10 Movimientos y semejanzas

INTRODUCCIÓN

Esta unidad tiene un componente gráfico muy importante, por lo que conviene comenzar la unidad aportando ejemplos reales, sobre todo en contextos de tipo artístico, para que los alumnos puedan asimilar los conceptos de movimientos y semejanzas que se explican.

La exposición se inicia con la definición de un vector y sus elementos: módulo, dirección y sentido. Después, se calcularán sus componentes y módulo en un sistema de coordenadas.

A continuación se estudiarán los movimientos en el plano, que son transformaciones que conservan las distancias y los ángulos: traslaciones, giros y simetrías, respecto a un punto y respecto a una recta o eje. Se proponen en la unidad diversos ejercicios para obtener las coordenadas de la figura transformada.

Posteriormente, se tratan las semejanzas, que conservan la forma pero no el tamaño. Una de las aplicaciones reales de las semejanzas son las escalas y su uso en distintos contextos. Son de gran utilidad para trabajar y representar mapas, planos, etc.

Conviene dejar claras las diferencias conceptuales entre movimientos y semejanzas, y las aplicaciones de estas últimas: figuras semejantes y polígonos semejantes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos puntos A y B determinan un *vector* fijo. A es el origen y B es el extremo del vector.
- Los *elementos de un vector* son su módulo (longitud del segmento AB), dirección (la de la recta AB) y sentido (el que va del punto A a B).
- Dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las *componentes del vector* son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Una *traslación de vector* $\vec{v}$ transforma cualquier punto P en otro punto P', tales que PP' tiene el mismo módulo, dirección y sentido que $\vec{v}$.
- Un *giro de centro O y ángulo* α es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P' situado a igual distancia de O que el punto P, de forma que el ángulo que forman PP' es α.
- *Simetría respecto a un punto O* es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P', a la misma distancia de O, tales que P, O y P' están alineados.
- *Simetría respecto a un eje e* es el movimiento que asocia a cada punto P otro punto P', tales que PP' es perpendicular a e, y las distancias de P y P' al eje e son iguales.
- Las *semejanzas* transforman una figura en otra con igual forma pero distinto tamaño.
- La *escala* es la razón de semejanza entre el original y su representación. Puede ser numérica o gráfica.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Determinar los elementos de un vector.	• Ejes de coordenadas. • Vector: componentes, módulo, dirección y sentido.	• Obtención de las componentes y el módulo de un vector.
2. Reconocer los distintos movimientos.	• Movimientos: traslación, giros, simetría respecto a un punto y simetría respecto a un eje.	• Cálculo de la figura transformada de otra mediante una traslación de vector $\vec{v}$. • Obtención de la figura transformada de otra mediante un giro de centro O y ángulo α. • Determinación de la figura transformada de otra por una simetría central de centro O. • Obtención de la figura transformada de una dada por una simetría de eje e.
3. Distinguir semejanzas y homotecias.	• Semejanzas. Polígonos semejantes.	• Distinción de si dos figuras son semejantes.
4. Operar con escalas.	• Escalas gráficas y numéricas.	• Trabajo con escalas numéricas y gráficas en planos y mapas.

10 OBJETIVO 1
DETERMINAR LOS ELEMENTOS DE UN VECTOR

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

EJES DE COORDENADAS

Los ejes de coordenadas están formados por dos rectas: una horizontal y otra vertical.

- La recta horizontal es el **eje de abscisas o eje *X***.
- La recta vertical es el **eje de ordenadas o eje *Y***.
- El punto donde se cortan los ejes se llama **origen de coordenadas**.

PUNTOS

Los puntos en el plano vienen representados por dos coordenadas: la primera indica su situación en el eje X, y la segunda, su posición en el eje Y: $A(x, y)$.

VECTORES Y SUS COMPONENTES

Dos puntos A y B determinan un vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

A: origen del vector.

B: extremo del vector.

Componentes del vector $\overrightarrow{AB}$: se obtienen hallando la diferencia entre las coordenadas del extremo B y del origen A: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Módulo del vector $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|$ es la longitud del segmento AB.

