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.
5. Obtener la frecuencia absoluta y relativa de un suceso.	<ul style="list-style-type: none"> • Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de las frecuencias absolutas y relativas.
6. Calcular la probabilidad de un suceso.	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad de un suceso. • Regla de Laplace. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de la regla de Laplace para calcular probabilidades.
7. Aplicar las propiedades de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none"> • Suma de probabilidades. • Probabilidad del suceso seguro, imposible y contrario. 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación de las propiedades de la probabilidad para resolver problemas en contextos reales.

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- **Experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

Por ejemplo:

- Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que el agua hierve a 100 °C.
- Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto 2 horas, tenemos la certeza de que ha recorrido 200 km.

Estos experimentos son deterministas.

- **Experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «es más probable, es igual de probable, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro...».

Por ejemplo:

- Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.
- Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

- 1** Clasifica los siguientes experimentos. En el caso de que el experimento sea aleatorio, escribe un posible resultado.

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
El resultado de dividir 10 entre 2	×		
En una caída libre de 5 metros, saber la velocidad que se alcanza			
Lanzar una moneda al aire			
Sacar una carta de una baraja española			
Saber la fecha de nacimiento de una persona			
Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 fichas azules			
Lanzar un dado y obtener una puntuación mayor que 5			
Saber el resultado de elevar un número al cuadrado			
Conocer el tiempo que va a hacer mañana			

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por E .
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL	SUCESOS ELEMENTALES
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

- 1 **Considera un dado en forma de tetraedro.**
 - a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
 - b) ¿Cuáles son los sucesos elementales del experimento aleatorio que consiste en tirar el dado?
- 2 ¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar dos bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas como 1 y 2?
- 3 ¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar tres bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3?
- 4 Se lanzan dos dados y se suman los puntos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Forma el espacio muestral.

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Un **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.
- El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales).
Se verifica siempre.
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental.
Nunca se verifica.

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado al aire, un **suceso seguro** es obtener un número menor que 6 y un **suceso imposible** es obtener el número 30.

1 Con una baraja de cartas española, se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen estos sucesos.

- Sacar oros.
- Sacar un 5.
- Sacar figura.
- Sacar bastos.

2 Dadas ocho cartas numeradas del 1 al 8, se realiza el experimento aleatorio de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.

- Obtener número par.
- Obtener múltiplo de 3.
- Obtener número mayor que 4.

3 De estos experimentos, indica qué sucesos son seguros e imposibles.

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
De una baraja española de 40 cartas, sacar picas		
En una bolsa con 2 bolas rojas y 3 verdes, obtener una bola azul		
En una caja con fichas numeradas del 1 al 4, obtener una ficha con un número menor que 5		
Al lanzar un dado al aire, salir un número mayor que 6		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, obtener 0		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, salir 3		
Al tirar dos dados al aire y multiplicar la puntuación de sus caras, obtener 40		

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una **operación entre sucesos** nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral. Las dos operaciones de sucesos más importantes son la unión y la intersección.
- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) del suceso A y del suceso B :

$$A \cup B = A \text{ unión } B$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes de los sucesos A y B :

$$A \cap B = A \text{ intersección } B$$

- Si dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Si dos **sucesos** tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

- Dado un suceso A , el **suceso contrario o complementario**, \bar{A} , está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, consideramos los sucesos:

$$A = \text{Obtener número menor que 4} = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \text{Obtener número impar} = \{1, 3, 5\}$$

- Escribimos el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de A y B :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Escribimos el suceso intersección, formado por todos los sucesos elementales comunes de A y B :

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

- Escribimos el suceso contrario de A , formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en A :

$$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$$

- Escribimos el suceso contrario de B , formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en B :

$$\bar{B} = \{2, 4, 6\}$$

Vemos que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

- 1** Considera el experimento de lanzar un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8 y los sucesos $A = \text{Salir puntuación par}$ y $B = \text{Salir puntuación impar}$.
Escribe el espacio muestral y obtén los siguientes sucesos.

Espacio muestral: $E =$

a) $A \cup B =$

d) $\bar{B} =$

b) $A \cap B =$

e) $\bar{A} \cap B =$

c) $\bar{A} =$

f) $\bar{A} \cup B =$

2 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.

$A =$ Salir oros $B =$ Salir un rey $C =$ Salir un as $D =$ No salir oros

Señala si los sucesos son compatibles, incompatibles o contrarios.

SUCESO	COMPATIBILIDAD		CONTRARIOS
	COMPATIBLES	INCOMPATIBLES	
A y B			
A y C			
A y D			
B y C			

3 De una baraja española de 40 cartas hemos separado los ases y los reyes. Con este grupo de cartas realizamos el experimento de sacar dos cartas.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Indica un suceso imposible de este experimento.

c) ¿Cómo son los sucesos de sacar oros y sacar rey?

d) ¿Qué sucesos componen la unión de los sucesos de sacar oros y sacar rey?

e) ¿Qué sucesos elementales forman el suceso de sacar dos reyes?

f) ¿Y el suceso de sacar oros?

