9 Cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Los cuerpos geométricos están presentes en múltiples contextos de la vida real, de ahí la importancia de estudiarlos. Es interesante construir distintos cuerpos geométricos a partir de su desarrollo en papel o cartón y, de esta forma, facilitar el posterior aprendizaje y razonamiento del proceso de obtención de áreas y volúmenes, sin necesidad de aprender las fórmulas de memoria.

En los poliedros regulares se prestará especial atención al estudio de los prismas y las pirámides, caracterizando sus elementos y señalando las similitudes y diferencias.

Se estudiarán también los cuerpos que se obtienen al girar una figura alrededor de un eje, los cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera.

La aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio es uno de los contenidos de la unidad que puede presentar mayores dificultades; por ello se explica, paso a paso, en diversos ejercicios en los que se guía al alumno para que los complete.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *poliedro* es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos, denominados *caras* del poliedro. Los lados y vértices de las caras son las *aristas* y *vértices* del poliedro.
- En todo polígono convexo se cumple la *fórmula de Euler*: $C + V = A + 2$.
- Un *poliedro* es *regular* si sus caras son polígonos regulares iguales: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.
- Para *calcular longitudes en el espacio*, y siempre que se formen triángulos rectángulos, se puede aplicar el *teorema de Pitágoras*.

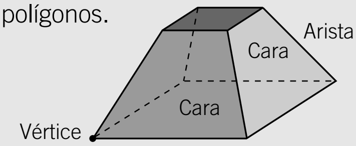
OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Clasificar poliedros.	• Caras, aristas y vértices. • Poliedros cóncavos, convexos y regulares. • Fórmula de Euler.	• Distinción de los poliedros y sus tipos. • Comprobación de si los poliedros cumplen la fórmula de Euler.
2. Diferenciar los elementos y tipos de prismas y pirámides.	• Prismas: elementos y tipos. • Pirámides: elementos y tipos.	• Reconocimiento de los distintos tipos de prismas y pirámides y sus elementos principales.
3. Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras en el espacio.	• Cálculo de la diagonal de un ortoedro. • Cálculo de la altura de una pirámide.	• Aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio para hallar longitudes.
4. Calcular el área de prismas y pirámides.	• Área lateral y área total de un prisma recto. • Área lateral y área total de una pirámide recta.	• Utilización de las fórmulas de las áreas de prismas y pirámides para resolver problemas geométricos.
5. Calcular el área de cuerpos redondos.	• Área lateral y área total: cilindro y cono. • Área de una esfera.	• Utilización de las fórmulas de las áreas de cilindros, conos y esferas para resolver problemas geométricos.
6. Calcular el volumen de cuerpos geométricos.	• Volumen del ortoedro, del prisma y del cilindro. • Volumen del cono y de la pirámide. • Volumen de la esfera.	• Utilización de las fórmulas de los volúmenes de cuerpos geométricos para resolver problemas.

9 OBJETIVO 1

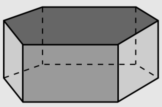
CLASIFICAR POLIEDROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

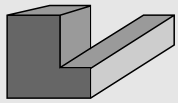
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.
  Los polígonos que limitan al poliedro se llaman **caras**.
  Los lados de las caras se denominan **aristas**.
  Los vértices de las caras se denominan **vértices**.



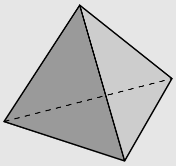
- **Poliedro convexo:** al prolongarse sus caras no cortan al poliedro.



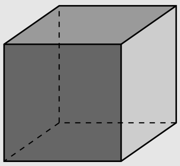
- **Poliedro cóncavo:** al prolongarse sus caras, alguna de ellas corta al poliedro.