El módulo de un vector $\overrightarrow{AB}(x, y)$ es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección del vector $\overrightarrow{AB}$: es la dirección de la recta AB.

Sentido del vector $\overrightarrow{AB}$: es el que va del origen (A) al extremo (B).

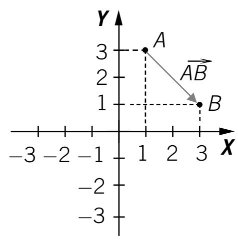
EJEMPLO

Considera los puntos $A(1, 3)$ y $B(3, 1)$.

Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $(3 - 1, 1 - 3) = (2, -2)$.

La primera coordenada (2) representa el desplazamiento en el eje X.

La segunda coordenada (-2) representa el desplazamiento en el eje Y.



1 **Dados los puntos de coordenadas $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(0, 6)$ y $D(-3, 7)$:**

a) Halla las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

b) ¿Qué módulo tienen los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$?

RECONOCER LOS DISTINTOS MOVIMIENTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

MOVIMIENTOS

Son las transformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

TRASLACIÓN

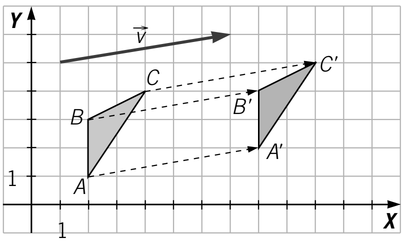
Una traslación es un desplazamiento ordenado mediante un vector.
El trasladado A' de un punto $A(x, y)$ mediante un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ es: $A'(x + x_1, y + y_1)$.

EJEMPLO

Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(4, 4)$, trasládalos según el vector $\vec{v}(6, 1)$.

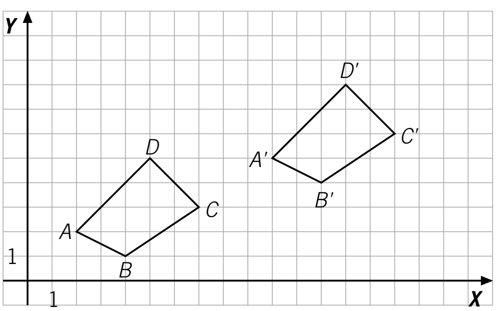
Trasladamos $A(2, 1)$: $A' = A + \vec{v} = (2, 1) + (6, 1) = (8, 2)$
Trasladamos $B(2, 3)$: $B' = B + \vec{v} = (2, 3) + (6, 1) = (8, 4)$
Trasladamos $C(4, 4)$: $C' = C + \vec{v} = (4, 4) + (6, 1) = (10, 5)$

A', B' y C' son la traslación de los puntos A, B y C mediante el vector $\vec{v}(6, 1)$.
Si dibujamos A, B, C, A', B', C', podemos observar lo que ha ocurrido:



1 **Un cuadrado tiene como vértices los puntos $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$ y $D(-1, -1)$. Halla su trasladado por el vector $\vec{v}(4, -2)$.**

2 **El cuadrilátero *ABCD* se ha trasladado y se ha obtenido *A'B'C'D'*.**



a) ¿Qué coordenadas tienen los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$?

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector traslación que transforma *ABCD* en *A'B'C'D'*?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

GIRO

- Un **giro** es un movimiento angular de α grados, con respecto a un punto determinado denominado centro de giro.
- Los giros no tienen una expresión sencilla en el plano cartesiano como ocurre con las traslaciones. Solo en ciertos casos ocurre así:
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 90°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-y, x)$
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 180°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-x, -y)$
  – Giro de centro (0, 0) y ángulo 270°: transforma $P(x, y)$ en $P'(y, -x)$

EJEMPLO

Gira el punto $A(5, -4)$ respecto al punto (0, 0) un ángulo de 90°, 180° y 270°.

Giro de 90º: $A(5, -4) \rightarrow A'(4, 5)$
Giro de 180º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-5, 4)$
Giro de 270º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-4, -5)$

3 **Un triángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, 5)$.**

a) Determina el transformado de ABC, $A'B'C'$, por un giro de centro el origen y ángulo 90°.
b) Halla el transformado de $A'B'C'$ por un giro de centro el origen y ángulo 90°.
c) Obtén el transformado de ABC por un giro de centro el origen y ángulo 180°.