4 En una caja hay ocho bolas, numeradas del 1 al 8. Escribe un suceso compatible, otro incompatible y otro contrario de estos sucesos.

SUCESO	COMPATIBLE	INCOMPATIBLE	CONTRARIO
$A =$ Sacar un número menor que 4			
$B =$ Sacar un número impar			
$C =$ Sacar múltiplo de 2			
$D =$ Sacar múltiplo de 7			

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- **Frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que ocurre dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio n veces.
- **Frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se repite el experimento: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

EJEMPLO

Roberto ha lanzado un dado 50 veces, obteniendo los resultados de la tabla.

CARA	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	50
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	1

El número de veces que aparece cada cara es su frecuencia absoluta (f_i).

La frecuencia relativa la obtenemos dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

- 1** En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla a continuación. Los resultados obtenidos se expresan en la tabla.

BOLA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	100
h_i											

- a) Completa la tabla calculando las frecuencias relativas.
 b) Considera los sucesos y calcula.

A = múltiplo de 3, B = número impar y C = divisor de 6

- Frecuencia relativa de A , B y C :

$$A = \{3, 6, 9\} \quad h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$$

$$B =$$

$$C =$$

- Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \quad h_{A \cup B} = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup C =$$

$$A \cap C =$$

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

La **probabilidad de un suceso** es el número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa de ese suceso conforme aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio.

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece el número 1.

LANZAMIENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	0,25	0,225	0,27

Al obtener la tabla de frecuencias relativas correspondiente a este experimento, se observa que el número hacia el cual se aproxima la frecuencia del suceso de aparecer el número 1 es 0,25.

Por tanto, la probabilidad de obtener número 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0,25$.

1 Tira una moneda 25 veces y completa la tabla.

	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
CARA			
CRUZ			

¿Son las frecuencias relativas números próximos a 0,5? ¿Qué consecuencias obtienes de tus resultados?

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Esta expresión es la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula las siguientes probabilidades.

SUCESO	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Salir número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Salir número menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Salir número par o menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Salir número par y 4	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{1}{6}$

- 2** Se hacen quinielas con un dado que tiene tres caras con el 1, dos caras con la X y la otra cara con el 2. Si se lanza una vez el dado, calcula aplicando la regla de Laplace.

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de obtener 1.
- c) La probabilidad de obtener X.
- d) La probabilidad de obtener 2.

- 3** Una urna contiene cuatro bolas: 1 roja, 1 azul, 1 verde y 1 blanca. Si se sacan dos bolas a la vez, calcula.

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de que una bola sea blanca y la otra roja.
- c) La probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
- d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea blanca.

- 4** Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Halla estas probabilidades.

- a) Un rey.
- b) Oros.
- c) Un 4 o un 6.
- d) El rey de oros.
- e) Una carta que no sea de copas.
- f) Una figura de bastos.
- g) Una carta que no sea figura.
- h) Una carta menor que 5.

- 5** En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto ha tomado pescado. Fijándote en la tabla, y completando los datos que faltan, si elegimos una persona al azar, calcula.

	CARNE	PESCADO	Suma
HOMBRES	16		28
MUJERES	20		32
Suma	36		

- a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?

- 6** Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Obtén.

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de que la suma sea 3.
- c) La probabilidad de que la suma sea 7.
- d) La probabilidad de que la suma sea superior a 10.
- e) La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.

Por ejemplo: en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.
- Siendo A y B dos sucesos del espacio muestral E :

– Si son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por ejemplo, dados los sucesos incompatibles $A =$ Salir cara número primo y $B =$ Salir cara múltiplo de 4, la probabilidad de que ocurra uno de los dos es:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

– Si son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$A = \{1, 3, 5\} \text{ y } B = \{3, 6\}$$

$$\text{La probabilidad de que ocurra su unión es: } P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

- La probabilidad del suceso contrario de A , \bar{A} , es: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$$A = \{3, 6\} \text{ y } \bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$P(A) = \frac{2}{6} \quad P(\bar{A}) = \frac{4}{6}$$

$$\text{Se comprueba que: } P(\bar{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$$

- 1 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula estas probabilidades.

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
$A =$ Sacar espadas	$P(A) =$	$D =$ Sacar espadas o sota	$P(D) =$
$B =$ Sacar sota	$P(B) =$	$E =$ No sacar espadas	$P(E) =$
$C =$ Sacar espadas y sota	$P(C) =$	$F =$ No sacar sota	$P(F) =$

- 2 Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula estas probabilidades.

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
$A =$ Salir bola blanca	$P(A) =$	$D =$ Salir bola que no sea roja	$P(D) =$
$B =$ Salir bola roja	$P(B) =$	$E =$ Salir bola verde	$P(E) =$
$C =$ Salir bola que no sea negra	$P(C) =$	$F =$ Salir bola blanca o negra	$P(F) =$

- 3 La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?