6 Proporcionalidad numérica

INTRODUCCIÓN

Es muy importante que los alumnos sean capaces de discernir si dos magnitudes son proporcionales. A veces cometen el error de pensar que, si al aumentar una magnitud, la otra también lo hace, son directamente proporcionales, sin distinguir si ese aumento es proporcional. Conviene insistir en la necesidad de una lectura detallada de los problemas para identificar la relación entre las magnitudes que intervienen.

Se trata, en primer lugar, la proporcionalidad directa y sus aplicaciones: repartos directamente proporcionales, porcentajes y regla de tres simple directa.

La parte final de la unidad se dedica a la proporcionalidad inversa y sus aplicaciones: repartos inversamente proporcionales y regla de tres inversa.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos *magnitudes* son *directamente proporcionales* cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$.
- Dos *magnitudes* son *inversamente proporcionales* si se cumple que: $x \cdot y = k$.
- La *regla de tres* es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos o más magnitudes.
- Los *porcentajes* o *tantos por ciento* expresan la cantidad de una magnitud que corresponde a 100 unidades de la otra magnitud.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Distinción de magnitudes directamente proporcionales. • Realización de tablas de proporcionalidad directa.
2. Aplicar la regla de tres simple directa.	• Regla de tres simple directa.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple directa.
3. Calcular porcentajes.	• Porcentajes.	• Expresión de cantidades en tantos por ciento. • Utilización de los porcentajes para resolver problemas. • Resolución de problemas con aumentos o disminuciones porcentuales.
4. Realizar repartos directamente proporcionales.	• Repartos directamente proporcionales.	• Resolución de problemas utilizando los repartos directamente proporcionales.
5. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales.	• Distinción de magnitudes inversamente proporcionales.
6. Aplicar la regla de tres simple inversa.	• Regla de tres simple inversa.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple inversa.
7. Realizar repartos inversamente proporcionales.	• Repartos inversamente proporcionales.	• Resolución de problemas utilizando los repartos inversamente proporcionales.

OBJETIVO 1

RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- Esta constante *k* se denomina **constante de proporcionalidad directa**.

EJEMPLO

Si cada kilo de manzanas vale 40 céntimos, averigua la relación que existe entre el peso de manzanas y el precio.

Para ello, formamos una tabla de dos filas: en una de ellas representamos las cantidades de una magnitud, y en la otra, las cantidades de la otra magnitud.

PESO (en kilos)	1	2	3	4	5
PRECIO (en céntimos)	40	80	120	160	200

Todas las divisiones entre el precio de las manzanas y su peso dan el mismo resultado:

$$\frac{40}{1} = 40 \qquad \frac{80}{2} = 40 \qquad \frac{120}{3} = 40 \qquad \frac{160}{4} = 40 \qquad \frac{200}{5} = 40$$

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40 = k$$

Es decir, el peso de las manzanas y su precio son magnitudes directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es, en este caso, $k = 40$.

La tabla representada se denomina tabla de proporcionalidad.

1 **Para hacer una tortilla se utilizan 4 huevos. Determina la relación entre estas magnitudes.**

a) Completa la tabla.

HUEVOS	8	16	20		32
TORTILLA	2	4	5	6	

b) Comprueba el resultado de todas las divisiones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{\square}{6} = \square \qquad \frac{32}{\square} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales? $\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{\square}{6} = \frac{32}{\square} = \square$

d) Determina la constante de proporcionalidad, *k*.

2 **Completa las tablas siguientes para que sean tablas de proporcionalidad directa.**

2	4		8	40
6		15		

0	0,25	3		8
	1,25		12	

■ MATEMÁTICAS 3.° ESO ■ MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

EJEMPLO

Considera un coche que no circula a velocidad constante, es decir, va frenando y acelerando según el tráfico, de forma que se obtengan los siguientes datos.

HORAS TRANSCURRIDAS	1	2	3	4
KILÓMETROS RECORRIDOS	3	7	15	19

Realizamos todas las divisiones entre las dos magnitudes:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad \frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Podemos observar que estas divisiones no dan el mismo resultado. Por tanto, las magnitudes de las horas transcurridas y los kilómetros recorridos no son directamente proporcionales.

3 **Por cada ventana instalada nos cobran 500 €, pero si instalamos más de 10 ventanas nos cobran 450 € por cada una. Comprueba si estas magnitudes son directamente proporcionales.**

a) Completa la tabla con los datos numéricos que faltan.