4 **La estrella de puntas *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* se ha girado con centro en el punto *O*. Completa la tabla, indicando el ángulo de giro.**

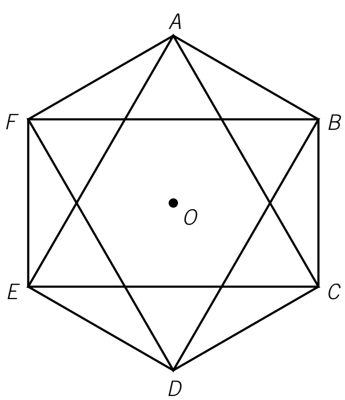
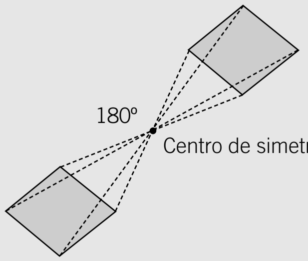


FIGURA ORIGINAL	FIGURA FINAL	ÁNGULO DE GIRO
ABCDEF	*EFABCD*	
	FABCDE	
	CDEFAB	
	DEFABC	
	BCDEFA	

SIMETRÍA RESPECTO A UN PUNTO

La **simetría respecto a un punto** es un giro de 180° con respecto a ese punto, llamado centro de simetría.



5 **De las siguientes letras mayúsculas, di cuáles tienen centro de simetría e indícalo.**

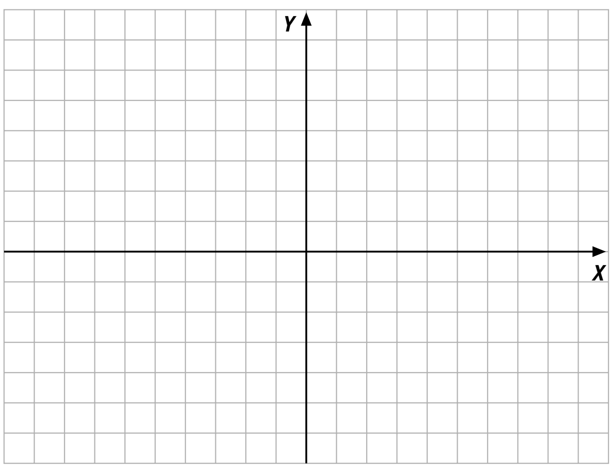
M N O P S T

6 **Un triángulo tiene por vértices los puntos *A*(2, 3), *B*(−3, 5) y *C*(6, 7).**

a) Determina el transformado de *ABC*, *A′B′C′*, por una simetría central con centro el origen.

b) Halla su transformado por una simetría con centro el punto *A*.

7 **Al triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(5, 1) y *C*(4, 6) se le aplica una simetría central, con centro el origen, y se convierte en el triángulo *A′B′C′*. Dibuja los triángulos *ABC* y *A′B′C′*.**

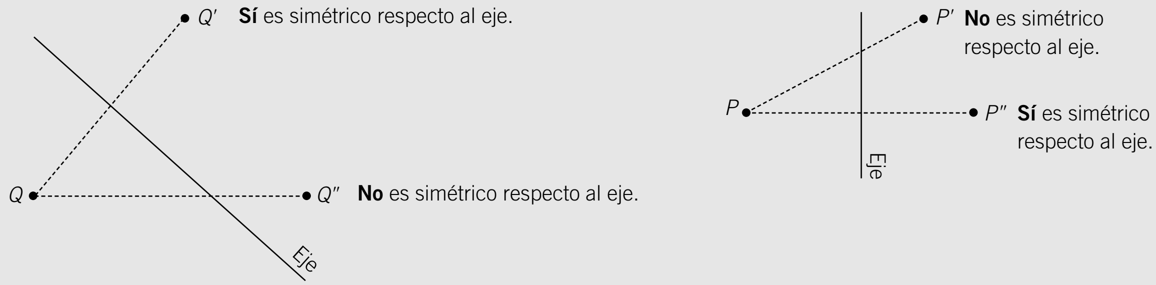


Escribe las coordenadas de los puntos *A′*, *B′* y *C′*.