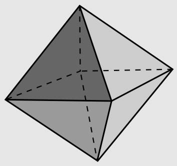
- **Poliedros regulares:** todas las caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se une el mismo número de caras.
  Solo existen cinco poliedros regulares:



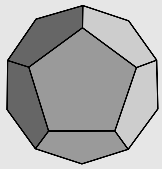
Tetraedro



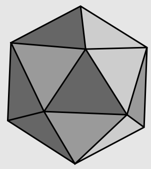
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

FÓRMULA DE EULER

En todo **poliedro convexo** se cumple siempre una relación, conocida con el nombre de fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), el número de aristas (A) y el número de vértices (V):

$$\underset{\text{N.º de caras}}{\boldsymbol{C}} + \underset{\text{N.º de vértices}}{\boldsymbol{V}} = \underset{\text{N.º de aristas}}{\boldsymbol{A}} + \mathbf{2}$$

EJEMPLO

Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para el tetraedro.

N.º de caras = 4 N.º de vértices = 4 N.º de aristas = 6

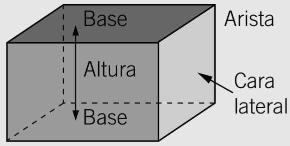
$C + V = A + 2 \rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \rightarrow 8 = 8$

1 **Comprueba que el resto de poliedros regulares verifican la fórmula de Euler.**

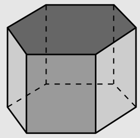
POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	FÓRMULA DE EULER: $C + V = A + 2$
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

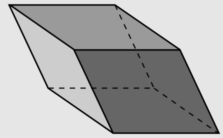
PRISMAS



- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras, que son polígonos iguales y paralelos entre sí, llamadas **bases**; sus otras **caras laterales** son paralelogramos.
- La **altura de un prisma** es la distancia entre las bases.
- **Prisma recto:** las caras laterales son todas rectángulos y, por tanto, perpendiculares a las bases.
- **Prisma oblicuo:** las caras laterales no son todas rectángulos.
- **Según la forma de la base**, los prismas se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales…

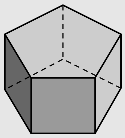


Prisma recto



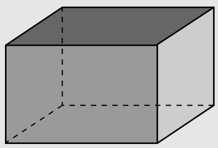
Prisma oblicuo

- **Prisma regular:** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

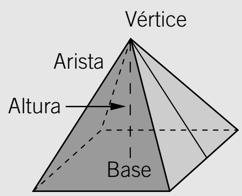


Prisma pentagonal regular

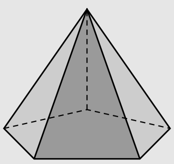
- **Paralelepípedos:** son los prismas cuyas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro:** es un paralelepípedo recto.



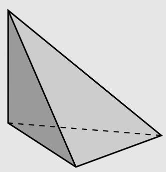
PIRÁMIDES



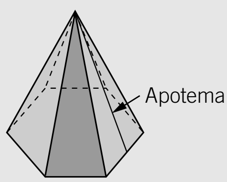
- Una **pirámide** es un poliedro cuya base es un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común, llamado **vértice de la pirámide**.
- La **altura de una pirámide** es la distancia de su vértice a la base.
- **Pirámide recta:** las caras laterales son todas triángulos isósceles.



- **Pirámide oblicua:** las caras laterales no son todas triángulos isósceles.



- **Según la forma de la base**, las pirámides se clasifican en triangulares, cuadrangulares, pentagonales...
- **Pirámide regular:** es una pirámide cuya base es un polígono regular.
- **Apotema:** es la altura de cualquiera de las caras laterales de una pirámide regular.

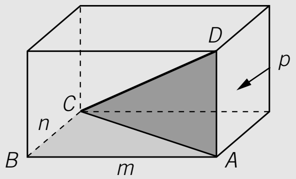


CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN EL ESPACIO

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El teorema de Pitágoras se puede aplicar en todos los contextos en los que se forman triángulos rectángulos. Tiene muchas aplicaciones para calcular longitudes de cuerpos en el espacio.