NÚMERO DE VENTANAS	2	4	7	10	11	20
PRECIO	1.000	2.000		5.000	4.950	9.000

b) Halla el resultado de las razones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{1.000}{2} = \square \qquad \frac{2.000}{4} = \square \qquad \frac{\square}{7} = \square$$

$$\frac{5.000}{10} = \square \qquad \frac{4.950}{11} = \square \qquad \frac{9.000}{20} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales?

4 **Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.
b) El volumen que ocupa un líquido y su peso.
c) El número de fotocopias y su precio.

5 **Observa la tabla siguiente. Comprueba que las magnitudes *M* y *M'* son directamente proporcionales, y calcula *y* e *y'*.**

MAGNITUD *M*	4	6	7	9	10
MAGNITUD *M'*	12	18	21	y	y'

APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **regla de tres simple directa** es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes directamente proporcionales.

EJEMPLO

Si una docena de naranjas cuesta 3 €, ¿cuánto cuestan 4 naranjas?

Como la cantidad de naranjas y su precio son magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar esta relación de la siguiente manera.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 12 \text{ naranjas} \xrightarrow{\text{cuestan}} 3\ € \\ 4 \text{ naranjas} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{3}{x}$$

Ahora despejamos la x:

$$\frac{12}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{12x}{4} = 3 \rightarrow 12x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

Las 4 naranjas cuestan 1 €.

1 **En una panadería han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿Cuánto tendrían que pagar si hubiesen comprado 85 barras?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{cuestan}} \boxed{}\ € \\ \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{costarán}} \boxed{}\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Las 85 barras cuestan $\boxed{}$ €.

2 **Si 4 dólares son 3 euros, ¿cuántos euros son 4,5 dólares?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{son}} \boxed{} \text{ euros} \\ \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{serán}} \boxed{} \text{ euros} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Los 4,5 dólares son $\boxed{}$ euros.

CALCULAR PORCENTAJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **porcentajes** o **tantos por ciento** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales y nos indican la cantidad de una de ellas correspondiente a 100 unidades de la otra.

EJEMPLO

Si el 17 % de un terreno es 23,46 m², ¿cuántos metros cuadrados representan el total del terreno?

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 17 \longrightarrow & 100 \\ \textbf{m}^2 & 23{,}46 \longrightarrow & x \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa, tenemos que: $\dfrac{17}{23{,}46} = \dfrac{100}{x}$.

Despejamos la x: $17x = 100 \cdot 23{,}46$ $\qquad x = \dfrac{2.346}{17} = 138$

Total del terreno es 138 m^2.

1 **Un depósito de 3.000 litros de capacidad contiene 1.025 litros. ¿Qué tanto por ciento es?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 100 \longrightarrow & x \\ \textbf{Litros} & 3.000 \longrightarrow & 1.025 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{100}{3.000} = \dfrac{x}{1.025}$.

Despejamos la x:

Con los 1.025 litros el depósito está al .... %.

2 **En época de sequía, un embalse con capacidad máxima de 200 hectómetros cúbicos estaba al 45 %. ¿Qué capacidad de agua contenía en ese momento?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{Capacidad} & x \longrightarrow & 200 \\ \textbf{\%} & 45 \longrightarrow & 100 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{x}{45} = \dfrac{200}{100}$.

Despejamos la x:

La capacidad de agua es .... hectómetros cúbicos.

3 **A un artículo que vale 30 € se le aplica un 20 % de descuento. ¿Cuánto cuesta el artículo?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 100 \longrightarrow & 20 \\ \textbf{Euros} & 30 \longrightarrow & x \end{array}\right\}$$

REALIZAR REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Para realizar el reparto de una cantidad n de forma directamente proporcional a unas cantidades a, b, c…:

- Se **suman las cantidades** que hay que repartir: $a + b + c + \ldots$
- Se **divide la cantidad *n* entre esa suma**. Este cociente es la constante de proporcionalidad.
- Para calcular cada parte basta con **multiplicar cada cantidad *a*, *b*, *c*… por esa constante**.