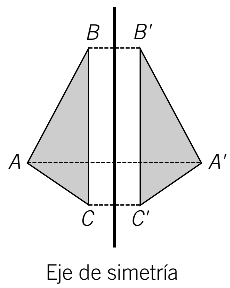
ADAPTACIÓN CURRICULAR

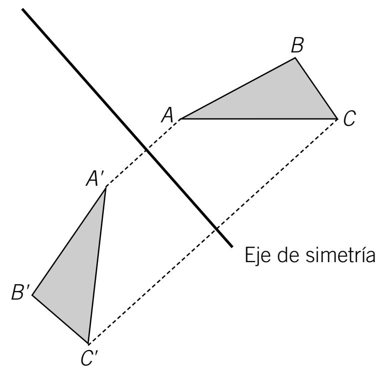
SIMETRÍA RESPECTO A UN EJE

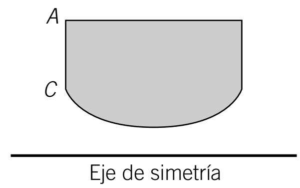
Un punto es simétrico de otro respecto a un eje cuando está a la misma distancia del eje y se sitúa sobre la misma perpendicular al eje.



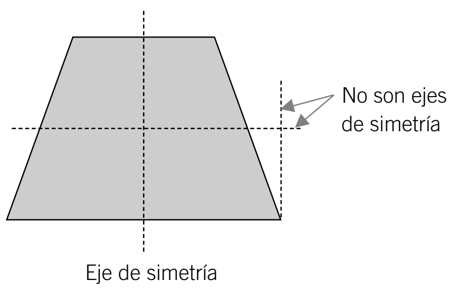
8 **Observa los dos primeros ejemplos y dibuja la figura simétrica en el tercer caso.**

