4 Ecuaciones de primer y segundo grado

INTRODUCCIÓN

La unidad comienza diferenciando entre ecuaciones e identidades, para pasar luego a la exposición de los conceptos asociados al de ecuación.

Para resolver ecuaciones de primer grado se aprenderá a transponer términos. Es importante que los alumnos comprendan que las reglas de la suma y el producto son transformaciones que permiten pasar de una ecuación inicial, compleja en su expresión, a otra más sencilla.

Los alumnos deben aprender a identificar una ecuación de segundo grado. Conviene mostrar la utilidad de la fórmula general para hallar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado utilizando solo sus coeficientes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación* es una igualdad algebraica que solo es cierta para algunos valores.
- *Incógnita de una ecuación* es la letra de valor desconocido.
- *Grado de una ecuación* es el mayor exponente de la incógnita.
- *Solución o soluciones de una ecuación*: valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad.
- Para *resolver ecuaciones* se aplican las reglas de la suma y el producto.
- Ecuación de primer grado: $ax = b$.
- Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$. a, b, c: números reales; $a \neq 0$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar una ecuación, su grado y su solución.	• La ecuación como igualdad. • Elementos de una ecuación: incógnita, coeficiente, miembros, términos y grado.	• Identificación del grado de una ecuación. • Comprobación de si un número es solución de una ecuación.
2. Resolver ecuaciones.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de primer grado por transposición de términos.
3. Resolver ecuaciones con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Aplicación correcta de la jerarquía de las operaciones. • Comprobación de la solución de una ecuación.
4. Resolver ecuaciones de segundo grado.	• Ecuación de segundo grado completa. • Solución general.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado. • Aplicación correcta de la jerarquía de las operaciones. • Comprobación de la solución de una ecuación.
5. Resolver problemas mediante ecuaciones.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

IDENTIFICAR UNA ECUACIÓN, SU GRADO Y SU SOLUCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Dado el polinomio $P(x) = 3x + 5$, ya sabemos cómo se calcula su valor numérico:

  $x = 3 \longrightarrow P(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

  $x = -2 \longrightarrow P(-2) = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$

  Si al polinomio le imponemos un valor como resultado, obtenemos una **ecuación**:

  $3x + 5 = 8$ Hay que saber para qué valor de x el polinomio vale 8.

- Podemos seguir el mismo razonamiento con la igualdad de dos polinomios:

  $P(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $Q(x) = 2x + 8$

  Si imponemos la condición de igualdad entre los dos polinomios, también se obtiene una ecuación:

  $3x^2 + 2x - 7 = 2x + 8$ Hay que saber para qué valor de x se cumple esta igualdad.

  Por tanto, el concepto de ecuación aparece cuando se impone una igualdad algebraica.

En una ecuación con una sola incógnita:

- La **incógnita** es la letra con valor desconocido.
- El **grado** es el mayor exponente con que figura la incógnita en la ecuación, una vez realizadas todas las operaciones.
- La parte izquierda de la igualdad se llama **primer miembro**, y la parte derecha, **segundo miembro**.
- Cada miembro está formado por uno o más sumandos que se denominan **términos**.
- En los términos con incógnita, el número se llama **coeficiente**. Los términos sin incógnita se denominan **términos independientes**.
- La **solución** o soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad sea cierta.

EJEMPLO

Elementos de una ecuación:

$$\underbrace{\underbrace{3x}_{\text{término}} + \underbrace{7(x-1)}_{\text{término}}}_{\text{1.}^{\text{er}}\text{ miembro}} = \underbrace{\underbrace{2x}_{\text{término}} + \underbrace{5}_{\text{término}}}_{\text{2.}^{\text{o}}\text{ miembro}}$$

x: incógnita

coeficientes: 3, 7, 2

EJEMPLO

Grado de una ecuación:

$2x - 8 = 7 \rightarrow$ Primer grado

$(x - 5) \cdot (x - 2) = 1 \xrightarrow[\text{Operando}]{} x^2 - 7x + 10 = 1 \rightarrow$ Segundo grado

1 **Señala el grado de las siguientes ecuaciones.**

a) $5x + 6 = x^2 + 4$

b) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$

c) $7(x - 1) = 4(x - 2) - 3(-x - 5)$

2 **¿Cuál de los números es solución de la ecuación $5x - 9 = 4(x - 5)$?**

a) 4

b) -3

c) 14

d) -11

RESOLVER ECUACIONES. TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

NOMBRE: ____________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- **Resolver una ecuación** es obtener el valor de la incógnita que cumple la ecuación.
- Para ello se emplea la **transposición de términos**, pasando todos los términos con x a un miembro y todos los números al otro. Se deben tener en cuenta las siguientes reglas.
  - **Regla de la suma:** un término que está sumando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro restando, y si está restando, pasará sumando.
  - **Regla del producto:** un término que está multiplicando en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro dividiendo, y si está dividiendo, pasará multiplicando.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación por transposición: $6x + 8 = 3x - 4$.

- Si restamos -8 en los dos miembros, eliminamos el término $+8$ del primer miembro. Esto equivale a pasar directamente el término -8 al segundo miembro como $+8$.
- Igualmente, para eliminar $3x$ del segundo miembro lo pasamos al primero como $-3x$.
- Operamos y, en la ecuación obtenida, $3x = -12$, pasamos el 3, que está multiplicando en el primer miembro, dividiendo al segundo miembro.

$$\boxed{6x + 8 = 3x - 4}$$

$$6x + 8 = 3x - 4$$

$$6x - 3x = -4 - 8$$

$$3x = -12$$

$$x = \frac{-12}{3} = -4$$

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $3x + 8 = 5x + 2$

d) $4x - 5 = 3x - x + x - 5$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9$

e) $2x + 5 = 2 + 4x + 3$

c) $9x - 11 = 4x + 6 + 5x + 5$

f) $6x + 2x + 4 = 3x + 3 - 5x - 9$

RESOLVER ECUACIONES CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Para eliminar los paréntesis de una ecuación:

- Si el paréntesis va precedido del signo $+$, se dejan los términos de su interior tal y como aparecen.

$$x + (2x - 3 + x^2) = x + 2x - 3 + x^2$$

- Si el paréntesis va precedido del signo $-$, se cambia el signo de todos los términos de su interior.

$$x - (2x - 3 + x^2) = x - 2x + 3 - x^2$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\mathbf{3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2}$

a) Quitamos paréntesis: $3x + 15 - 7x + 1 = 2x - 2$

b) Reducimos términos semejantes: $-4x + 16 = 2x - 2$

c) Transponemos términos: $16 + 2 = 2x + 4x \rightarrow 18 = 6x$

d) Despejamos la x: $\dfrac{18}{6} = x \rightarrow 3 = x$

e) Comprobamos la solución: $3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2$

$$\text{Si } x = z \rightarrow 3(3 + 5) - 7 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3 - 2$$
$$3 \cdot 8 - 21 + 1 = 6 - 2$$
$$24 - 21 + 1 = 4$$
$$4 = 4$$

La solución es correcta, porque el resultado es el mismo número en ambos miembros.

1 **Resuelve la ecuación:** $\mathbf{4[(x + 2) \cdot 4 - 7] = 10x - 8}$**.**

a) Quitamos paréntesis.

b) Reducimos términos semejantes.

c) Transponemos términos.

d) Despejamos la x.

e) Comprobamos la solución.

La solución es correcta si el resultado final es el mismo número en ambos miembros.