1 **La Unión Europea ha concedido una subvención de 15.000 € para tres pueblos. El pueblo *A* tiene 1.800 habitantes; el *B*, 700, y el *C*, 500. ¿Cómo debe repartirse el dinero?**

$A + B + C = 1.800 + 700 + 500 = 3.000$

- **Pueblo *A***

	Total	*A*	*B*	*C*
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{1.800}{x}$$

Despejamos la x:

$3.000x = 1.800 \cdot 15.000 \rightarrow 3.000x = 27.000.000 \rightarrow x = \dfrac{27.000.000}{3.000} = 9.000$

$x = \boxed{}$ €

- **Pueblo *B***

	Total	*A*	*B*	*C*
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{700}{y}$$

Despejamos la y:

$y = \boxed{}$ €

- **Pueblo *C***

	Total	*A*	*B*	*C*
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Despejamos la z:

$z = \boxed{}$ €

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

2 **Vicente y José abren una cartilla de ahorros en el banco. Vicente ingresa 400 € y José ingresa 800 €. Al cabo de unos años les devuelven 1.380 €. ¿Cómo se los tienen que repartir?**

Vicente + José = 400 + 800 = 1.200

	Total	Vicente	José
Dinero invertido	1.200	400	800
Dinero ganado	1.380	x	y

______ = ______   ______ = ______

Despejamos la x: Despejamos la y:

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$

3 **Tres socios de un negocio aportan 30.000, 20.000 y 10.000 €, respectivamente. Si obtienen unos beneficios de 102.000 €, ¿cuánto le corresponde a cada uno?**

	Total	Socio 1	Socio 2	Socio 3
Dinero invertido	$\boxed{}$	30.000	20.000	10.000
Beneficios	102.000	x	y	z

______ = ______   ______ = ______   ______ = ______

Despejamos la x: Despejamos la y: Despejamos la z:

$x =$ $\boxed{}$ $y =$ $\boxed{}$ $z =$ $\boxed{}$

4 **Un padre reparte el premio de una quiniela entre sus tres hijos de 18, 22 y 25 años para ayudar en su formación universitaria, de forma directamente proporcional a sus edades. Si el menor obtiene 12.000 €, calcula:**

a) ¿Cuánto dinero ha repartido el padre?

b) ¿Cuánto le ha correspondido a cada hijo?

	Total	Hijo 1	Hijo 2	Hijo 3
Años	$\boxed{}$	18	22	25
Dinero	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

6 OBJETIVO 5

RECONOCER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: __________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de dos valores correspondientes de ambas es constante:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = k$$

Esta constante k se denomina **constante de proporcionalidad inversa**.

EJEMPLO

30 obreros tardan 120 horas en pintar una fachada. Si fuesen 20 obreros tardarían 180 horas, y si fuesen 15 obreros, 240 horas. ¿Qué relación hay entre estas magnitudes?

OBREROS	30	20	15
HORAS	120	180	240

$30 \cdot 120 = 3.600$ $\quad$ $20 \cdot 180 = 3.600$ $\quad$ $15 \cdot 240 = 3.600$ $\quad$ $k = 3.600$

Como los productos que obtenemos son iguales, las magnitudes de número de obreros y número de horas son inversamente proporcionales.

1 **Tardamos 3 horas en hacer el recorrido que hay de casa al colegio a una velocidad de 12 km/h. Si fuésemos a 15 km/h tardaríamos 2,4 horas, y si fuésemos a 4 km/h, 9 horas. Comprueba si estas magnitudes son inversamente proporcionales.**

VELOCIDAD (km/h)	12	15	4
TIEMPO (horas)	3	2,4	9

2 **Para construir una nave en 60 días son necesarias 30 personas. Si pasados 24 días se incorporan 12 personas más, ¿en cuántos días terminarán?**

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **regla de tres simple inversa** es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

EJEMPLO

Si 4 trabajadores tardan 10 días en hacer un trabajo, ¿cuánto tardarán 3 trabajadores?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 4 trabajadores} \xrightarrow{\text{tardan}} 10 \text{ días} \\ \text{3 trabajadores} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ días}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{x}{10}$$

$$4 \cdot 10 = 3 \cdot x \rightarrow 40 = 3x \rightarrow x = \frac{40}{3} = 13{,}3 \text{ días}$$

Los 3 trabajadores tardarán algo más de 13 días.

1 **En un depósito hay agua para 20 personas durante 30 días. ¿Para cuánto tiempo durará el agua si fueran 22 personas?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \boxed{20} \text{ personas} \xrightarrow{\text{tienen para}} \boxed{30} \text{ días} \\ \boxed{} \text{ personas} \xrightarrow{\text{tendrán para}} \boxed{} \text{ días}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la *x*:

Las 22 personas tendrán agua para $\boxed{}$ días.