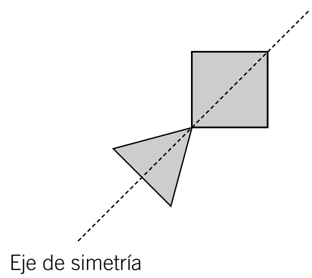


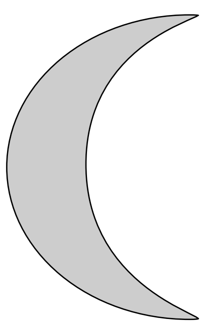


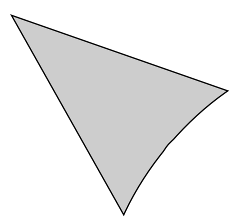


9 **Obtén los ejes de simetría de las siguientes figuras.**

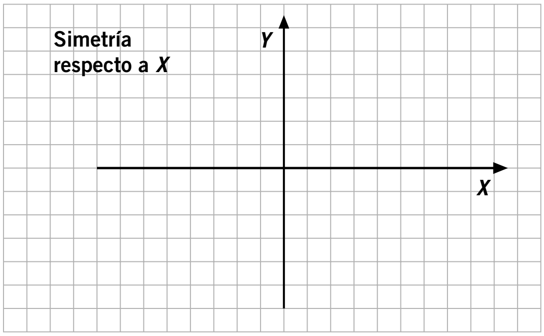


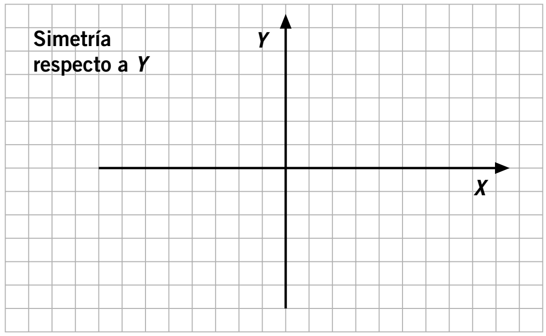


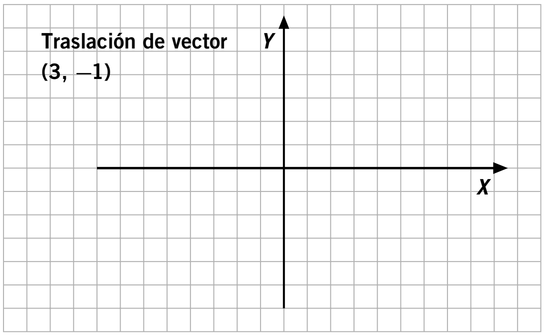


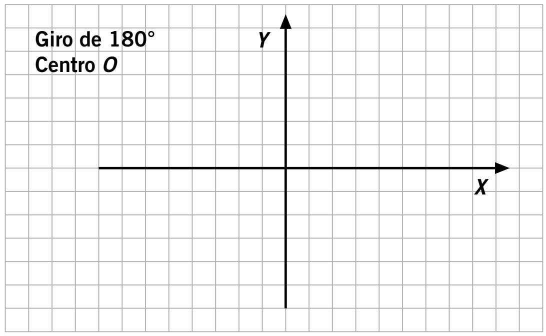


10 **Representa, en cada sistema de coordenadas, el triángulo de vértices *A*(−2, 1), *B*(2, 5) y *C*(3, −2). Aplícale el movimiento que se indica en cada caso y dibuja el triángulo resultante.**

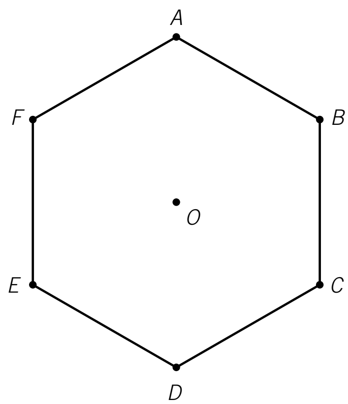
a)


c)


b)


d)


11 **El hexágono *ABCDEF* gira 240° con centro en *O*. Escribe junto a cada vértice la nueva letra que le corresponde tras realizarse el giro.**



12 **¿Cuáles son las coordenadas del triángulo obtenido al aplicar al triángulo de vértices *A* = (0, 0), *B* = (0, 4), *C* = (4, 0) una traslación de vector (5, −3)?**

$A = (0, 0) \rightarrow A' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

$B = (0, 4) \rightarrow B' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

$C = (4, 0) \rightarrow C' = (\_\_\_\_, \_\_\_\_)$

DISTINGUIR SEMEJANZAS Y HOMOTECIAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **semejanzas** transforman una figura en otra figura con la misma forma pero, generalmente, con distinto tamaño.

Se diferencian de las traslaciones y los giros en que no son movimientos.

Son semejantes. **Son semejantes.**

POLÍGONOS SEMEJANTES

Dos **polígonos** son **semejantes** si cada ángulo y su transformado son iguales, y el cociente entre cada lado y su homólogo es constante. Esa cantidad se llama **razón de semejanza**.

EJEMPLO

Halla la longitud de los lados que faltan en la figura 2, sabiendo que es semejante a la figura 1.

FIGURA 1

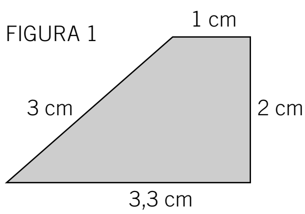
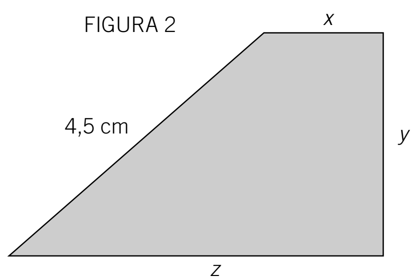


FIGURA 2



Como las figuras 1 y 2 son semejantes, existe una relación de proporcionalidad entre las longitudes de sus lados, es decir, son directamente proporcionales:

FIGURA 1	3 cm	1 cm	2 cm	3,3 cm
FIGURA 2	4,5 cm	x	y	z

$$\frac{3}{4,5}=\frac{1}{x} \qquad 3x=4,5 \qquad x=\frac{4,5}{3}=1,5\text{ cm}$$

$$\frac{3}{4,5}=\frac{2}{y} \qquad 3y=9 \qquad y=\frac{9}{3}=3\text{ cm}$$

$$\frac{3}{4,5}=\frac{3,3}{z} \qquad 3z=14,85 \qquad z=\frac{14,85}{3}=4,95\text{ cm}$$