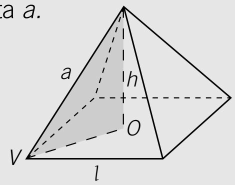
- **Cálculo de la diagonal de un ortoedro**, conocidas las longitudes de sus lados *m*, *n* y *p*.



$$CA = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$CD = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

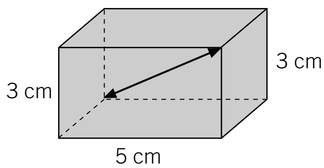
- **Cálculo de la altura de una pirámide cuadrangular regular**, conocidas las longitudes del lado de la base y la arista *a*.



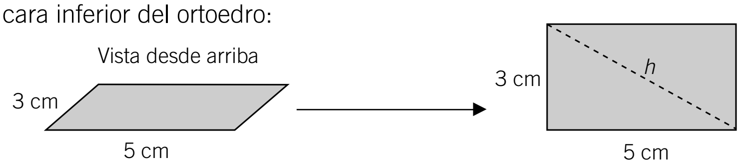
$$h^2 = a^2 - OV^2 = a^2 - \frac{l^2}{2} \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{2}}$$

EJEMPLO

Calcula la diagonal del ortoedro de la figura.

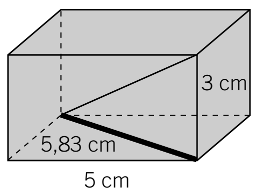


- Consideramos la cara inferior del ortoedro:

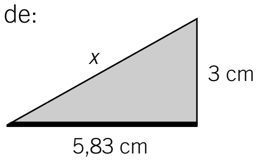


- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 9 + 25 \rightarrow h^2 = 34 \rightarrow h = \sqrt{43} \rightarrow h = 5{,}83 \text{ cm}$$



- Vemos que la diagonal es la hipotenusa de:

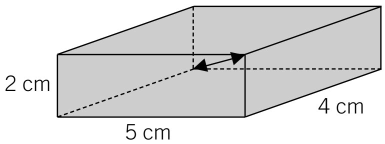


- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

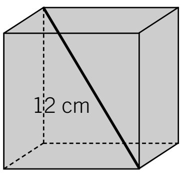
$$x^2 = 3^2 + 5{,}83^2 \rightarrow x^2 = 9 + 34 \rightarrow x^2 = 43 \rightarrow x = \sqrt{43} \rightarrow x = 6{,}56 \text{ cm}$$

La diagonal mide $x = \sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{43} = 6{,}56$ cm.

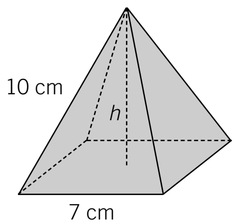
1 **Calcula la diagonal de este ortoedro.**



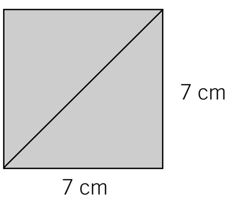
2 **Halla la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 12 cm.**
(Recuerda que en un cubo todos sus lados miden lo mismo.)



3 **Dada una pirámide de base cuadrada, de lado 7 cm y arista lateral 10 cm, halla la diagonal.**

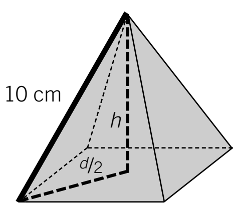


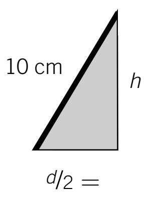
- Tomamos la base y aplicamos el teorema de Pitágoras:



$d^2 = \ldots + \ldots$

- Ahora tenemos:





$10^2 = \boxed{} + h^2$

- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

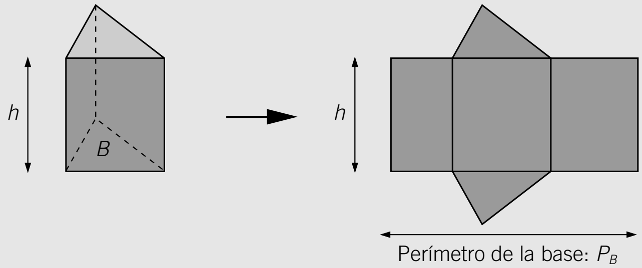
OBJETIVO 4

CALCULAR EL ÁREA DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DE PRISMAS RECTOS

Para hallar el área de un prisma recto nos fijamos en su desarrollo: el prisma recto está formado por un rectángulo y dos polígonos que son sus bases.



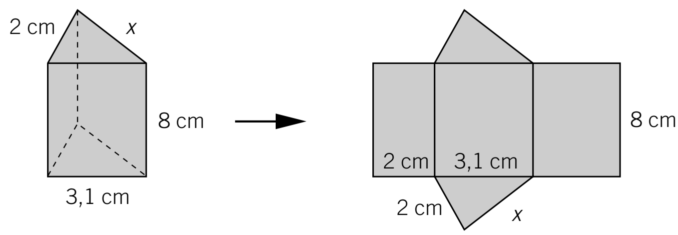
- **Área lateral:** es el área del rectángulo, uno de cuyos lados coincide con el perímetro de la base y el otro con la altura del prisma.

$$\boldsymbol{A_L = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h}$$

- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de las bases.

$$\boldsymbol{A_T = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base} = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B}$$

1 **Dado este prisma recto con base un triángulo rectángulo, halla el área total.**

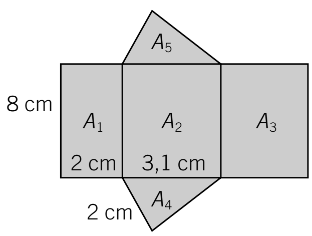


- Para hallar el valor de x, que es uno de los catetos del triángulo rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

  $(3,1)^2 = x^2 + 2^2$

  $x =$ ....

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos para obtener el área total:



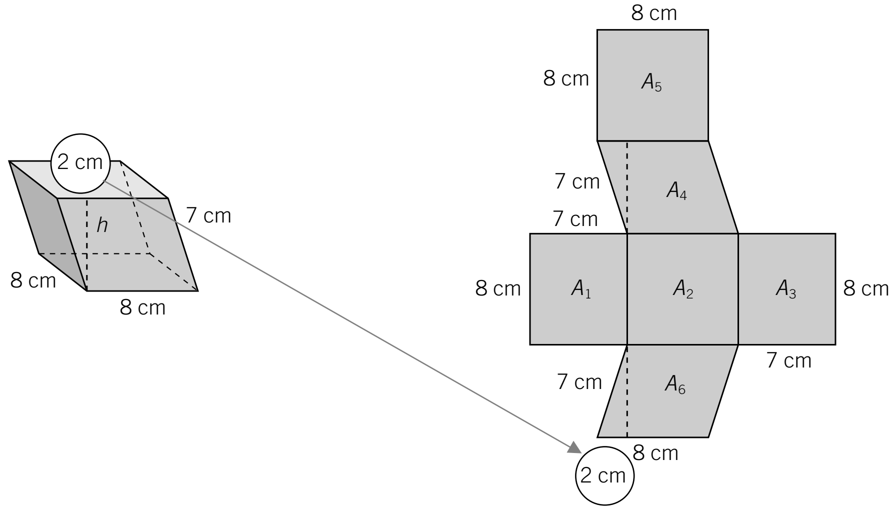
A_1, A_2, A_3 son rectángulos. Su área es el producto de base por altura.
A_4, A_5 son triángulos rectángulos. Su área es la base por la altura dividido entre 2, es decir, el producto de los catetos dividido entre 2.