ECUACIONES CON DENOMINADORES

Para **eliminar los denominadores** de una ecuación hay que calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y multiplicar los dos miembros de la ecuación por ese número.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\dfrac{7x-3}{2}-7=\dfrac{x+7}{5}$

a) Calculamos el m.c.m.: m.c.m. $(2, 5) = 10$

b) Multiplicamos la ecuación por 10: $\dfrac{10}{2}(7x-3)-10\cdot 7=\dfrac{10}{5}(x+7)$

$$5(7x-3)-10\cdot 7=2(x+7)$$

c) Quitamos paréntesis: $35x-15-70=2x+14$

d) Reducimos términos semejantes: $35x-85=2x+14$

e) Transponemos términos: $35x-2x=14+85 \rightarrow 33x=99$

f) Despejamos la x: $x=\dfrac{99}{33}=3$

g) Comprobamos la solución: $\dfrac{7x-3}{3}-7=\dfrac{x+7}{5}$

$$\text{Si } x=3 \rightarrow \frac{7\cdot 3-3}{2}-7=\frac{3+7}{5}$$

$$\frac{18}{2}-7=\frac{10}{5}$$

$$9-7=2 \rightarrow 2=2$$

2 **Resuelve la siguiente ecuación:** $\dfrac{3x+1}{2}-3=\dfrac{2(x+1)}{3}$.

a) Calculamos el m.c.m.

b) Multiplicamos la ecuación por el m.c.m.

c) Quitamos paréntesis.

d) Reducimos términos semejantes.

e) Transponemos términos.

f) Despejamos la x.

g) Comprobamos la solución.

3 **Resuelve las ecuaciones y comprueba la solución.**

a) $3(x-2)-(2x-1)=0$

b) $4(x-3)-5(x+8)=6(x+3)-2$

c) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{x}{2}$

d) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\dfrac{x+4}{7}+2(x+4)$

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c: \text{ números reales; } a \neq 0$$

- La **fórmula general** para resolver una ecuación de segundo grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación. $\mathbf{x(x + 3) - 2(x + 1) = 4}$

a) Quitamos paréntesis: $x^2 + 3x - 2x - 2 = 4$

b) Reducimos términos semejantes: $x^2 + x - 2 = 4$

c) Como es una ecuación de 2.º grado, pasamos todos los términos a un miembro: $x^2 + x - 6 = 0$

d) Aplicamos la fórmula general. Para ello identificamos los términos:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1 \ \text{ y } \ c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \longrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \longrightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \longrightarrow x_2 = -3$$

e) Comprobamos las soluciones:

$$\begin{array}{rr} & x(x + 3) - 2(x + 1) = 4 \\ \text{Si } x_1 = 2 \longrightarrow & 2(2 + 3) - 2(2 + 1) = 4 \\ & 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4 \\ & 10 - 6 = 4 \\ & 4 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & x(x + 3) - 2(x + 1) = 4 \\ \text{Si } x_2 = -3 \longrightarrow & -3(-3 + 3) - 2(-3 + 1) = 4 \\ & -3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) = 4 \\ & 0 + 4 = 4 \\ & 4 = 4 \end{array}$$

1 **Resuelve la siguiente ecuación: $(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$.**

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Quitamos los paréntesis: $\square + \square - \square - \square = \square - \square - 3x$

Como es una ecuación de 2.º grado, pasamos todo a un miembro: $= 0$

Operamos: $\boxed{2x^2+x-2=0} \rightarrow a=2,\ b=1$ y $c=-2$

Utilizamos la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)+(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm(\quad)}{4}$$

$x_1 =$

$x_2 =$

Comprobamos si las soluciones son correctas:

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Si $x_1 = \square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\quad = \quad}$ Por tanto, $x_1 = \square$ es solución.

Si $x_2 = \square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\quad = \quad}$ Por tanto, $x_2 = \square$ también es solución.

2 **Resuelve la ecuación: $x(x-2)+2x=4$.**

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-4x+3=0$

$x_1 =$	$x_2 =$

Comprobamos el resultado:

b) $2x^2-20x+50=0$

$x_1 =$	$x_2 =$

Comprobamos el resultado:

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema.
c) **Resolver** el problema.
d) **Comprobar** el resultado.