1 **Calcula las longitudes de los lados que faltan en estas figuras, sabiendo que son semejantes.**

FIGURA 1

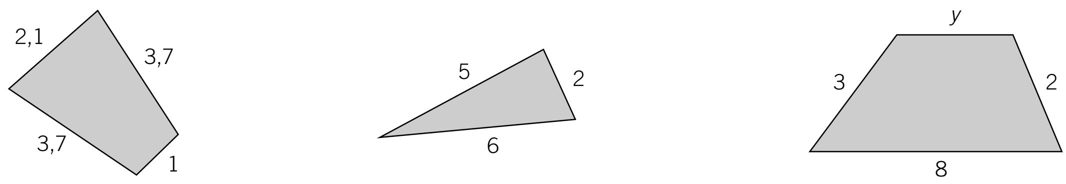


FIGURA 2

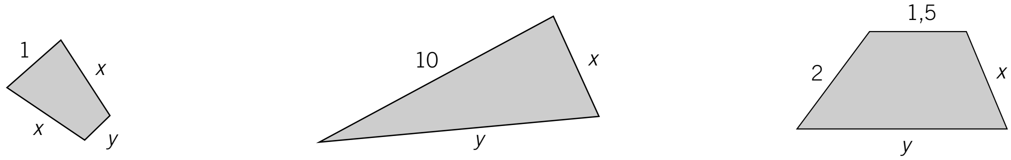


FIGURA 1	2,1	3,7	1	FIGURA 1		FIGURA 1
FIGURA 2	1	x	y	FIGURA 2		FIGURA 2

—— = ——   —— = ——

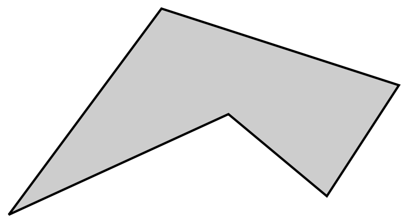
$x =$ $y =$

2 **¿Es el polígono de lados 4 cm, 7 cm y 5 cm semejante al polígono de lados 60 cm, 105 cm y 75 cm?**

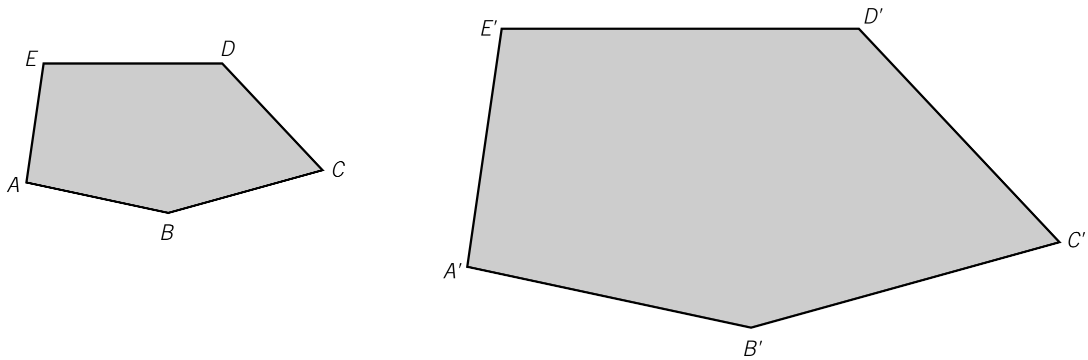
3 **Los lados de un triángulo miden 6 cm, 9 cm y 13 cm y los de otro triángulo miden 12 cm, 18 cm y 26 cm. ¿Son semejantes?**

4 **Un triángulo tiene por lados $a = 3$ cm y $b = 8$ cm. Otro semejante a él tiene como lados $b' = 40$ cm y $c' = 50$ cm. Halla la longitud de los lados de los dos triángulos.**