$A_1 =$ $A_2 =$ $A_3 =$

$A_4 =$ $A_5 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$ $\boxed{}$

2 **Calcula el área del prisma oblicuo de base cuadrangular de la figura.**



- Para hallar el valor de *h* aplicamos el teorema de Pitágoras:

- Para calcular el área total determinamos el área de cada una de las seis caras del prisma, y luego las sumamos:

$A_1 =$ .... · .... $=$ $A_4 =$ .... · .... $=$

$A_2 =$ .... · .... $=$ $A_5 =$ .... · .... $=$

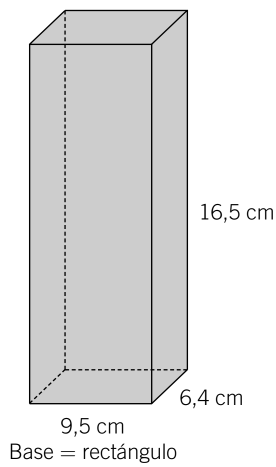
$A_3 =$ .... · .... $=$ $A_6 =$ .... · .... $=$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 =$ $\boxed{}$

3 **Halla el área lateral y el área total de un ortoedro de 6,4 × 9,5 cm de base y 16,5 cm de altura.**

Área lateral = perímetro de la base · altura =

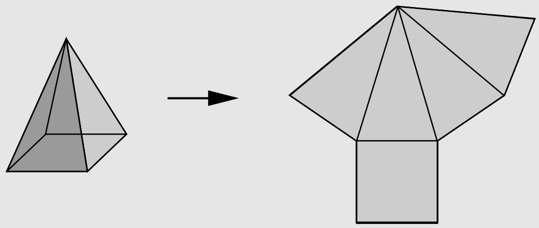
Área total = área lateral + 2 · área de la base =



ADAPTACIÓN CURRICULAR

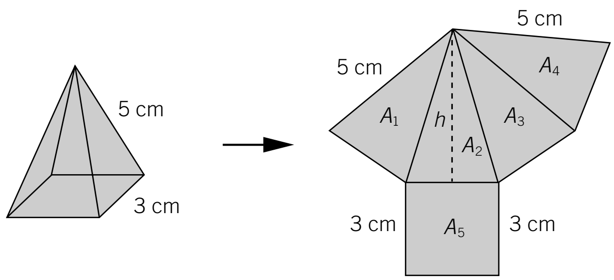
ÁREA DE PIRÁMIDES RECTAS

Para hallar el área de una pirámide recta nos fijamos en su desarrollo: está formada por la base y tantos triángulos como lados tiene la base.

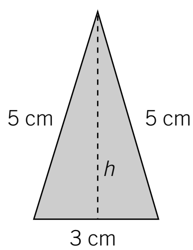


- **Área lateral:** es el área formada por la suma de las áreas de los triángulos.
- **Área total:** es la suma del área lateral y el área de la base: $\boldsymbol{A_T = A_L + A_B}$.
- Si el polígono de la base es regular, el cálculo es más sencillo, ya que todas las caras laterales son iguales y basta con hallar el área de un triángulo y multiplicar por el número de triángulos para obtener el área lateral.

4 **Calcula el área de la pirámide de base cuadrada de la figura. Ten en cuenta que la base es un polígono regular.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de h:



$5^2 = \boxed{}^2 + h^2$

$A_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$ $\qquad A_2 =$ $\qquad A_3 =$

$A_4 =$ $\qquad A_5 =$

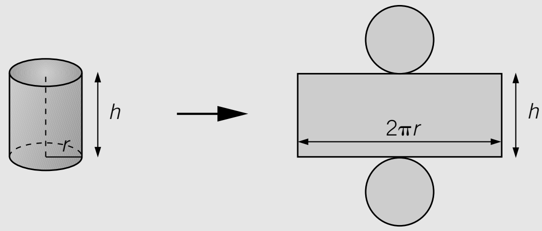
Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \boxed{}$

CALCULAR EL ÁREA DE CUERPOS REDONDOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ÁREA DEL CILINDRO

Para hallar el área del cilindro nos fijamos en su desarrollo: está formado por un rectángulo y dos círculos.