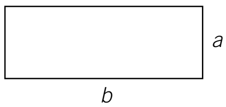
EJEMPLO

El perímetro de una parcela rectangular es de 90 metros y mide 5 metros más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Recordamos antes de empezar dos fórmulas básicas:

Área del rectángulo $= b \cdot a$

Perímetro del rectángulo $= 2a + 2b$



a) Leer detenidamente el enunciado (puede ser útil realizar un dibujo básico o esquema).

b) Plantear el problema: Si el lado menor es x, ¿cuál será el lado mayor si es 5 metros más largo que el menor?

El lado mayor será $x + 5$.

Por tanto: $x \longrightarrow$ lado menor de la parcela
$x + 5 \rightarrow$ lado mayor de la parcela

Como el perímetro de la parcela mide 90 metros $\rightarrow 2x + 2(x + 5) = 90$

c) Resolver la ecuación: $2x + 2x + 10 = 90 \rightarrow 4x = 80 \rightarrow x = 20$

Lado menor: 20 metros   Lado mayor: $20 + 5 = 25$ metros

d) Comprobar la solución:

$$2x + 2(x + 5) = 90 \xrightarrow{x = 20} 2 \cdot 20 + 2 \cdot (20 + 5) = 90 \rightarrow 40 + 2 \cdot 25 = 90 \rightarrow 90 = 90$$

1 **Miguel tiene ahora cuatro años más que su primo Ignacio y, dentro de tres años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?**

a) Lee despacio el enunciado.

b) Plantea el problema, organizando la información.

	HOY		**DENTRO DE 3 AÑOS**
Miguel tiene	$x + 4$ años	$+ 3$ años $\longrightarrow$	$x + 4 + 3$
Ignacio tiene	x años	$+ 3$ años $\longrightarrow$	

La suma de ambos números es 20 $\longrightarrow$ $\boxed{}$

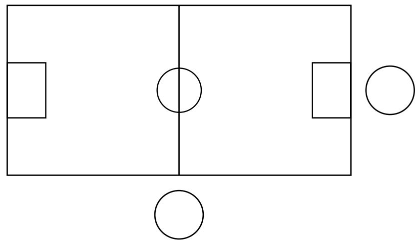
c) Resuelve el problema.

d) Comprueba el resultado.

2 **Un campo de fútbol mide 30 metros más de largo que de ancho y su área es 7.000 m^2. Calcula sus dimensiones.**

a) Lee detenidamente el problema.

b) Plantea la ecuación.



Su área es 7.000 m^2 $\longrightarrow$ $\boxed{\qquad\qquad = 7.000}$

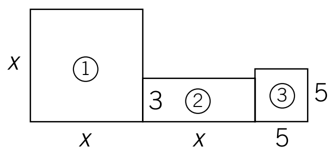
c) Resuelve la ecuación.

d) Comprueba el resultado.

3 **Calcula el valor de *x* sabiendo que el área total de la figura es 53.**

a) Lee detenidamente el problema.

b) Plantea la ecuación.



Área 1 $\boxed{\qquad}$ Área 2 $\boxed{\qquad}$ Área 3 $\boxed{\qquad}$ Las tres áreas suman 53.

c) Resuelve la ecuación.

d) Comprueba el resultado.

4. Un padre cede a un hijo $\frac{1}{5}$ de su capital, a otro $\frac{1}{4}$ y a un tercer hijo le da el resto, que son 19.800 €. ¿Cuál era su capital?

5. Si a mi edad le resto el cuadrado de su quinta parte resultan 6 años. ¿Qué edad tengo?

6. Halla dos números consecutivos, tales que añadiendo al cuadrado del mayor la mitad del menor resulta 27.

7. María dice a Daniel: «Si al cuadrado de mi edad le resto ocho veces mi edad, el resultado es el triple de la edad que tú tienes». Si la edad de Daniel es 16 años, ¿cuál es la edad de María?