2 **Con el agua de un depósito se llenan 60 envases de 5 litros cada uno. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro (0,75 ℓ) cada una se llenarían con el agua del depósito?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \boxed{5} \text{ litros} \xrightarrow{\text{llenan}} \boxed{60} \text{ envases} \\ \boxed{} \text{ litros} \xrightarrow{\text{llenarían}} \boxed{} \text{ botellas}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la *x*:

Se llenarían $\boxed{}$ botellas de tres cuartos de litro.

6 OBJETIVO 7

REALIZAR REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Repartir una cantidad n de forma **inversamente proporcional** a otras cantidades a, b, c… es equivalente a **repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades *a*, *b*, *c*…**
- Cada parte se obtiene dividiendo la constante de proporcionalidad $R = \dfrac{n}{1/a + 1/b + 1/c + \ldots}$ entre su cantidad correspondiente a, b, c…

EJEMPLO

El premio de una carrera es de 550 € y se repartirá entre los tres primeros corredores en acabar la prueba de forma inversamente proporcional al orden de llegada, es decir, inversamente proporcional a 1, 2 y 3. ¿Qué cantidad le corresponde a cada corredor?

Puestos

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{1} = 1 \\[2ex] 2 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{2} \\[2ex] 3 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

Dividimos la cantidad, 550 €, entre la suma de los inversos: $550 : \dfrac{11}{6} = \dfrac{550 \cdot 6}{11} = 300$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Al 1.º le corresponde } \dfrac{300}{1} = 300 \text{ €} \\[2ex] \text{Al 2.º le corresponde } \dfrac{300}{2} = 150 \text{ €} \\[2ex] \text{Al 3.º le corresponde } \dfrac{300}{3} = 100 \text{ €} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Comprobamos}} 300 + 150 + 100 = 550 \text{ €}$$

1 **Un padre acude con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 caramelos que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 9 y 6 años. ¿Cuántos caramelos le da a cada uno?**

Edades

$$\left.\begin{array}{l} 9 \xrightarrow{\text{Inverso}} \boxed{} \\[2ex] 6 \xrightarrow{\text{Inverso}} \boxed{} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

Dividimos la cantidad, 50, entre la suma de los inversos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Al hijo de 9 años le corresponden } \boxed{} \\[2ex] \text{Al hijo de 3 años le corresponden } \boxed{} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Comprobamos}} \boxed{} + \boxed{} = 50$$

2 **Reparte 50 en partes inversamente proporcionales a los números 2, 2 y 3.**

Números

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$ $\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}}$ $\square + \square + \square = \square$

3 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$

Dividimos la cantidad, 50, entre la suma de los inversos:

A 2 le corresponde $\square$

A 2 le corresponde $\square$ $\xrightarrow{\text{Comprobamos}}$ $\square + \square + \square = 50$

A 3 le corresponde $\square$

3 **El coste de la matrícula de una academia de música es menor cuantos más notables se han obtenido en el curso anterior. Tres amigos, Pedro, Sara y Leonor, han obtenido 2, 3 y 5 notables, respectivamente, y entre los tres han pagado 310 €. ¿Cuánto le ha costado la matrícula a cada uno?**

Notables

2 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$

3 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$ $\xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}}$ $\square + \square + \square = \square$

5 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ $\square$

Dividimos la cantidad, 310, entre la suma de los inversos:

A Pedro le corresponde $\square$

A Sara le corresponde $\square$ $\xrightarrow{\text{Comprobamos}}$ $\square + \square + \square = 310$

A Leonor le corresponde $\square$

4 **Los tres camareros de una cafetería, Olga, Juan y Félix, han estado enfermos durante 3, 6 y 9 días del mes de julio, respectivamente. Durante este mes han recibido 275 € de propina que se han de repartir de forma inversamente proporcional a los días no trabajados. ¿Cuántos euros les corresponden a cada uno de ellos?**

Días

$$\left.\begin{array}{l} 3 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square \\ 6 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square \\ 9 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumamos los inversos}} \square + \square + \square = \square$$

Dividimos la cantidad, 275 €, entre la suma de los inversos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A Olga le corresponde } \square \\ \text{A Juan le corresponde } \square \\ \text{A Félix le corresponde } \square \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Comprobamos}} \square + \square + \square = 275$$