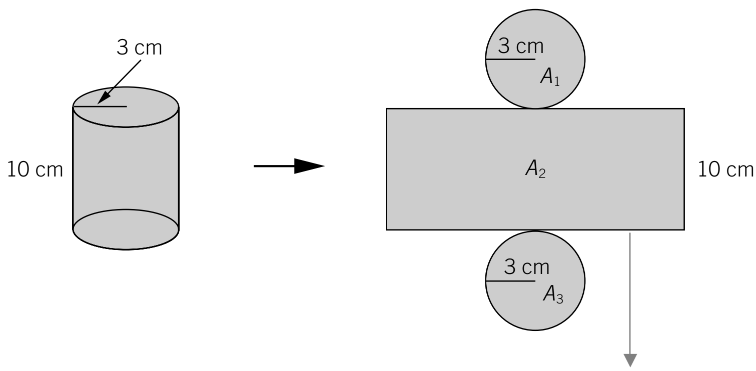
- **Área lateral:** es un rectángulo, en el que uno de sus lados es igual a la longitud de la circunferencia de la base ($2\pi r$), y el otro es la altura (h).

$$A_L = \textbf{perímetro de la base} \cdot \textbf{altura} = 2\pi r \cdot h$$

- **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y las áreas de las dos bases.

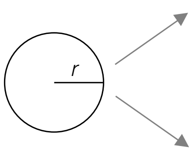
$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

1 **Completa el ejercicio y halla el área total del cilindro.**



Es igual que el perímetro de A_1.

$2 \cdot \pi \cdot 3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3$



Área $= \pi r^2 =$

Perímetro $= 2\pi r =$

$A_1 = \pi r^2 =$

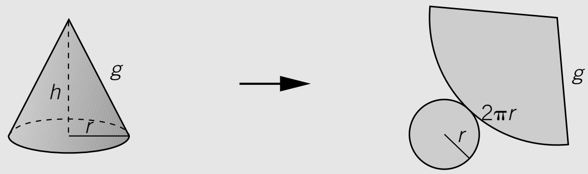
$A_2 = 2\pi r \cdot h =$

$A_3 = \pi r^2 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 =$ $\boxed{}$

ÁREA DEL CONO

Para hallar el área de un cono nos fijamos en su desarrollo: está formado por un sector circular y un círculo, que es la base.

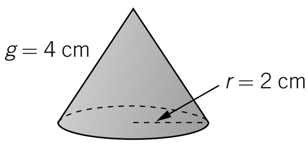


- **Área lateral:** la calculamos como si fuese el área de un triángulo, en el que la longitud de la base es la de la circunferencia ($2\pi r$) y la altura es el radio del sector.

$$\boldsymbol{A_T = \frac{\text{longitud de la base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g}$$

- **Área total:** $\boldsymbol{A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)}$

2 **El área lateral del cono de la figura es:**



a) 8 cm^2

b) 25,12 cm^2

c) 12,56 cm^2

d) 34 cm^2

3 **El área total del cono anterior es:**

a) 20 cm^2 b) 50,24 cm^2 c) 36,55 cm^2 d) 37,68 cm^2

4 **Halla el área total de un cono con $r = 5$ cm y $h = 12$ cm.**

ÁREA DE LA ESFERA

El área de una esfera de radio r es igual a cuatro veces el área del círculo del mismo radio que la esfera:

$$\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$$

EJEMPLO

Calcula el área de una esfera de radio 10 cm.