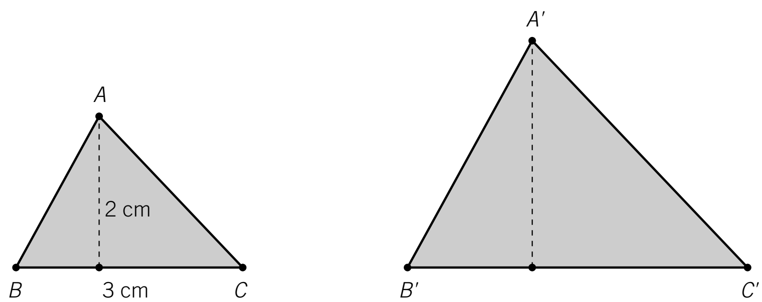
5 **Dibuja un polígono semejante al de la figura, sabiendo que la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.**



6 **Los polígonos *ABCDE* y *A'B'C'D'E'* son semejantes. Ayúdate de una regla y halla la razón de semejanza entre ambos.**



7 **Los siguientes triángulos son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.**
Halla la base y la altura de *A'B'C'*. Halla el área de *ABC* y el área de *A'B'C'*.
¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre las áreas?



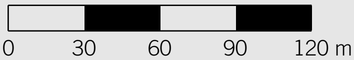
OPERAR CON ESCALAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

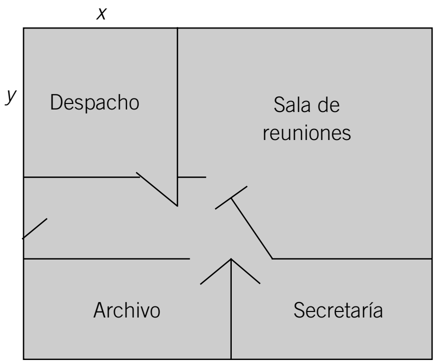
- La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto real y su representación.
- Las escalas se utilizan en planos, mapas, maquetas, etc.
- La escala puede ser numérica o gráfica:

  Escala numérica: 1:3.000 → 1 cm en el plano son 3.000 cm en la realidad.

  Escala gráfica:



1 **Observa el siguiente dibujo a escala 1:200 y obtén la medida del despacho.**



Escala 1:200

Medida tomada en el plano: 1 cm en el plano → Medida real: 200 cm reales

Para saber cuánto mide el despacho en la realidad tomamos una regla y medimos *x* e *y*:

Mapa	1	$\square$	$\square$
Realidad	200	*a*	*b*

$$\frac{1}{200} = \frac{}{a} \qquad \boxed{a =}$$

$$\frac{1}{200} = \frac{}{b} \qquad \boxed{b =}$$

2 **Dos ciudades *A* y *B* están separadas entre sí por 60 km. ¿A qué distancia se encuentran en un mapa a escala 1:400.000?**

3 **Si en un mapa a escala 1:90.000 vemos que dos lugares *A* y *B* están separados por 2 cm, ¿qué distancia les separa en la realidad?**

4 **Algunas fotocopiadoras reducen o amplían los originales. Estas reducciones o ampliaciones vienen expresadas en la máquina con porcentajes. Una reducción del 90 % indica que 100 cm del original se convierten en 90 cm en la fotocopia, y que 1 cm del original se convierte en 0,9 cm en la fotocopia.**

Se ha fotocopiado con reducción al 80% un plano hecho a escala 1:600. ¿Cuál es la escala de la fotocopia?

1 cm del plano se convierte en 0,8 cm de la fotocopia.

0,8 cm de la fotocopia representan 600 cm de la realidad.

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}8 \rightarrow 600 \\ 1 \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{600}{0{,}8} = 750. \text{ La escala es } 1{:}750.$$

a) ¿Cuál es la escala de la fotocopia si se hace al 75 %?

b) ¿Cuál es la escala de la fotocopia si se hace al 120 %?

c) ¿Y la escala de la fotocopia si se hace al 125 %?

5 **El siguiente dibujo muestra la forma y el tamaño que tiene un parque en el plano de una ciudad. También se ha dibujado la escala que aparece en dicho plano. Halla las medidas de los dos lados indicados en el dibujo.**