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 1.256$ cm^2

5 **El área de una esfera de radio 15 cm es:**

a) 2.826 cm^3 b) 28,26 cm^2 c) 2.826 cm^2 d) 14,13 cm^2

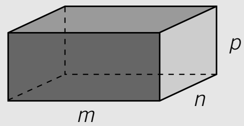
CALCULAR EL VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VOLUMEN DEL ORTOEDRO

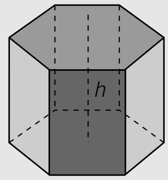
Si un ortoedro tiene de dimensiones m, n y p, su volumen V es igual al área de la base ($m \cdot n$) por la altura p.

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{m \cdot n \cdot p}$



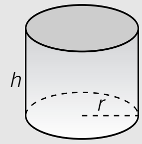
VOLUMEN DEL PRISMA

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{A_{\text{Base}} \cdot h}$



VOLUMEN DEL CILINDRO

$\boldsymbol{V}$ **= área de la base · altura =** $\boldsymbol{\pi r^2 \cdot h}$



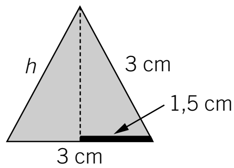
EJEMPLO

Calcula el volumen de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 8 cm.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de un prisma recto de altura 15 cm y base triangular regular de lado 3 cm.

Para calcular la altura debemos aplicar el teorema de Pitágoras: $3^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = 2{,}6$ cm



$$V = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 15 = 58{,}5 \text{ cm}^3$$

Determina el área de un cilindro de altura 7 cm y radio de la base 4 cm.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351{,}68 \text{ cm}^3$$

1 **El volumen de un ortoedro de dimensiones 4, 8 y 12 cm, respectivamente, es:**

a) 384 cm^3 b) 24 cm^3 c) 192 cm^3 d) 768 cm^3

2 **El volumen de un prisma hexagonal regular de arista básica 10 cm y altura 8 cm es:**

a) 2.078,4 cm^3 b) 4.156,8 cm^3 c) 480 cm^3 d) 692,8 cm^3

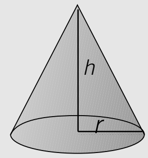
3 **El volumen de un cilindro de altura 6 cm y radio de la base 3 cm es:**

a) 56,52 cm^3 b) 169,56 cm^3 c) 113,04 cm^3 d) 339,12 cm^3

VOLUMEN DEL CONO

El volumen de un cono es igual a la tercera parte del área de la base, que es un círculo (πr^2), por la altura (h).

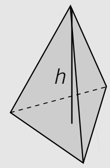
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

El volumen de la pirámide se calcula igual que el de un cono, pero teniendo en cuenta que la base puede ser un polígono cualquiera.

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3}$$



EJEMPLO

Calcula el volumen de un cono de altura 10 cm y radio de la base 2 cm.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{3} = 41{,}87 \text{ cm}^3$$

Halla el volumen de una pirámide de altura 8 cm y base regular triangular de lado 2 cm.

$$A_{Base} = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del triángulo de la base aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1^2 + h^2 \rightarrow h = 1{,}73 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{1{,}73 \cdot 8}{3} = 4{,}61 \text{ cm}^3$$

4 **El volumen de un cono de altura 15 cm y radio de la base 12 cm es:**

a) 4.069,44 cm^3 b) 2.260,8 cm^3 c) 6.782,4 cm^3 d) 1.356,48 cm^3

5 **El volumen de una pirámide de base cuadrangular de lado 8 cm y altura 8 cm es igual a:**

a) 170,67 cm^3 b) 85,33 cm^3 c) 341,34 cm^3 d) 42,68 cm^3

VOLUMEN DE LA ESFERA

El volumen de una esfera es: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

EJEMPLO

Calcula el volumen de una esfera de radio 3 cm.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

6 **El volumen de una esfera de radio 7 cm es:**

a) 718,01 cm^3 b) 143,603 cm^3 c) 1.436,03 cm^3 d) 339,12 cm^3

7 **El volumen de una esfera de área 2.826 cm^2 es:**

a) 14.130 cm^3 b) 42.390 cm^3 c) 28.260 cm^3 d) 86.340 cm^3

